

# Algoritmo Memético con regiones basado en el encadenamiento de búsquedas locales

Benjamin Lacroix Daniel Molina Francisco Herrera

*Resumen*— En un trabajo previo se presentó un algoritmo memético, MA-LSCh-CMA, para problemas de optimización continua. Dicho algoritmo proponía un nuevo modelo de hibridación que permitía utilizar de forma efectiva métodos de búsqueda locales *costosos* que necesitan un alto número de evaluaciones, obteniendo muy buenos resultados. Sin embargo, en dicho modelo se podía producir una convergencia prematura en la población, ya que el algoritmo evolutivo empleado estaba diseñado para explotar las soluciones, tarea ya realizada por la búsqueda local. En este trabajo presentamos un nuevo algoritmo, RMA-LSCh-CMA, en el que se introduce una estrategia de nichos. Dicha estrategia se diferencia de otras en que las regiones de exclusión no se definen alrededor de las soluciones, sino que se divide el espacio de búsqueda en hipercubos de un mismo tamaño, y se garantiza únicamente una solución en cada región, manteniendo una mayor diversidad entre la población. Esta propuesta es evaluada siguiendo el conjunto de funciones de prueba propuesto en la sesión de optimización continua del CEC'2005, y los experimentos prueban que RMA-LSCh-CMA es significativamente mejor que MA-LSCh-CMA, y que es competitivo respecto a otros algoritmos del *estado del arte*, como IPOP-CMAES.

*Palabras clave*— algoritmos evolutivos, nichos, optimización continua, algoritmos meméticos.

## I. INTRODUCCIÓN

Se ha demostrado que hibridar los algoritmos evolutivos (AEs) con otras técnicas puede incrementar sustancialmente su eficiencia de búsqueda [1], [2].

Los AEs obtenidos mediante la hibridación con técnicas de búsqueda local (BL) son denominados algoritmo meméticos, AMs [3], [4], [5]. Un procedimiento usual de mejora es aplicar el método de BL a los nuevos miembros de la población, para explotar las mejores regiones de búsqueda obtenidas durante el muestreo global del AE. Esto permite diseñar AMs para optimización continua capaces de obtener soluciones precisas para este tipo de problemas [6].

La mayoría de los métodos de BL más relevantes requieren adaptar parámetros estratégicos para guiar la búsqueda. Dicha adaptación requiere para que sea efectiva un número elevado de evaluaciones, métodos de BL *intensos*, con los cuales se pueden conseguir soluciones adecuadas. El modelo tradicional de hibridación no es adecuado para estos algoritmos de BL intensos, ya que si el operador de BL dedica un número alto de evaluaciones para mejorar una solución, se podría aplicar la BL únicamente a un número reducido de soluciones. Además, si éstas

no conducen a mejoras significativas, dicho esfuerzo no redundaría en una mejor solución. Por tanto, para este tipo de métodos de BL es importante seleccionar las soluciones de forma cuidadosa.

En un trabajo previo [7] se propuso un modelo de AM que aplica la BL en función de la solución. A las soluciones más prometedoras se aplicaba la BL con una mayor intensidad. Consideraba que una solución es prometedora si permanece más tiempo como la mejor solución de la población. Para poder aplicar la BL con distinta intensidad a las diferentes soluciones se planteó un modelo de hibridación en el que se pudiese aplicar la BL varias veces sobre una misma solución, generando *cadena de BL*. Con esta técnica de *cadena de BL* el individuo resultante de aplicar la BL puede ser posteriormente la solución inicial de una nueva aplicación de la BL, utilizando como valores iniciales de los parámetros de la búsqueda sus valores finales tras la aplicación anterior.

El modelo anterior usaba como AE encargado de explorar la población un algoritmo genético estacionario, SSGA, [8] sin modificar. Y como todo AE diseñado para trabajar de forma aislada, permite tener soluciones muy próximas entre sí, para poder explotar las soluciones. Sin embargo, cuando se utiliza un AE dentro de un AM no conveniente que el algoritmo explote el entorno cercano a las soluciones, ya que es tarea de la BL. Además, si el AE encargado de la exploración global mantiene soluciones muy próximas entre sí, éstas pueden caer en la misma base de atracción, zona en la que al aplicar la BL el resultado final coincide.

En este trabajo planteamos una mejora del modelo anterior, modificando el algoritmo evolutivo encargado de la exploración global, mediante el uso de una estrategia de nichos, en la que se divide el espacio de búsqueda en hipercubos del mismo tamaño. El nuevo AE se asegura de no permitir más de una solución dentro de la misma región, manteniendo mayor diversidad entre la población, y mejorando así la búsqueda.

Este trabajo se estructura de la siguiente forma. Primero, describimos de forma concisa el algoritmo anterior, presentando los distintos componentes que lo constituyen. Luego, describimos el algoritmo propuesto, resaltando las diferencias con respecto al modelo anterior. Luego, se experimenta sobre un conjunto de funciones de prueba, y se compara tanto con el algoritmo anterior como con otros algoritmos de optimización. Finalmente, se analizan los resultados obtenidos y se muestran las conclusiones obtenidas.

Universidad de Granada. E-mail: benjamin@decsai.ugr.es.  
Universidad de Cádiz. E-mail: daniel.molina@uca.es  
Universidad de Granada. E-mail: herrera@decsai.ugr.es.

## II. ALGORITMO MA-LSCH-CMA

En este apartado comentamos el esquema general del algoritmo MA-LSCh-CMA [7], y luego, más en detalle, sus distintos componentes. Sin embargo, no pretende ser una explicación exhaustiva. Si desea conocer más detalles sobre el algoritmo, puede consultar [7].

### A. Esquema General

Este algoritmo es un algoritmo elitista que aplica de forma alternativa el AE y la BL, según el esquema propuesto en la Figura 1.

1. Generar la población inicial.
2. Ejecutar el AG estacionario durante  $n_{frec}$  evaluaciones.
3. Construir el conjunto  $S_{BL}$  con los individuos que pueden ser mejorados mediante la BL.
4. Seleccionar el mejor individuo de  $S_{BL}$  (denominamos  $c_{BL}$  a este individuo).
5. Si  $c_{BL}$  pertenece a una cadena de BL previa entonces inicializa el operador  $c_{BL}$  con el **estado previo de la BL anterior** almacenado junto con  $c_{BL}$ .
6. Si no, inicializa el operador de BL con el estado **por defecto**.
7. Aplicar el algoritmo de la BL a  $c_{BL}$  con intensidad  $I_{step}$  ( $c_{BL}^r$  es el individuo resultante).
8. Reemplazar  $c_{BL}$  por  $c_{BL}^r$  en la **población del AG estacionario**.
9. Almacenar el estado final de la BL asociado a  $c_{BL}^r$ .
10. Si no cumple la condición de terminación ir al paso 2.

Fig. 1. Seudocódigo del algoritmo MA-LSCh-CMA

Para seleccionar  $c_{BL}$  se aplica el siguiente procedimiento (Pasos 3 y 4):

1. Se construye el conjunto de individuos  $S_{BL}$  como los individuos de la población que cumplen que:
  - a) Nunca han sido mejorados mediante el algoritmo de BL, o
  - b) Fueron previamente mejorados mediante la BL, obteniendo un  $fitness$  mejor que  $10^{-8}$  (parámetro del algoritmo).
2. Si  $|S_{BL}| \neq 0$ , aplica el método de BL al mejor individuo de dicho conjunto. Si la condición no se cumple, se reinicia la población (manteniendo la mejor solución alcanzada).

Con este mecanismo, cuando el AG estacionario obtiene una solución mejor que la encontrada hasta el momento, ésta podrá ser mejorada lo más pronto posible.

### B. Algoritmo Exploratorio

El algoritmo elegido es un algoritmo genético estacionario, SSGA, que hace uso del operador de cruce

$BLX-\alpha$  ( $\alpha = 0,5$ )[9]. Como mecanismo de selección de padres, se aplica el criterio *Negative Assortative Mating*, *NAM*. El primer padre es elegido de forma aleatoria de la población, y para calcular el segundo padre se seleccionan aleatoriamente  $N_{num}$  soluciones y se elige la solución más alejada al primer padre. Como mecanismo de reemplazo se elige el *Replacement Worst*, en el que el nuevo individuo reemplaza al peor individuo de la población, si lo mejora. Se ha demostrado que esta combinación de selección y reemplazo permite un adecuado equilibrio entre exploración y explotación [8]. La Figura 2 muestra el esquema del algoritmo.

1. Generar la población totalmente aleatoria.
2. Seleccionar dos padres  $I_{P_1}$  y  $I_{P_2}$  mediante la selección *NAM*.
3. Combinar padres  $I_{P_1}$  y  $I_{P_2}$  mediante el operador de cruce  $BLX - 0,5$ , generando el hijo  $I_{off}$ .
4. Aplicar mutación BGA a  $I_{off}$  con una probabilidad  $p_{mut}$  ( $p_{mut} = 12\%$ ) de los nuevos individuos.
5.  $I_{off}$  reemplaza al peor individuo de la población  $I_{worst}$  si  $fitness(I_{off}) < fitness(I_{worst})$ .
6. Si el criterio de parada no se cumple volver al paso 2.

Fig. 2. Esquema del SSGA

### C. Algoritmo CMA-ES como método de BL

Como método de BL intenso se utiliza el algoritmo CMA-ES [10]. Este algoritmo es el *estado del arte* en optimización continua, obteniendo muy buenos resultados al realizar una convergencia muy rápida, gracias a un buen comportamiento adaptativo de sus parámetros.

## III. MA-LSCH-CMA BASADO EN REGIONES

En este trabajo presentamos el algoritmo *MA-LSCh-CMA Basado en Regiones*, RMA-LSCh-CMA, basado en la idea de dividir el espacio de búsqueda en hipercubos de igual tamaño  $n$  denominadas regiones, y asegurarse que en la población pueda existir únicamente una solución en cada región. Contrariamente a las estrategias de nichos, en donde los nichos son definidos alrededor de las soluciones actuales, en nuestro modelo los nichos resultan de una división predefinida del espacio de búsqueda.

### A. AG basado en regiones

Para garantizar que sólo pueda existir una solución dentro del espacio de búsqueda, el AG anterior indicado en la Figura 2 es modificado introduciendo dicha comprobación. La Figura 3 muestra el algoritmo modificado.

1. Generar la población totalmente aleatoria.
2. Seleccionar dos padres  $I_{P_1}$  y  $I_{P_2}$  mediante la selección *NAM*.
3. Combinar padres  $I_{P_1}$  y  $I_{P_2}$  mediante el operador de cruce *BLX* – 0,5, generando el hijo  $I_{off}$ .
4. Aplicar mutación *BGA* a  $I_{off}$  con una probabilidad  $p_{mut}$  ( $p_{mut} = 12\%$ ) de los nuevos individuos.
5. Si  $I_{off}$  cae dentro de una región conteniendo un individuo  $I_{region}$ 
  - a) Si  $I_{region}$  es considerado optimizado entonces mutar  $I_{off}$  y volver a comprobar (paso 5).
  - b) Si no, actualizar  $I_{region}$  por  $I_{off}$  si  $fitness(I_{off}) < fitness(I_{region})$ .
6.  $I_{off}$  reemplaza al peor individuo de la población  $I_{worst}$  si  $fitness(I_{off}) < fitness(I_{worst})$ .
7. Si el criterio de parada no se cumple volver al paso 2.

Fig. 3. Esquema del SSGA basado en regiones

Un aspecto clave en toda estrategia de nichos es decidir qué hacer con las soluciones generadas en el área de exclusión de otra solución (Paso 5). En nuestra propuesta, se aplica el siguiente criterio:

1. Si a la solución ya existente se le aplicó previamente la BL y no mejoró (o su mejora fue inferior a  $10^{-8}$ ), se considera que la solución es un óptimo local. En este caso, consideramos que la solución es suficientemente representativa de la región, y mutamos la nueva solución hasta que caiga en una región *no ocupada* (no haya otra solución).
2. Si la solución existente no se considera un óptimo local, se evalúa la nueva solución, y reemplaza la solución previa si la mejora.

### B. Aplicación de la BL con regiones

La división del espacio de búsqueda en regiones también afecta a la aplicación de la BL.

#### B.1 Inicialización de parámetros de la BL

Para enfatizar la exploración dentro de cada una de las regiones, hemos modificado la estrategia de inicialización de parámetros de la BL. En el MA-LSCh-CMA, el tamaño de salto inicial del CMA-ES se fijaba en función del vecindario de la solución, con la idea de que el CMA-ES explorase el área entre las soluciones. En este algoritmo el tamaño de salto inicial se fija en función del tamaño de la región,  $Salto\ inicial = (Tamaño\ de\ la\ Región)/2$ , para fomentar que la BL explore dentro de la región, ya que esta tarea no será realizada por el SSGA.

#### B.2 Resultado de la BL

Además de modificar el algoritmo exploratorio, es necesario comprobar que el resultado de la BL no

esté en una región ocupada. En ese caso, se mantiene la mejor solución, y la otra se reemplaza por una nueva solución aleatoria (para mantener el tamaño de la población).

## IV. ESTUDIO EXPERIMENTAL

En este apartado vamos a presentar un conjunto de experimentos que nos permita estudiar el comportamiento y rendimiento de nuestra propuesta. Para realizar el estudio experimental hemos usado las funciones recomendadas en la Sesión Especial de Optimización Real del 2005 IEEE Congress of Evolutionary Computation (CEC'2005 en lo sucesivo) [11]. Este *benchmark* se está estableciendo como una referencia en optimización continua, y permite comparar los resultados con los resultados de otros algoritmos usando los algoritmos propuestos. Cada ejecución termina en cuanto se alcanza un número máximo de evaluaciones, igual a  $10000 \cdot D$ , en donde  $D$  es la dimensión. Cada función es ejecutado para distintos valores de dimensión: 10, 30 y 50. Cada algoritmo es ejecutado 25 veces, y se calcula el error medio de las 25 ejecuciones. Dicho valor medio es el valor utilizado en las comparaciones. En [11] se puede obtener una descripción detallada de las distintas funciones.

En las comparativas hemos hecho uso de los métodos de comparación no paramétricos detallados en [12] ya que, como se muestra en [13], para las funciones de tests consideradas, no pueden emplearse las funciones paramétricas (t-test, ...) al no cumplir las condiciones requeridas para tal test. Puede consultarse los trabajos anteriores para obtener mayor información.

### A. Parámetros de la experimentación

Los parámetros utilizados por el RMA-LSCh-CMA son en su mayoría los indicados por los autores en la versión original del MA-LSCh-CMA [7], indicados en la Tabla I. Se han usado estos valores ya que serían siendo los más adecuados de otros valores probados, y para facilitar la comparativa con el modelo MA-LSCh-CMA original.

Parámetro	Valor
Popsiz	80
$N_{NAM}$	3
$P_{mutacion}$	0.125
$I_{step}$	500
$Ratio_{BL}$	0.5

TABLA I  
PARÁMETROS DEL RMA-LSCh-CMA

### B. Estudio de tamaño de la región

Primero vamos a estudiar el grado de influencia del tamaño de la región. Dado que cada función tiene un dominio de búsqueda distinto, en vez de pre-

definir un tamaño por cada región se ha definido un número de regiones por dimensión, y el tamaño es el resultado de dividir ese espacio de búsqueda entre el número de regiones establecido.

Para probar la influencia del número de regiones, y por tanto, del tamaño de cada región, se han realizado los experimentos con un número de regiones por dimensión,  $NR$ , de 10, 50, y 100 (con lo que al ser hipercubos de dimensión  $D$  el número total de regiones sería  $10^D$ ,  $50^D$  y  $100^D$ , respectivamente).

Dimensión	valor-Iman-Davenport	p-value	¿Diferencia significativa?
10	0.3013	0.7412	No
30	4.5578	0.0154	Sí
50	0.8434	0.4404	No

TABLA II

RESULTADOS DEL TEST DE IMAN-DAVENPORT PARA CADA VALOR DE DIMENSIÓN

En primer lugar, hemos aplicado el test de Iman-Davenport para comprobar si existe alguna diferencia estadísticamente significativa al comparar los resultados del algoritmo aplicando un distinto número de regiones. La Tabla II muestra que únicamente para dimensión 30 el algoritmo detecta una diferencia significativa, ya que p-value implica un margen de error inferior a un 5%, en concreto de un 1.54%. Por tanto, aplicamos el test de Holm para identificar para esa dimensión qué número de regiones ofrece resultados significativamente mejores. La Tabla III muestra el resultado.

$NR$	$z = (R_0 - R_i)/SE$	$p$	Holm/Hochberg
10	2.545584	0.0109095	0.025
100	0.212132	0.8320040	0.05

TABLA III

TABLA DE HOLM / HOCHBERG PARA  $\alpha = 0,05$ , RESPECTO A  $NR = 50$

De los resultados anteriores se puede observar que los resultados obtenidos son similares para los distintos valores de  $NR$ , excepto para dimensión 30, en donde con  $NR = 50$  se obtienen mejores resultados que con  $NR = 10$ . Por tanto, se observa que los resultados no son muy sensibles a dicho parámetro, aunque podría ser recomendable un mayor valor cuando mayor sea la dimensión (algo esperable). En los siguientes apartados aplicamos  $NR = 50$ , ya que es el valor con el que se obtienen los mejores resultados.

### C. Estudio de la diversidad

Para mostrar que el algoritmo efectivamente hace lo que se espera hemos evaluado cómo evoluciona la diversidad entre la población durante la ejecución del algoritmo. Para ello, hemos usado como medida de diversidad la distancia media entre los individuos y el punto medio de la población, definida como

$$diversity(P) = \frac{1}{|L| \cdot |P|} \cdot \sum_{i=1}^{|P|} \sqrt{\sum_{j=1}^N (s_{ij} - \bar{s}_j)^2}$$

en donde  $|L|$  es la longitud de la diagonal en el espacio de búsqueda  $S \subseteq \mathbb{R}^N$ ,  $P$  es la población,  $|P|$  es el tamaño de la población,  $N$  la dimensión del problema,  $s_{ij}$  es el valor  $j$ -ésimo del individuo  $i$ , y  $\bar{s}_j$  es el valor  $j$ -ésimo del punto medio de la población  $\bar{s}$ .

Para medir la evolución de dicha medida, se ha calculado tras cada ejecución del EA y de la BL la medida de diversidad anterior, y se ha representado la media de 5 ejecuciones. La Figura 4 muestra el resultado para distintas funciones:  $f_{11}$ ,  $f_{14}$ ,  $f_{19}$  y  $f_{21}$ . Se puede observar que, a diferencia de MALSch-CMA, se mantiene un cierto nivel de diversidad, mayor cuanto menor es el número de regiones y, por tanto, mayor es su tamaño.

### D. RMA-LSCh-CMA vs MA-LSCh-CMA

En esta sección comparamos con el MA-LSCh-CMA propuesto en [7]. Para compararlos, hemos probado el test de Wilcoxon con un p-value de 0.05, cuyo resultado se muestra en la Tabla IV.

Dim	MA-LSCh-CMA	RMA-LSCh-CMA	Valor Crítico	¿Diferencia Significativa?
10	99.0	226.0	89(100)	Sí
30	112.0	213.0	89(100)	No
50	87.5	237.5	89(100)	Sí

TABLA IV

RMA-LSCH-CMA VS MA-LSCH-CMA, APLICANDO WILCOXON CON  $p - value = 0.05$  (Y 0.10)

De la Tabla IV se observa que el nuevo algoritmo es mejor en todos los casos, y es significativamente mejor con dimensión 50, lo cual es especialmente interesante ya que es donde existe mayor dificultad de optimización.

### E. RMA-LSCh-CMA vs IPOP-CMAES

En este apartado comparamos con el IPOP-CMAES [14], que es el algoritmo que obtuvo los mejores resultados de la competición del CEC'2005.

La Tabla V muestra el resultado de comparar aplicando el test de Wilcoxon. En dicha tabla se puede observar que, aunque peor en dimensión 10, es equivalente para dimensión 30, y mejor para dimensión 50.

Dim	IPOP-CMAES	RMA-LSCh-CMA	Valor Crítico	¿Diferencia Significativa?
10	255.5	69.5	89(100)	Sí
30	172.0	153.0	89(100)	No
50	140.5	184.5	89(100)	No

TABLA V

RMA-LSCH-CMA VS IPOP-CMAES, APLICANDO WILCOXON CON  $p - value = 0.05$  (Y 0.10)

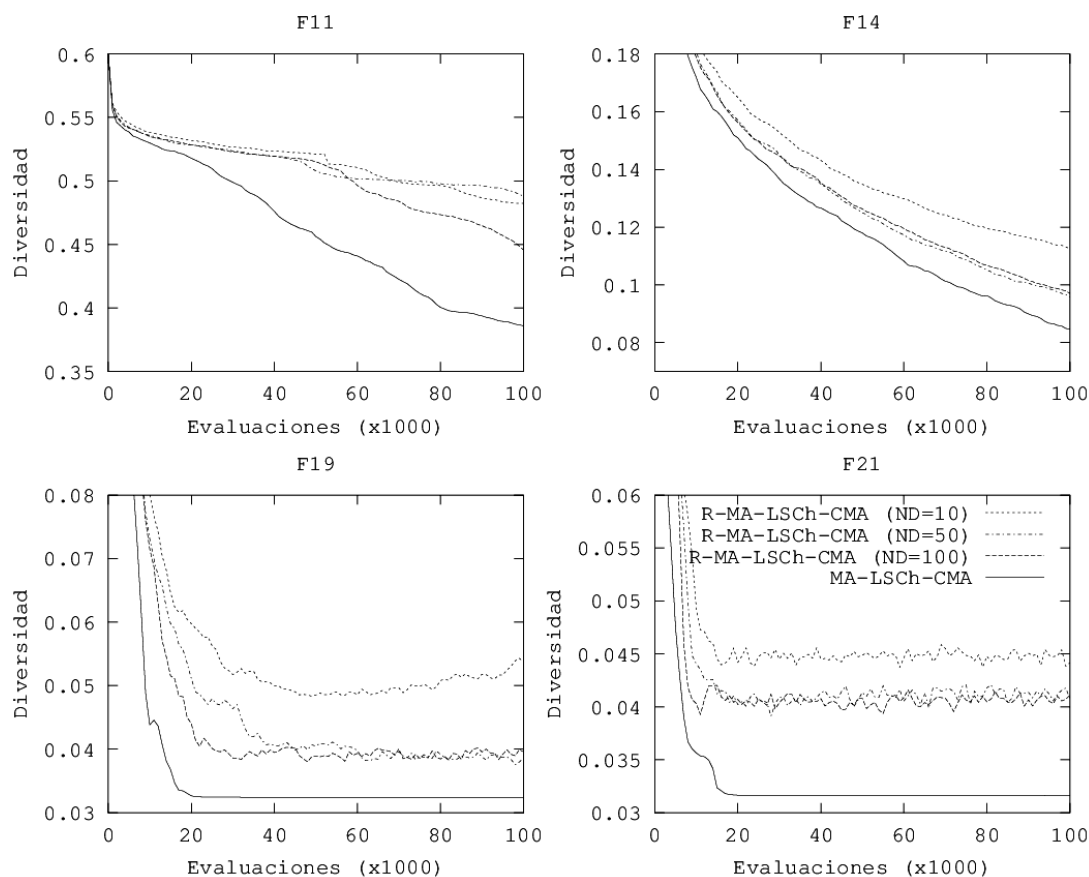


Fig. 4. Evaluación de diversidad para distintas funciones

## V. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

Este trabajo presenta un AM, RMA-LSCh-CMA, que utiliza un modelo de hibridación que combina como BL un algoritmo con un gran poder de explotación de las soluciones, como el CMA-ES, junto con un AE que explora el espacio de búsqueda. Este algoritmo utiliza una técnica de nichos para garantizar que el AE se centra en explorar y no intente explotar el espacio cercano a las soluciones, tarea ya realizada por la BL. Dicha técnica se caracteriza en que se divide el espacio de búsqueda en hipercubos de igual tamaño, denominados regiones, y se garantiza que en cada región sólo una solución puede estar situada dentro de la misma. Hemos experimentado nuestro algoritmo con el conjunto de funciones de prueba propuesto en CEC'2005, obteniendo distintas conclusiones. Primero, que aunque los resultados dependen del número y tamaño de regiones, no es excesivamente sensible a dicho parámetro. También hemos comprobado que el modelo de regiones mejora estadísticamente al original MA-LSCh-Chains. Finalmente, hemos comparado con el algoritmo IPOPCMAES mostrándose estadísticamente comparable (aunque mejor conforme mayor es la dimensión). Como trabajo futuro planteamos el estudio del algoritmo para problemas con mayor dimensionalidad.

## VI. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue financiado por los proyectos de investigación TIN2008-05854 y P08-TIC-4173.

## REFERENCIAS

- [1] L Davis, *Handbook of Genetic Algorithms*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1991.
- [2] W Banzhaf Et al., Ed., *Optimizing global-local search hybrids*. Morgan Kaufmann, San Mateo, California, 1999.
- [3] P Moscato, "On Evolution, Search, Optimization, Genetic Algorithms and Martial Arts: Toward Memetic Algorithms," Tech. Rep., 1989.
- [4] P A Moscato, *Memetic algorithms: a short introduction*, pp. 219–234, McGraw-Hill, London, 1999.
- [5] P Merz, *Memetic Algorithms for Combinatorial Optimization Problems: Fitness Landscapes and Effective Search Strategies*, Ph.D. thesis, Gesamthochschule Siegen, University of Siegen, Germany, 2000.
- [6] W E Hart, *Adaptive Global Optimization With Local Search*, Ph.D. thesis, Univ. California, San Diego, CA., 1994.
- [7] Daniel Molina, Manuel Lozano, Carlos García-Martínez, and Francisco Herrera, "Memetic Algorithms for Continuous Optimisation Based on Local Search Chains," *Evolutionary Computation*, vol. 18, no. 1, pp. 27–63, Jan. 2010.
- [8] D Whitley, "The GENITOR Algorithm and Selection Pressure: Why Rank-Based Allocation of Reproductive Trials is Best," *Proc. of the Third Int. Conf. on Genetic Algorithms*, pp. 116–121, 1989.
- [9] L.J. Eshelman and J. D. Schaffer, "Real-coded Genetic Algorithms in Genetic Algorithms by Preventing Incest," *Foundation of Genetic Algorithms 2*, pp. 187–202, 1993.
- [10] N Hansen, S D Müller, and P Koumoutsakos, "Reducing

the Time Complexity of the Derandomized Evolution Strategy with Covariance Matrix Adaptation (CMA-ES),” *Evolutionary Computation*, vol. 1, no. 11, pp. 1–18, 2003.

- [11] P N Suganthan, N Hansen, J J Liang, K Deb, Y P Chen, A Auger, and S Tiwari, “Problem Definitions and Evaluation Criteria for the CEC 2005 Special Session on Real-Parameter Optimization,” Tech. Rep.
- [12] Joaquín Derrac, Salvador García, Daniel Molina, and Francisco Herrera, “A practical tutorial on the use of nonparametric statistical tests as a methodology for comparing evolutionary and swarm intelligence algorithms,” *Swarm and Evolutionary Computation*, vol. 1, no. 1, pp. 3–18, 2011.
- [13] S García, D Molina, M Lozano, and F Herrera, “A Study on the Use of Non-Parametric Tests for Analyzing the Evolutionary Algorithms’ Behaviour: A Case Study on the CEC’2005 Special Session on Real Parameter Optimization,” *Journal of Heuristics*, vol. 15, pp. 617–644, 2009.
- [14] A Auger and N Hansen, “A Restart {CMA} Evolution Strategy with Increasing Population Size,” in *2005 IEEE Congress on Evolutionary Computation*, 2005, pp. 1769–1776.

## VII. APÉNDICE

Las Tablas VI, VII y VIII contiene los resultados del algoritmo RMA-LSCh-CMA para cada  $NR$  por dimensión. Se incluye para permitir a otros autores comparar otros algoritmos con él.

$F/NR$	10	50	100
$F_1$	<b>1.00E-08</b>	<b>1.00E-08</b>	<b>1.00E-08</b>
$F_2$	<b>1.00E-08</b>	<b>1.00E-08</b>	<b>1.00E-08</b>
$F_3$	<b>1.00E-08</b>	<b>1.00E-08</b>	<b>1.00E-08</b>
$F_4$	<b>1.00E-08</b>	<b>1.00E-08</b>	<b>1.00E-08</b>
$F_5$	<b>1.00E-08</b>	<b>1.00E-08</b>	<b>1.00E-08</b>
$F_6$	<b>1.00E-08</b>	5.68E-03	1.68E-03
$F_7$	<b>1.00E-08</b>	<b>1.00E-08</b>	<b>1.00E-08</b>
$F_8$	<b>2.04E+01</b>	<b>2.04E+01</b>	<b>2.04E+01</b>
$F_9$	8.15E-01	7.96E-02	<b>1.00E-08</b>
$F_{10}$	4.18E+00	2.35E+00	<b>1.83E+00</b>
$F_{11}$	<b>3.32E-01</b>	1.29E+00	1.64E+00
$F_{12}$	1.47E+02	<b>1.22E+02</b>	2.19E+02
$F_{13}$	6.29E-01	5.69E-01	<b>4.78E-01</b>
$F_{14}$	2.84E+00	2.52E+00	<b>2.15E+00</b>
$F_{15}$	<b>2.13E+02</b>	2.67E+02	2.72E+02
$F_{16}$	<b>8.43E+01</b>	9.09E+01	9.02E+01
$F_{17}$	9.72E+01	9.34E+01	<b>9.28E+01</b>
$F_{18}$	<b>7.79E+02</b>	8.47E+02	8.57E+02
$F_{19}$	<b>7.63E+02</b>	8.03E+02	8.60E+02
$F_{20}$	<b>7.51E+02</b>	8.21E+02	8.36E+02
$F_{21}$	<b>7.47E+02</b>	7.70E+02	7.70E+02
$F_{22}$	7.42E+02	7.35E+02	<b>7.30E+02</b>
$F_{23}$	<b>9.31E+02</b>	9.47E+02	9.35E+02
$F_{24}$	<b>2.36E+02</b>	2.12E+02	2.76E+02
$F_{25}$	4.10E+02	<b>4.06E+02</b>	4.40E+02

TABLA VI

RESULTADOS DE RMA-LSCh-CMA, DIMENSIÓN 10

$F/NR$	10	50	100
$F_1$	<b>1.00E-08</b>	<b>1.00E-08</b>	<b>1.00E-08</b>
$F_2$	<b>1.00E-08</b>	<b>1.00E-08</b>	<b>1.00E-08</b>
$F_3$	<b>1.00E-08</b>	1.06E-08	<b>1.00E-08</b>
$F_4$	2.43E+01	4.02E-01	2.98E-01
$F_5$	9.27E+01	3.77E+01	5.70E+00
$F_6$	2.83E+01	1.49E+01	1.57E+01
$F_7$	6.90E-04	<b>1.00E-08</b>	<b>1.00E-08</b>
$F_8$	2.10E+01	2.09E+01	2.09E+01
$F_9$	6.70E+00	2.73E-02	5.69E-04
$F_{10}$	2.46E+1	1.79E+1	<b>1.71E+1</b>
$F_{11}$	<b>4.04E+00</b>	1.24E+01	1.60E+01
$F_{12}$	1.88E+03	1.64E+03	2.26E+03
$F_{13}$	3.46E+00	2.50E+00	<b>2.17E+00</b>
$F_{14}$	1.28E+01	1.26E+01	1.27E+01
$F_{15}$	3.32E+02	3.15E+02	3.14E+02
$F_{16}$	9.69E+01	8.57E+01	<b>7.55E+01</b>
$F_{17}$	9.05E+01	<b>7.18E+01</b>	7.36E+01
$F_{18}$	9.07E+02	<b>9.02E+02</b>	9.02E+02
$F_{19}$	9.03E+02	9.02E+02	<b>9.02E+02</b>
$F_{20}$	<b>9.03E+02</b>	9.06E+02	9.06E+02
$F_{21}$	<b>5.00E+02</b>	<b>5.00E+02</b>	<b>5.00E+02</b>
$F_{22}$	8.95E+02	<b>8.67E+02</b>	8.76E+02
$F_{23}$	5.50E+02	<b>5.34E+02</b>	5.57E+02
$F_{24}$	<b>2.00E+02</b>	<b>2.00E+02</b>	<b>2.00E+02</b>
$F_{25}$	<b>2.10E+02</b>	2.11E+02	2.13E+02

TABLA VII

RESULTADOS DE RMA-LSCh-CMA, DIMENSIÓN 30

$F/NR$	10	50	100
$F_1$	<b>1.00E-08</b>	<b>1.00E-08</b>	<b>1.00E-08</b>
$F_2$	<b>1.00E-08</b>	1.01E-08	1.03E-08
$F_3$	<b>1.00E-08</b>	1.05E-08	<b>1.00E-08</b>
$F_4$	3.82E+03	<b>1.06E+03</b>	1.83E+03
$F_5$	2.22E+03	1.82E+03	<b>1.70E+03</b>
$F_6$	1.87E+01	<b>9.48E+00</b>	3.79E+01
$F_7$	<b>1.00E-08</b>	1.08E-03	<b>1.00E-08</b>
$F_8$	<b>2.11E+01</b>	<b>2.11E+01</b>	<b>2.11E+01</b>
$F_9$	5.69E-01	2.19E-02	<b>1.00E-03</b>
$F_{10}$	6.60E+01	<b>3.63E+01</b>	3.81E+01
$F_{11}$	<b>1.11E+01</b>	2.61E+01	3.27E+01
$F_{12}$	1.47E+04	<b>1.03E+04</b>	1.18E+04
$F_{13}$	6.00E+00	4.52E+00	<b>4.06E+00</b>
$F_{14}$	2.26E+01	2.23E+01	<b>2.21E+01</b>
$F_{15}$	3.13E+02	3.57E+02	<b>3.01E+02</b>
$F_{16}$	5.89E+01	7.12E+01	<b>5.33E+01</b>
$F_{17}$	9.59E+01	8.47E+01	<b>5.92E+01</b>
$F_{18}$	<b>8.72E+02</b>	8.97E+02	9.21E+02
$F_{19}$	<b>8.21E+02</b>	9.21E+02	9.20E+02
$F_{20}$	8.97E+02	<b>8.93E+02</b>	9.21E+02
$F_{21}$	5.24E+02	5.12E+02	<b>5.00E+02</b>
$F_{22}$	9.41E+02	9.35E+02	<b>9.12E+02</b>
$F_{23}$	5.67E+02	<b>5.39E+02</b>	5.53E+02
$F_{24}$	<b>2.00E+02</b>	<b>2.00E+02</b>	<b>2.00E+02</b>
$F_{25}$	<b>2.14E+02</b>	2.15E+02	2.19E+02

TABLA VIII

RESULTADOS DE RMA-LSCh-CMA, DIMENSIÓN 50