

# Doble modelo de fuerzas gravitacionales para procesamiento de imagen

Cedric Marco-Detchart

*Estadística, Informática y Matemáticas*  
Universidad Pública de Navarra  
Pamplona, Spain  
cedric.marco@unavarra.com

Javier Fernandez

*Estadística, Informática y Matemáticas*  
Universidad Pública de Navarra  
Pamplona, Spain  
fcojavier.fernandez@unavarra.com

Humberto Bustince

*Estadística, Informática y Matemáticas*  
Universidad Pública de Navarra  
Pamplona, Spain  
bustince@unavarra.com

**Abstract**—En este trabajo se presenta un nuevo método de procesamiento de imagen basado en el movimiento de partículas debido a las fuerzas de atracción gravitacionales. Describimos el modelo de fuerzas gravitacionales como un método iterativo y estudiamos el efecto de sus diferentes parámetros. Probamos sus utilidad sobre dos aplicaciones clásicas de procesamiento de imagen, como son el suavizado y la segmentación. Realizamos la experimentación y el análisis de los resultados sobre imágenes en color.

**Index Terms**—fuerza gravitacional, suavizado, segmentación, representación jerárquica

## I. INTRODUCCIÓN

Las técnicas para abordar problemas en temas de inteligencia artificial se han inspirado considerablemente de la naturaleza. Un ejemplo clásico es el análisis de las conexiones neuronales de nuestro cerebro que ha desembocado en la teoría de las redes neuronales artificiales, cuyo estudio está actualmente en auge, por ejemplo, en problemas de clasificación [1]. Otra fuente de inspiración natural proviene de la teoría de la evolución, que ha contribuido a generar herramientas para la resolución de problemas de optimización y búsqueda de parámetros específicos en determinados problemas. Un buen ejemplo son los algoritmos genéticos, cuyo funcionamiento consiste en tomar una población de posible soluciones y hacerla evolucionar hasta llegar a una solución con el menor error posible [2]. En cuanto a la inspiración proveniente del comportamiento animal, contamos con numerosos ejemplos, como pueden ser las representaciones basadas en el funcionamiento de los enjambres [3] o las colonias de hormigas [4].

Estrechamente relacionado con el mundo natural y su comportamiento, encontramos la teoría física de la Ley de Gravitación Universal (LUG) [5], que ha servido de base para muchos investigadores a la hora de generar modelos basados en las fuerzas gravitacionales. Su objetivo es aplicar un modelo físico del mundo real a un problema matemático. Estos modelos centran su atención principalmente en temas como el clustering o los problemas de optimización.

El clustering gravitacional, presentado por Wright [6], considera los datos a procesar como partículas en un sistema, con una posición inicial y una masa, que se mueven debido a las fuerzas que ejercen entre ellas. El movimiento del sistema cesa cuando solamente queda una partícula que representa el

total de los elementos. En esta misma temática una propuesta similar fue presentada por Gomez *et al.* [7] donde se describe un sistema gravitacional más elaborado. En dicho sistema se incluyen conceptos como la aceleración o la velocidad de las partículas. En cuanto a los problemas de optimización, Rashedi *et al.* presentaron el algoritmo de búsqueda gravitacional [8] que condidera la ley de gravitación y la masa de las partículas para construir un sistema multi-agente para la búsqueda de la mejor solución a un problema dado.

Respecto al procesamiento de imagen, encontramos una técnica interesante aplicada a detección de bordes presentada en [9] que considera los píxeles de una imagen como partículas y utiliza las fuerzas gravitacionales para detectar cambios de intensidad en la imagen.

Nuestro objetivo con este trabajo es aunar las propuestas presentadas en el clustering gravitacional de Wright y el detector de bordes gravitacional, aplicando un modelo de fuerzas gravitacionales para regularización de imagen y segmentación.

La aplicación que se presenta en este trabajo utiliza nuestra propuesta de manera doble. Por un lado, para obtener una imagen suavizada medimos la fuerza que ejercen cada uno de los píxeles de la imagen entre ellos. Esta fuerza representa el movimiento que se realiza en el espacio de color de manera que se vayan obteniendo regiones planas con colores homogéneos. Por otro lado, extraemos superpíxeles [10] a partir de las imágenes suavizadas y los combinamos aplicando nuestra propuesta de fuerzas gravitacionales, consiguiendo una representación jerárquica de la imagen. Dicha representación permite obtener los diferentes niveles de detalle de los objetos presentes en la imagen.

La estructura de este trabajo consta de las siguientes partes. En la Sección II exponemos algunos de los conceptos utilizados en el trabajo. La Sección III introduce el concepto de fuerza gravitacional y su aplicación al procesamiento de señal; concretamente en la Sección III-A se presenta la propuesta para suavizado de imagen y en la Sección III-B la referente a segmentación. Finalmente el estudio experimental se lleva a cabo en la Sección IV, presentando algunos resultados y conclusiones.



## II. PRELIMINARES

En esta sección recordamos algunos de los conceptos básicos relativos a procesamiento de imagen y teoría de fuerzas gravitacionales. En nuestra propuesta representamos una imagen como una función  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \mapsto L$ , donde  $D$  representa el dominio como el producto cartesiano de dos conjuntos discretos y  $L$  el posible conjunto de valores de cada elemento (píxel) de la imagen. En concreto,  $D = X \times Y = \{1, \dots, w\} \times \{1, \dots, h\}$ , donde  $w$  representa la anchura, es decir, el número de columnas de la imagen, y  $h$  la altura, es decir, el número de filas de la imagen.

La utilización de  $L$  nos permite representar diferentes tipos de imagen. En el caso de imágenes binarias los píxeles pueden tomar valores en  $L = \{0, 1\}$ , mientras que en el caso de imágenes en escala de grises lo hacen en  $L = \{0, \dots, 255\}$ , y para las imágenes en el espacio de color RGB el rango de posibles valores es  $L = \{0, \dots, 255\}^3$ . Existen otros espacios de color como CIELAB, donde el rango de valores no está tan bien definido como en RGB. CIELAB consta de tres componentes ( $L^*ab$ ), que representan la luminosidad ( $L^*$ ), el ángulo entre los colores verde y rojo ( $a$ ) y el ángulo entre el azul y el amarillo ( $b$ ). Representamos una imagen que toma valores en  $L$  como  $\mathbb{I}_L$ .

Este trabajo se ha llevado a cabo utilizando imágenes en el espacio de color RGB para el caso del proceso de regularización y en el espacio CIELAB para la parte de clustering.

La ley de gravitación universal establece que todo objeto es atraído por otro objeto con una fuerza directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional a la distancia que los separa. Podemos ver una representación esquemática ilustrando la fuerza entre dos partículas en la Figura 1. La fuerza existente entre dos partículas es un vector calculado mediante la Ecuación 1, donde  $i, j$  representan cada una de las partículas,  $m_i$  y  $m_j$  son sus masas y el vector  $\vec{r}$  es la distancia entre ellas. Habitualmente dicha distancia es la Euclídea.

$$\vec{f}_{ij} = G \cdot \frac{m_i \cdot m_j}{\|\vec{r}\|^2} \cdot \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} \quad (1)$$

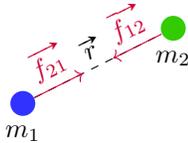


Fig. 1: Fuerza de atracción entre dos partículas

La fuerza total ejercida sobre una partícula es la suma de todas las fuerzas realizadas por el resto de partículas a su alrededor, tal como se indica en la siguiente expresión:

$$\|\vec{F}_i\| = \sum_{\substack{j \in N \\ i \neq j}} G \cdot \frac{m_i \cdot m_j}{\|\vec{r}\|^2} \cdot \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} \quad (2)$$

donde  $N$  representa todas las partículas del sistema.

## III. PROCESAMIENTO GRAVITACIONAL DE IMÁGENES

Desde la presentación del modelo gravitacional por parte de Wright para clustering de datos han surgido numerosas investigaciones inspiradas por este modelo. Algunas de las técnicas se han aplicado a procesamiento de imagen, en concreto al análisis de texturas [11] y a la detección de bordes [9]. Nuestra propuesta recoge la idea del modelo de Wright y aplica sus conceptos a la regularización de imágenes y a su segmentación de manera jerárquica.

### A. Regularización de imagen

La regularización de imágenes sustituyendo la información de sus píxeles por medio de una función dependiente de la información de los píxeles vecinos puede llevar a una pérdida de definición de la imagen. El efecto que se obtiene es una imagen borrosa, como puede ocurrir al aplicar la media o el filtro Gaussiano. Este comportamiento puede ser válido para eliminar el ruido existente en una imagen o reducir el efecto del muestreo, pero no es apto, por ejemplo, para detección de bordes o tratamiento de imágenes por satélite. En la literatura existente encontramos técnicas que consideran el caso particular de los bordes, donde la regularización de la imagen conserva su definición. Para poder llevar a cabo una regularización de la imagen preservando sus bordes, la influencia de la regularización se debe adaptar y cambiar según las condiciones de la información local.

Existe una gran variedad de técnicas que eliminan la información innecesaria a la par que conservan aquella relativa a los bordes. Entre estas técnicas contamos con el filtrado bilateral [12], donde los valores de cada píxel son el resultado de una media ponderada dependiente de la información espacial y tonal aplicados sobre una ventana de tamaño fijo. Otra de las técnicas en este ámbito es el conocido Mean Shift [13], donde la información considerada va más allá de una ventana fija, variando su tamaño según la información local.

Adoptando el proceso de tomar la información del vecindario de un píxel, en este trabajo, imitamos el movimiento generado por la influencia de fuerzas gravitacionales existentes entre los píxeles para modificar su valor. El modelo gravitacional establece que cada partícula ejerce una influencia sobre todas las demás; con una pequeña cantidad de partículas esta norma es admisible, pero en el caso de una imagen donde el número de píxeles es muy grande, calcular cada una de las fuerzas ejercidas entre cada par de píxeles se convierte en una tarea computacionalmente prohibitiva. Debido a que la fuerza gravitacional depende de la distancia, aquellas partículas que se encuentran lejos de la posición considerada tendrán menos influencia. Aprovechando este hecho, consideramos que todas las partículas que se encuentren más allá de una determinada distancia no ejercen ninguna influencia, es decir, su fuerza es cero. La región de influencia considerada alrededor de cada píxel se establece mediante una máscara circular. Cada posición de la máscara se utiliza para saber que píxeles están ejerciendo influencia sobre la posición central.

Uno de los elementos clave del cálculo de la fuerza total (Eq. 2) es la medida de distancia considerada entre dos partícu-

las. En nuestro modelo representamos las partículas mediante un vector  $n$ -dimensional. Por ejemplo, para una imagen RGB, el píxel de la posición  $p$  sería  $\mathbb{I}(p) = [x, y, r, g, b]$ . En el caso de imágenes en el espacio de color RGB combinamos la posición espacial del píxel con cada una de las componentes de color. Mientras que para los descriptores espaciales,  $[x, y]$ , no se conoce a priori su rango de valores ya que depende del tamaño de la imagen, para la información relativa al color,  $[r, g, b]$ , los posibles valores se encuentran en  $L$ . El principal problema existente con esta representación es la disimilitud entre los rangos de posibles valores de cada uno de los componentes.

Si consideramos el descriptor completo, es decir, los cinco componentes que representan la posición y la información relativa al color, puede darse una inconsistencia en el cálculo de la distancia. Además, si normalizamos los valores de la intensidad de color para llevarlos al rango  $[0, 1]$ , la diferencia de rango entre la información espacial y de color es todavía mayor. Hacer uso de la distancia Euclídea directamente con el vector 5-dimensional resultaría en una distancia influenciada principalmente por la información espacial.

Partiendo de la base de la distancia Euclídea, separamos su cálculo en una parte espacial y otra tonal. Así podemos añadir un peso al cálculo de la distancia que nos permite controlar la influencia de cada una de las partes. Con esta modificación el cálculo de la distancia se realiza mediante la siguiente expresión:

$$r_s = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$
$$r_c = \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + (g_1 - g_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$$
$$r = r_s + r_c \cdot \omega_c$$

El factor de influencia,  $\omega_c$ , nos permite controlar la importancia asignada o bien a la distancia espacial o a la distancia en color. Tal como se observa en la experimentación con este parámetro somos capaces además de controlar el nivel de borrosidad aplicado al final del proceso. Para poder obtener resultados admisibles un cuanto a suavizado sin perder definición de bordes, los experimentos realizados sugieren que el valor de  $\omega_c$  debe tomarse en el rango  $[1, 100]$ .

En un primer paso, dada una máscara  $m$  de radio  $\tau = 7$  calculamos una imagen de fuerzas, representada como  $\mathbb{I}_F$ . Cada una de las posiciones  $p$  de dicha imagen en cada uno de los canales (RGB) indica la fuerza total (Eq. 2) que actúa sobre esa posición. Esto significa que en cada posición tenemos el valor de intensidad que debe variar el píxel de esa posición. La fuerza que se ejerce sobre cada una de las partículas se calcula considerando que su masa es igual a uno, ya que cada partícula representa un píxel.

El principal problema que surge con el cálculo de la fuerza es que el valor final de la información de color se mantenga en el rango  $L$ . Si la fuerza obtenida es demasiado fuerte, el resultado de aplicarla sobre la intensidad de color actual del píxel correspondiente puede resultar en un valor fuera de rango y perder sentido. La solución aportada es hacer uso de la constante gravitacional  $G$  presente en la Ecuación 1. Esta constante nos permite adaptar la fuerza final y hacer que tenga

mayor o menor influencia. En este sentido, tomar valores de  $G$  altos hace que las partículas del sistema gravitacional varíen con mayor intensidad de manera que se obtiene una imagen suavizada en un menor lapso de tiempo. Por el contrario, con valores bajos de  $G$  la variación será menor y el resultado final del suavizado tardará más tiempo.

Entre el número de iteraciones máximo y los dos parámetros,  $\omega_c$  y  $G$ , de nuestro modelo tenemos un amplio rango de posibilidades para poder controlar el nivel de suavizado de las imágenes. En el caso de  $G$  elegimos valores comprendidos entre  $(0, 0.1]$ . Además, debido a que estamos imitando un sistema gravitacional, la variación de intensidad debe ser baja para representar el movimiento constante de las partículas. Si  $G \approx 0$ , la fuerza ejercida sobre cada píxel será casi imperceptible, mientras que si tomamos  $G = 0.1$  la intensidad de los píxeles variarán en un orden máximo de  $10^{-3}$ . Estos órdenes son consecuentes con el factor de color aplicado en el cálculo de la distancia. Una vez calculada la fuerza total sobre cada posición se aplica sobre la imagen de manera iterativa:

$$\mathbb{I}_L(p)_{t+1} = \mathbb{I}_L(p)_t + \mathbb{I}_F(p)_t \quad (3)$$

Para el cálculo de los nuevos valores en cada una de las posiciones de la imagen suavizada solamente consideramos la fuerza ejercida sobre la información relativa a la intensidad de color. De este modo mantenemos la estructura matricial de los píxeles y obtenemos una imagen regularizada en el espacio de color.

### B. Segmentación de imagen

La segmentación de imagen es una de las tareas más importantes en visión por computador. Es una de las tareas más complejas que ha sido y sigue siendo estudiada en profundidad [14]. El principal reto de la segmentación de imagen radica en el hecho de que no existe una única solución. Incluso para el caso de los seres humanos, que son capaces de identificar rápidamente objetos en una imagen, la definición de un objeto o de sus partes puede ser múltiple y no presentar una forma clara. Esta problemática puede verse reflejada en las imágenes proporcionadas por los expertos del conjunto de datos de Berkeley Segmentation Dataset (BSDS) [15], donde cada imagen cuenta con hasta cinco posibles soluciones propuestas por seres humanos. En este sentido, aunque las personas son capaces de percibir muchos patrones y asociarlos con objetos, el hecho de definir una partición de una imagen es una tarea compleja.

Además, no todos los objetos de una imagen tienen la misma importancia, se deben tener en cuenta los diferentes niveles de detalle que pueden existir. Los estudios llevados a cabo sobre la percepción humana establecen que las personas son capaces de definir objetos a diferentes niveles de detalle [16], asociando partes de la imagen a través de propiedades que las caracterizan, como por ejemplo, el color o la forma. Para poder gestionar los diferentes niveles de detalle en imágenes, e imitar la percepción humana, los investigadores



se han centrado en la segmentación jerárquica o la fusión de regiones [17]. Los diferentes niveles de una jerarquía se pueden representar mediante lo que se conoce como un mapa de contornos ultra métrico (UCM) [18],

En nuestra propuesta generamos una partición inicial de la imagen formada por regiones primarias conocidas como superpíxeles. Esta imagen es una sobre-segmentación, lo que significa que hay más particiones que objetos reales en la imagen. Generamos los superpíxeles iniciales mediante la aplicación de la transformada watershed [19] sobre una imagen de magnitud de gradiente de una imagen pre-procesada con el algoritmo de suavizado gravitacional. Para limitar el número de superpíxeles extraídos eliminamos todos aquellos valores de la magnitud del gradiente que se encuentran por debajo de la mediana de todos los mínimos regionales [20]. A partir de los superpíxeles iniciales, los vamos fusionando de manera progresiva hasta que únicamente quede uno solo, que representa el contenido de toda la imagen.

Contrariamente al proceso de suavizado, cuando trabajamos con superpíxeles, la masa de cada partícula depende del tamaño del superpíxel, es decir, del número de píxeles que contiene esa región. Para ajustar los valores de las masas a un espacio más reducido les aplicamos una escala logarítmica. Además, la distancia que utilizamos en esta fase de agrupación de regiones varía con respecto a la sección anterior; en este caso no medimos la distancia entre elementos individuales. El cálculo de la distancia del color permanece intacta, medida en este caso entre el color medio de los superpíxeles, mientras que la distancia espacial se realiza utilizando la siguiente expresión:

$$D_s = 1 + d\{A, B\}$$

donde  $d$  es la mínima distancia Euclídea entre los superpíxeles  $A$  y  $B$ ; obtenemos así la distancia entre la pareja de píxeles más cercanos de las dos regiones. Posteriormente combinamos la distancia entre la información del color y la espacial mediante el factor  $\omega_c$ .

#### IV. ESTUDIO EXPERIMENTAL

El algoritmo gravitacional propuesto en este trabajo en la Sección III se ilustra a través del siguiente experimento, aplicado a suavizado y segmentación de imagen.

Por un lado, examinamos la influencia que el número de iteraciones y el parámetro  $\omega_c$  tienen sobre el suavizado gravitacional. Por otro lado, dadas las diferentes imágenes suavizadas evaluamos como afecta el suavizado en el proceso de segmentación y fusión jerárquica. Evaluamos el algoritmo propuesto con un máximo de 300 iteraciones y tomando una serie de instantáneas cada cierto instante de tiempo  $t = \{10, 40, 80, 100, 140, 220, 260, 300\}$ . En el caso del proceso de segmentación utilizamos el operador de Canny [21] con  $\sigma = 2$  para obtener la magnitud del gradiente de la imagen. Con el resultado obtenido construimos un mapa de superpíxeles mediante la transformada watershed.

Para la realización de los experimentos hemos utilizado 200 imágenes del conjunto de datos de test del Berke-

ley Segmentation Dataset (BSDS500) [15]. Para cada UCM obtenida en cada instante de tiempo  $t$  aplicamos un umbral  $th = \{0.17, 0.33, 0.50, 0.67, 0.83\}$  para obtener una imagen de bordes binaria. Dicha imagen de bordes se evalúa como un proceso de correspondencia con las imágenes de los expertos proporcionadas por el conjunto de datos. Este proceso de correspondencia se lleva a cabo mediante la técnica presentada por Estrada y Jepson [22] calculando las siguientes medidas de precisión ( $Prec$ ) y exhaustividad ( $Rec$ ):

$$Prec = \frac{TP}{TP + FP}, \quad Rec = \frac{TP}{TP + FN},$$

$$F_\alpha = \frac{Prec \cdot Rec}{\alpha \cdot Prec + (1 - \alpha) \cdot Rec}.$$

Para el cálculo de  $F_\alpha$  utilizamos  $\alpha = 0.5$  tal como se indica en [23].

Como se muestra en la Figura 2 el paso del tiempo afecta el proceso de suavizado. A medida que las iteraciones van creciendo, van apareciendo zonas planas en aquellas regiones donde los colores son similares. Se preservan los bordes de los objetos hasta que las regiones son completamente homogéneas. Cuando una región acaba siendo totalmente plana, los diferentes colores cercanos comienzan a mezclarse resultando en un suavizado de los bordes y por consiguiente en una pérdida de definición de los mismos.

Podemos observar en la parte superior que con un valor bajo de  $\omega_c = 40$  el efecto borroso es más pronunciado. Si nos centramos en los dos peces cerca de los corales, podemos ver como la parte blanca de la aleta se va difuminando progresivamente hasta que acaba desapareciendo fusionándose con la parte más oscura del mar. En la parte inferior de la figura, los dos peces permanecen bien definidos a lo largo de todo el proceso iterativo, conservando sus bordes.

La influencia del proceso de suavizado se puede observar claramente en la Figura 3. La segmentación inicial contiene una menor cantidad de superpíxeles conforme el proceso de suavizado homogeneiza los colores de la imagen. Esta reducción en el número de superpíxeles inicial tiene un efecto directo en la construcción de la jerarquía ya que las pequeñas regiones aisladas desaparecen, quedando absorbidas por regiones contiguas al inicio del proceso.

En cuanto a la evaluación cuantitativa, en la Figura 4, observamos como el efecto de suavizado generado por el valor bajo de  $\omega_c = 40$  (Figure 4a), afecta significativamente al proceso de segmentación. En las iteraciones iniciales, hasta  $t = 80$ , el valor de  $F_{0.5}$  se mantiene estable en todos los umbrales aplicados. Por un lado, observamos como en las iteraciones iniciales los mejores valores se obtienen con el segundo umbral. Esto indica que con un menor número de iteraciones necesitamos un umbral mayor para eliminar las regiones de menor tamaño que no son aptas para definir los contornos de la imagen. Por otro lado, en las iteraciones finales obtenemos el valor  $F_{0.5}$  más alto con el menor umbral. Esto significa que el efecto de suavizado ha provocado borrosidad y los diferentes colores se han fusionado por lo que la distancia entre superpíxeles es menor.



Fig. 2: Resultados obtenidos con la aplicación de nuestro algoritmo de suavizado gravitacional sobre la imagen 101027 del BSDS500 en diferentes instantes de tiempo. Utilizamos el factor de color  $\omega_c \in \{40, 70\}$ , la constante  $G = 0.05$  y ejecutamos el método con 300 iteraciones.



Fig. 3: Imágenes de superpíxeles obtenidas en diferentes tiempos  $t$  del suavizado gravitacional sobre la imagen 118035 del BSDS500. Utilizamos el factor de color  $\omega_c = 70$  y  $G = 0.05$ .

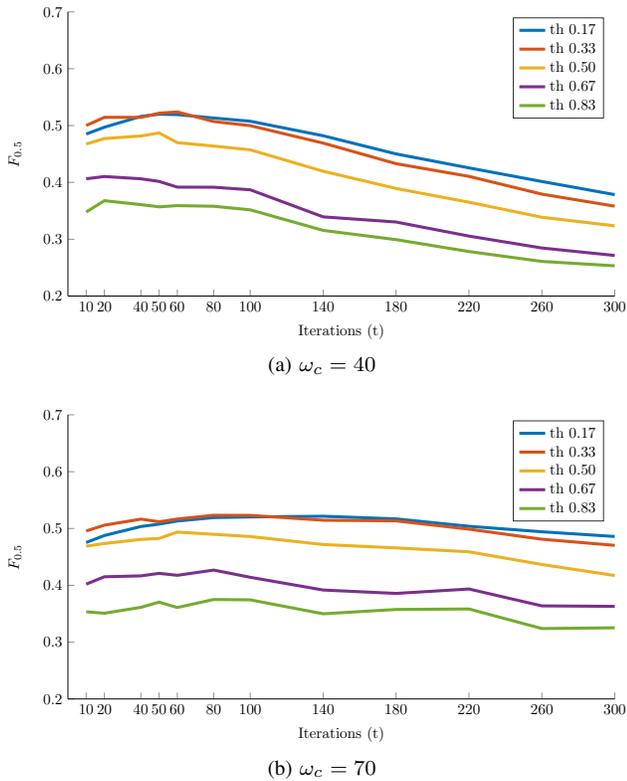


Fig. 4: Medida de  $F_{\alpha}$  sobre 300 iteraciones con  $G = 0.05$  aplicando diferentes umbrales sobre las imágenes UCM obtenidas en el proceso de segmentación jerárquica.

Al observar el proceso, pero con un valor de  $\omega_c = 70$  en la Figura 4b vemos como los valores de  $F_{0.5}$  se mantienen más estables a lo largo del proceso. Este comportamiento confirma el hecho de que el efecto de borrosidad es menos pronunciado y se conserva una buena definición de los bordes. El mejor resultado para este valor de  $\omega_c$  se obtiene en el punto intermedio del proceso, en la iteración  $t = 140$ . A partir de este punto los resultados comienzan a decaer, pero la disminución es menos pronunciada que en el caso de  $\omega_c = 40$ .

## V. CONCLUSIONES

Hemos presentado un nuevo método para obtener imágenes suavizadas, mediante un modelo físico basado en las fuerzas gravitacionales de atracción entre partículas. Hemos introducido los conceptos matemáticos necesarios para el uso del modelo expuesto en problemas relacionados con información proveniente de imágenes. Hemos presentado dos posibles aplicaciones de nuestro modelo junto con los resultados obtenidos, probando diferentes parámetros y demostrando su utilidad en el campo de la segmentación de imágenes. Como experimento inicial los resultados obtenidos son prometedores, pero debemos realizar más experimentos, con un estudio más profundo de los diferentes parámetros para confirmar los resultados presentados. Debemos estudiar otras medidas de distancia, así como poner a prueba nuestro método con otros conjuntos de datos y espacios de color.

## ACKNOWLEDGMENT

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el proyecto TIN2016-77356-P y por el Servicio de Investigación Universidad Pública de Navarra.

## REFERENCES

- [1] A. Krizhevsky, I. Sutskever, and G. E. Hinton, "ImageNet Classification with Deep Convolutional Neural Networks," *ImageNet Classif. with Deep Convolutional Neural Networks*, pp. 1097–1105, 2012.
- [2] J. Benediktsson and P. Swain, "Consensus theoretic classification methods," *IEEE Trans. Syst. Man. Cybern.*, vol. 22, no. 4, pp. 688–704, 1992.
- [3] M. Wachowiak, R. Smolikova, Y. Zheng, J. Zurada, and A. Elmaghraby, "An Approach to Multimodal Biomedical Image Registration Utilizing Particle Swarm Optimization," *IEEE Trans. Evol. Comput.*, vol. 8, no. 3, pp. 289–301, jun 2004.
- [4] M. Dorigo, V. Maniezzo, and A. Colomi, "Ant system: optimization by a colony of cooperating agents," *IEEE Trans. Syst. Man Cybern. Part B*, vol. 26, no. 1, pp. 29–41, 1996.
- [5] I. Newton, "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica," *Pan*, p. 510, 1687.
- [6] W. E. Wright, "Gravitational clustering," *Pattern Recognit.*, vol. 9, no. 3, pp. 151–166, 1977.
- [7] J. Gomez, D. Dasgupta, and O. Nasraoui, "A New Gravitational Clustering Algorithm," in *Proc. 2003 SIAM Int. Conf. Data Min.* Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, may 2003, pp. 83–94.
- [8] E. Rashedi, H. Nezamabadi-pour, and S. Saryazdi, "GSA: A Gravitational Search Algorithm," *Inf. Sci. (Ny)*, vol. 179, no. 13, pp. 2232–2248, 2009. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ins.2009.03.004>
- [9] C. Lopez-Molina, H. Bustince, J. Fernandez, P. Couto, and B. De Baets, "A gravitational approach to edge detection based on triangular norms," *Pattern Recognit.*, vol. 43, no. 11, pp. 3730–3741, 2010.
- [10] X. Ren and J. Malik, "Learning a classification model for segmentation," *Proc. Ninth IEEE Int. Conf. Comput. Vis.*, vol. 1, no. c, pp. 10–17 vol.1, 2003.
- [11] J. J. De Mesquita Sá, A. R. Backes, and P. C. Cortez, "A simplified gravitational model for texture analysis," *J. Math. Imaging Vis.*, vol. 47, no. 1-2, pp. 70–78, 2013.
- [12] C. Tomasi and R. Manduchi, "Bilateral Filtering for Gray and Color Images," *Int. Conf. Comput. Vis.*, pp. 839–846, 1998.
- [13] D. Comaniciu and P. Meer, "Mean shift: A robust approach toward feature space analysis," *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, vol. 24, no. 5, pp. 603–619, 2002.
- [14] H. Zhu, F. Meng, J. Cai, and S. Lu, "Beyond pixels: A comprehensive survey from bottom-up to semantic image segmentation and cosegmentation," pp. 12–27, 2016.
- [15] P. Arbeláez, M. Maire, C. Fowlkes, and J. Malik, "Contour Detection and Hierarchical Image Segmentation," *Tpami*, vol. 33, no. 5, pp. 898–916, 2011.
- [16] D. Marr, "Vision," *book*, 1982.
- [17] F. Calderero and F. Marques, "Region merging techniques using information theory statistical measures," *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 19, no. 6, pp. 1567–86, 2010.
- [18] P. Arbeláez, "Boundary extraction in natural images using ultrametric contour maps," *Proc. IEEE Comput. Soc. Conf. Comput. Vis. Pattern Recognit.*, vol. 2006, 2006.
- [19] S. Beucher, "The Watershed Transformation Applied to Image Segmentation," in *Proc. 10th Pfeifferkorn Conf. Signal Image Process. Microsc. Microanal.*, 1992, pp. 299–314.
- [20] P. Soille, *Morphological Image Analysis*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2004.
- [21] J. F. Canny, "A Computational Approach to Edge Detection," *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, vol. 8, no. 6, pp. 679–698, 1986.
- [22] F. J. Estrada and A. D. Jepson, "Benchmarking Image Segmentation Algorithms," *Int. J. Comput. Vis.*, vol. 85, no. 2, pp. 167–181, nov 2009.
- [23] C. Lopez-Molina, B. De Baets, and H. Bustince, "Quantitative error measures for edge detection," *Pattern Recognit.*, vol. 46, no. 4, pp. 1125–1139, apr 2013.