



# Estudio sobre la evolución de la relación entre objetos y atributos en una sucesión de contextos L-Fuzzy

Cristina Alcalde

Departamento de Matemática Aplicada  
Universidad del País Vasco - UPV/EHU  
Plaza de Europa 1, 20018 San Sebastian  
Email: c.alcalde@ehu.eus

Ana Burusco

Departamento de Estadística, Informática y Matemáticas  
Instituto de Smart Cities  
Universidad Pública de Navarra  
Campus de Arrosadía, 31006 Pamplona  
Email: burusco@unavarra.es

**Resumen**—En este trabajo avanzamos en el estudio de la evolución de la relación entre los objetos y los atributos en una sucesión de contextos L-Fuzzy. En concreto, analizamos el grado de crecimiento de las tendencias que se estudian mediante las matrices *Trend* y *Persistent*. Para hacerlo, daremos unas nuevas definiciones de niveles *Trend* y *Persistent* con el fin de priorizar los conceptos formales que se obtienen de las matrices *Trend* y *Persistent*. Estos niveles *Trend* y *Persistent* nos permitirán también comparar los distintos objetos y atributos analizando cuáles han sido los que más han evolucionado positivamente a lo largo del tiempo.

Finalmente, ilustraremos nuestros resultados con un ejemplo.

## I. INTRODUCCIÓN

El Análisis de Conceptos L-Fuzzy ([2], [7], [10], [11], [15], [19], [24]) es una herramienta matemática para el análisis y la representación del conocimiento conceptual. Esta teoría utiliza los conceptos L-fuzzy para extraer información de un contexto L-fuzzy. Recordemos que un contexto L-fuzzy es una tupla  $(L, X, Y, R)$ , donde  $L$  es un retículo completo,  $X$  e  $Y$  son conjuntos de objetos y atributos, y  $R \in L^{X \times Y}$  es una relación L-fuzzy entre los objetos y los atributos. Podemos entender el Análisis de Conceptos L-fuzzy como una extensión del Análisis de Conceptos Formales de Wille ([18], [29]).

En algunos casos, podemos tener varias relaciones entre el conjunto de objetos  $X$  y el de atributos  $Y$ . Representaremos estas situaciones mediante una secuencia de contextos L-fuzzy. Si esta secuencia representa la evolución en el tiempo de un contexto L-fuzzy, intentaremos predecir las tendencias futuras a partir del comportamiento pasado.

En Inteligencia Artificial hay una gran necesidad de representar conocimiento temporal y de modelizar el cambio en el tiempo. En este sentido, este trabajo es un paso más en el estudio de los fenómenos temporales. En concreto, el objetivo del presente trabajo es estudiar en qué medida las relaciones entre los objetos y los atributos mejoran con el paso del tiempo.

Existen trabajos en la literatura que analizan la evolución temporal en un contexto formal, por ejemplo, [27], [30], [31].

En particular, en [30], [31], Wolff introduce un Sistema de Tiempo Conceptual para definir el Análisis de Conceptos Temporales. En este Sistema de Tiempo Conceptual, el estado y la fase se definen como retículos de conceptos que representan el significado de los estados con respecto a la elegida descripción del tiempo. Además, otros autores definen tendencias de evolución en [27], [28], utilizando temporal matching en el caso del Análisis de Conceptos Formales.

La existencia de contextos Triádicos [21] nos da la posibilidad de utilizar relaciones ternarias para representar el tiempo. Sin embargo, esta aproximación es demasiado exigente para nuestro objetivo y, por esta razón, está solamente desarrollada para contextos formales.

El Análisis de Tendencias se refiere habitualmente a técnicas para extraer patrones de comportamiento en estadística. En este trabajo, trabajamos con un nuevo método para contextos L-fuzzy con datos cuantitativos. Este método permitirá establecer tendencias que pueden usarse como base para la toma de decisión. En concreto, profundizaremos en el estudio de las tendencias en la relación entre los objetos y atributos incorporando un nuevo elemento al estudio que representa el grado de evolución de dicha relación cuando es positiva.

Aplicaremos nuestros resultados a un ejemplo que muestra las ventas mensuales de artículos deportivos en determinados establecimientos a lo largo del tiempo.

El trabajo se organiza como sigue: La Sección 2 proporciona un resumen sobre los principales aspectos del Análisis de conceptos L-fuzzy y las sucesiones de contextos L-fuzzy. La sección 3 establece un estudio general sobre tendencias temporales en una sucesión de contextos L-fuzzy definiendo conceptos formales *Trend* y *Persistent* así como niveles de tendencias positivas que nos sirvan para establecer distintas priorizaciones en nuestras predicciones. Mostramos un ejemplo donde aplicamos los resultados en Sección 4. Finalmente, las conclusiones y trabajo futuro se exponen en la Sección 5.

## II. PRELIMINARES

 II-A. Análisis de conceptos  $L$ -fuzzy

En trabajos previos ([10], [11]), hemos definido los contextos  $L$ -fuzzy  $(L, X, Y, R)$ , donde  $L$  es un retículo completo,  $R \in L^{X \times Y}$  es una relación  $L$ -fuzzy entre los objetos de  $X$  y los atributos de  $Y$ . Esta definición es una extensión de los contextos formales de Wille ([18], [29]) que permite trabajar con relaciones entre los objetos y atributos que toman valores en un retículo  $L$ , en lugar de valores binarios.

Para trabajar con estos contextos  $L$ -fuzzy, hemos definido los operadores derivación 1 y 2 por medio de las expresiones:

Para todo  $A \in L^X$ , para todo  $B \in L^Y$

$$A_1(y) = \inf_{x \in X} \{I(A(x), R(x, y))\}$$

$$B_2(x) = \inf_{y \in Y} \{I(B(y), R(x, y))\}$$

con  $I$  un operador de implicación fuzzy definido en el retículo  $(L, \leq)$ . En este trabajo, utilizaremos operadores de implicación residuados y el retículo  $L = [0, 1]$ .

Otros autores han utilizado también estos operadores residuados para definir los operadores derivación ([9], [25], [26]).

La información almacenada en el contexto se visualiza por medio de los conceptos  $L$ -fuzzy, que representan a un grupo de objetos que comparten, ellos y sólo ellos, un grupo de atributos. Estos pares  $(M, M_1) \in L^X \times L^Y$ , donde  $M \in \text{fix}(\varphi)$  es el conjunto de puntos fijos del operador  $\varphi$ , que se define a partir de los operadores derivación 1 y 2 como  $\varphi(M) = (M_1)_2 = M_{12}$ . La primera y la segunda componentes del concepto  $L$ -fuzzy se llaman extensión e intensidad, respectivamente.

Utilizando la relación de orden usual en fuzzy sets, podemos definir el conjunto  $\mathcal{L} = \{(M, M_1) / M \in \text{fix}(\varphi)\}$  con la relación de orden  $\preceq$  dada por:  $(M, M_1), (N, N_1) \in \mathcal{L}$ ,  $(M, M_1) \preceq (N, N_1)$  si  $M \leq N$  (o  $N_1 \leq M_1$ ).

Se demuestra que  $(\mathcal{L}, \preceq)$  es un retículo completo al que llamaremos ([10], [11]) el retículo de conceptos  $L$ -fuzzy.

Además, dados  $A \in L^X$  (o  $B \in L^Y$ ), podemos obtener los conceptos  $L$ -fuzzy asociados aplicando los operadores derivación dos veces. Si utilizamos implicaciones residuadas, como en este trabajo, el concepto  $L$ -fuzzy asociado es  $(A_{12}, A_1)$  (o  $(B_2, B_{21})$ ).

Otros resultados importantes sobre esta teoría, que extiende el Análisis de Conceptos Formales al caso difuso, se pueden encontrar en [6], [8], [9], [12]. Extensiones del Análisis de Conceptos Formales al caso intervalo-valorado están en [13], [3], [16], [17] y a fuzzy property-oriented conceptos en [20], [23].

 II-B. Sucesiones de contextos  $L$ -fuzzy

Un primer estudio de sucesiones de contextos  $L$ -fuzzy cuando  $L = [0, 1]$  se hizo en [5] y [14]. Comenzaremos recordando la definición principal:

**Definición 1.** Una sucesión de contextos  $L$ -fuzzy es una sucesión de tuplas  $(L, X, Y, R_i)$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , con  $L$  retículo completo,  $X$  e  $Y$  conjuntos de objetos y atributos

respectivamente y  $R_i \in L^{X \times Y}$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ , una familia de relaciones  $L$ -fuzzy entre  $X$  e  $Y$ .

En [1] desarrollamos un estudio general de estas sucesiones de contextos  $L$ -fuzzy utilizando los operadores OWA  $n$ -arios de Lizasoain y Moreno ([22]). Estos operadores son una generalización de los operadores OWA de Yager ([32], [33]).

En ese trabajo y con el fin de extraer la información almacenada en la sucesión de contextos  $L$ -fuzzy, definimos relaciones agregadas utilizando los vectores totalmente ordenados definidos por Lizasoain y Moreno ([22]).

Posteriormente, en [5] hicimos un estudio preliminar en  $[0, 1]$  y en [4] extendimos y profundizamos los resultados para cualquier retículo completo  $L$ . En este caso, tenemos que tener en cuenta que excepto para una cadena completa, los elementos del retículo  $L$  no son necesariamente comparables.

## III. TENDENCIAS TEMPORALES

En [4] analizamos tendencias temporales para identificar la evolución con el tiempo de la sucesión de contextos  $L$ -fuzzy  $(L, X, Y, R_i)$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , cuando  $L$  es un retículo completo. Nuestro interés era el estudio de la evolución de la relación entre los objetos (o atributos) respecto de uno o varios atributos (u objetos).

En este trabajo, utilizábamos operadores de implicación residuados en el cálculo de los conceptos  $L$ -fuzzy asociados a ciertos objetos o atributos.

Comenzaremos mostrando en el siguiente apartado los principales resultados del trabajo.

## III-A. Objetos y atributos Trend y Persistent

La mejor manera de estudiar la evolución en el tiempo de un objeto o un atributo es el estudio de sus conceptos  $L$ -fuzzy asociados en los diferentes contextos  $L$ -fuzzy de la sucesión. Esta es la idea de las siguientes definiciones y resultados que dábamos en [4]:

**Definición 2.** Consideremos  $x_0 \in X, y_0 \in Y$ . Sean  $(A_{i\{x_0\}}, B_{i\{x_0\}})$  y  $(A_{i\{y_0\}}, B_{i\{y_0\}})$  los conceptos  $L$ -fuzzy asociados a  $\{x_0\}$  e  $\{y_0\}$  en la sucesión de contextos  $L$ -fuzzy  $(L, X, Y, R_i)$  con  $i \leq n$ .

Entonces, podemos definir:

- (i)  $Trend(x_0) = \{y \in Y / B_{i\{x_0\}}(y) \leq B_{i+1\{x_0\}}(y), \forall i < n\}$  es el conjunto de atributos cuyos grados de pertenencia en las diferentes intensiones de los conceptos  $L$ -fuzzy  $(A_{i\{x_0\}}, B_{i\{x_0\}})$  son no decrecientes.
- (ii)  $Trend(y_0) = \{x \in X / A_{i\{y_0\}}(x) \leq A_{i+1\{y_0\}}(x), \forall i < n\}$  es el conjunto de objetos cuyos grados de pertenencia en las diferentes extensiones de los conceptos  $L$ -fuzzy  $(A_{i\{y_0\}}, B_{i\{y_0\}})$  son no decrecientes.

Podemos decir que son los atributos cada vez más relacionados con el objeto  $x_0$  y los objetos cada vez más relacionados con el atributo  $y_0$ .

Esta es una definición muy exigente pero permite establecer tendencias con un alto grado de cumplimiento.



Además, se puede probar el siguiente resultado:

**Proposición 1.** Consideremos  $x \in X, y \in Y$ .

$$y \in Trend(x) \iff x \in Trend(y)$$

Podemos extender esta definición al caso de más de un objeto o un atributo:

**Definición 3.** Para cada  $Z, T \neq \emptyset, Z \subseteq X$  y  $T \subseteq Y$ , definimos  $Trend(Z)$  y  $Trend(T)$  como:

- (i)  $Trend(Z) = \{y \in Y / B_{i\{x\}}(y) \leq B_{i+1\{x\}}(y),$   
para todo  $i < n$ , para todo  $x \in Z\}$
- (ii)  $Trend(T) = \{x \in X / A_{i\{y\}}(x) \leq A_{i+1\{y\}}(x),$   
para todo  $i < n$ , para todo  $y \in T\}$

En este caso, se puede probar también el siguiente resultado:

**Proposición 2.** Para todo  $Z, T \neq \emptyset, Z \subseteq X$  y  $T \subseteq Y$  :

- (i) Si  $Trend(Z) = T$ , entonces  $Z \subseteq Trend(T)$
- (ii) Si  $Trend(T) = Z$ , entonces  $T \subseteq Trend(Z)$

Como caso particular, tenemos los conjuntos  $Trend(X)$  y  $Trend(Y)$  donde se cumple:

$$Trend(X) = Y \iff Trend(Y) = X.$$

Como la definición de  $Trend$  es muy exigente, en [4] definimos objetos y atributos  $Persistent$  para relajar este nivel de exigencia.

**Definición 4.** Dados  $x_0 \in X, y_0 \in Y$ . Sean  $(A_{i\{x_0\}}, B_{i\{x_0\}})$  y  $(A_{i\{y_0\}}, B_{i\{y_0\}})$  los conceptos  $L$ -fuzzy asociados a los crisp singletons  $\{x_0\}$  e  $\{y_0\}$ , en la sucesión de contextos  $L$ -fuzzy  $(L, X, Y, R_i)$  con  $i \leq n$  :

- (i)  $Persistent(x_0) = \{y \in Y / B_{i\{x_0\}}(y) \geq B_{1\{x_0\}}(y),$   
para todo  $i, 1 < i \leq n\}$

es el conjunto de atributos cuyos grados de pertenencia en las intensiones fuzzy de los conceptos  $L$ -fuzzy  $(A_{i\{x_0\}}, B_{i\{x_0\}})$  son mayores o iguales que los valores correspondientes en el concepto  $L$ -fuzzy  $(A_{1\{x_0\}}, B_{1\{x_0\}})$ .

- (ii)  $Persistent(y_0) = \{x \in X / A_{i\{y_0\}}(x) \geq A_{1\{y_0\}}(x),$   
para todo  $i, 1 < i \leq n\}$

es el conjunto de objetos cuyos grados de pertenencia en las extensiones fuzzy de los conceptos  $L$ -fuzzy  $(A_{i\{y_0\}}, B_{i\{y_0\}})$  son mayores o iguales que los valores correspondientes del concepto  $L$ -fuzzy  $(A_{1\{y_0\}}, B_{1\{y_0\}})$ .

Fijado  $j \leq n$ , se puede dar una definición alternativa de  $Persistent(x_0)$  y  $Persistent(y_0)$  como sigue:

Para todo  $i, j < i \leq n$ ,

$$Persistent_j(x_0) = \{y \in Y / B_{i\{x_0\}}(y) \geq B_{j\{x_0\}}(y)\}$$

$$Persistent_j(y_0) = \{x \in X / A_{i\{y_0\}}(x) \geq A_{j\{y_0\}}(x)\}$$

Con esta definición, resultados similares a los de las proposiciones 1 y 2 se verifican:

**Proposición 3.** Consideremos  $x \in X, y \in Y$ .

$$y \in Persistent(x) \iff x \in Persistent(y)$$

Podemos también extender esta definición al caso de más de un objeto o atributo:

**Definición 5.** Para todo  $Z, T \neq \emptyset, Z \subseteq X$  y  $T \subseteq Y$ , definimos  $Persistent(Z)$  y  $Persistent(T)$  como:

- (i)  $Persistent(Z) = \{y \in Y / B_{i\{x\}}(y) \geq B_{1\{x\}}(y),$   
para todo  $i < n$ , para todo  $x \in Z\}$
- (ii)  $Persistent(T) = \{x \in X / A_{i\{y\}}(x) \geq A_{1\{y\}}(x),$   
para todo  $i < n$ , para todo  $y \in T\}$

**Proposición 4.** For all  $Z, T \neq \emptyset, Z \subseteq X$  y  $T \subseteq Y$  :

- (i) Si  $Persistent(Z) = T$ , entonces  $Z \subseteq Persistent(T)$
- (ii) Si  $Persistent(T) = Z$ , entonces  $T \subseteq Persistent(Z)$

Las definiciones  $Trend$  y  $Persistent$  establecen pares de objetos y atributos que pueden ser usados para un análisis más completo de la evolución de la sucesión de contextos  $L$ -fuzzy  $(L, X, Y, R_i), i \in \{1, \dots, n\}$ .

Siguiendo esta idea y la Definición 2, las tendencias de la sucesión de contextos  $L$ -fuzzy que hemos estudiado se pueden completar con la construcción de matrices  $Trend$  y  $Persistent$ .

**Definición 6.** La Matriz  $Trend TM \subseteq X \times Y$  se define como:

$$TM(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in Trend(x) (\text{equiv. } x \in Trend(y)) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por la Proposición 1, para obtener la matriz  $Trend$  es sólo necesario el cálculo de  $Trend(x)$ , para todo  $x \in X$  o análogamente  $Trend(y)$ , para todo  $y \in Y$ .

Podemos considerar ahora el contexto formal  $(X, Y, TM)$  y obtener sus conceptos formales para tener una visión general de las tendencias entre los objetos  $X$  y los atributos  $Y$ .

**Definición 7.** Sea el contexto formal  $(X, Y, TM)$  con  $X$  conjunto de objetos,  $Y$  conjunto de atributos y  $TM \subseteq X \times Y$ . Llamaremos a los conceptos de  $(X, Y, TM)$  conceptos formales  $Trend$ .

Es también posible realizar un estudio paralelo utilizando la definición de  $Persistent$ :

**Definición 8.** La matriz  $PM \subseteq X \times Y$  tal que

$$PM(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in Persistent(x) (x \in Persistent(y)) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

se llama Matriz  $Persistent$ .

Podemos ahora considerar  $(X, Y, PM)$  y calcular sus conceptos formales para obtener información sobre las tendencias entre los objetos de  $X$  y los atributos de  $Y$ .

**Definición 9.** Sea el contexto formal  $(X, Y, PM)$ . Los conceptos formales de  $(X, Y, PM)$  se llamarán conceptos formales  $Persistent$ .

Además, como la definición de  $Persistent$  es menos exigente que la de  $Trend$ , se puede probar de forma sencilla

que  $TM \subseteq PM$ .

Mediante estos resultados utilizando las matrices *Trend* y *Persistent* estudiamos objetos y atributos que mejoran su relación con el tiempo, pero no analizamos cuánto supone esa mejora. Este tema será el que abordaremos en el siguiente apartado.

### III-B. Nivel Trend y Persistent

Con el fin de medir el grado de evolución positiva de las relaciones entre los objetos y los atributos, vamos a definir su nivel de tendencia. Para hacerlo trabajaremos con  $L = [0, 1]$ .

Dados  $x_0 \in X, y_0 \in Y$ . Sean  $(A_{i\{x_0\}}, B_{i\{x_0\}})$  y  $(A_{i\{y_0\}}, B_{i\{y_0\}})$  los conceptos *L*-fuzzy asociados a los crisp singletons  $\{x_0\}$  e  $\{y_0\}$ , en la sucesión de contextos *L*-fuzzy  $(L, X, Y, R_i)$  con  $i \leq n$ :

**Definición 10.** Para cada  $x_0 \in X, y \in Y$ , el nivel *Trend* del objeto  $x_0$  para el atributo  $y$  se define como:

$$TrendLevel(x_0)_y = \begin{cases} B_{n\{x_0\}}(y) - B_{1\{x_0\}}(y) & \text{si } y \in Trend(x_0) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Análogamente, podemos definir para cada  $y_0 \in Y, x \in X$  el nivel *Trend* del atributo  $y_0$  para el objeto  $x$ :

$$TrendLevel(y_0)_x = \begin{cases} A_{n\{y_0\}}(x) - A_{1\{y_0\}}(x) & \text{si } x \in Trend(y_0) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

También podemos dar las definiciones para Niveles *Persistent*:

**Definición 11.** Para cada  $x_0 \in X, y \in Y$ , el nivel *Persistent* del objeto  $x_0$  para el atributo  $y$  se define como:

$$PerLevel(x_0)_y = \begin{cases} B_{n\{x_0\}}(y) - B_{1\{x_0\}}(y) & \text{si } y \in Persistent(x_0) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Análogamente, podemos definir para cada  $y_0 \in Y, x \in X$  el nivel *Persistent* del atributo  $y_0$  para el objeto  $x$ :

$$PerLevel(y_0)_x = \begin{cases} A_{n\{y_0\}}(x) - A_{1\{y_0\}}(x) & \text{si } x \in Persistent(y_0) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Es fácil comprobar que se cumple el siguiente resultado:

**Proposición 5.** Para todo  $x \in X, y \in Y$ ,

$$TrendLevel(x)_y = TrendLevel(y)_x$$

$$PerLevel(x)_y = PerLevel(y)_x$$

*Demostración.* Si consideramos los crisp singletons  $\{x\}$  e  $\{y\}$  y utilizamos una implicación residuada,  $B_{i\{x\}}(y) = R_i(x, y) = A_{i\{y\}}(x)$ , para todo  $i \leq n$ . Como además  $y \in Trend(x)$  si y sólo si  $x \in Trend(y)$ , y análogamente para la definición de *Persistent*, la proposición se verifica.  $\square$

Podemos establecer relaciones que nos almacenen estos valores:

**Definición 12.** Las matrices *TrendLevelM*, *PerLevelM*  $\in L^{X \times Y}$  se definen como:

$$TrendLevelM(x, y) = TrendLevel(x)_y = TrendLevel(y)_x$$

$$PerLevelM(x, y) = PerLevel(x)_y = PerLevel(y)_x$$

Aunque en la definición dada hemos tomado como intervalo temporal el que va desde el instante inicial al final, sería posible también trabajar con otros intervalos:

**Definición 13.** Dados  $1 \leq j \leq k \leq n$ , para cada  $x_0 \in X, y \in Y$ , el nivel *Trend* y *Persistent* del objeto  $x_0$  para el atributo  $y$  en el intervalo  $[j, k]$  se define como:

$$TrendLevel_{j,k}(x_0)_y = \begin{cases} B_{k\{x_0\}}(y) - B_{j\{x_0\}}(y) & \text{si } y \in Trend_{j,k}(x_0) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$PerLevel_{j,k}(x_0)_y = \begin{cases} B_{k\{x_0\}}(y) - B_{j\{x_0\}}(y) & \text{si } y \in Persistent_{j,k}(x_0) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde  $y \in Trend_{j,k}(x_0)$  si  $y \in Trend(x_0)$  en el intervalo  $[j, k]$  e  $y \in Persistent_{j,k}(x_0)$  si  $y \in Persistent(x_0)$  en el intervalo  $[j, k]$ .

Análogamente, dados  $1 \leq j \leq k \leq n$ , podemos definir para cada  $y_0 \in Y, x \in X$  el nivel *Trend* y *Persistent* del atributo  $y_0$  para el objeto  $x$  en el intervalo  $[j, k]$ :

$$TrendLevel_{j,k}(y_0)_x = \begin{cases} A_{k\{y_0\}}(x) - A_{j\{y_0\}}(x) & \text{si } x \in Trend_{j,k}(y_0) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$PerLevel_{j,k}(y_0)_x = \begin{cases} A_{k\{y_0\}}(x) - A_{j\{y_0\}}(x) & \text{si } x \in Persistent_{j,k}(y_0) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde  $y \in Trend_{j,k}(x_0)$  si  $y \in Trend(x_0)$  en el intervalo  $[j, k]$  e  $y \in Persistent_{j,k}(x_0)$  si  $y \in Persistent(x_0)$  en el intervalo  $[j, k]$ .

A continuación, podemos definir el nivel *Trend* o *Persistent* de un objeto o de un atributo, agregando valores.

**Definición 14.** Para cada  $x_0 \in X, y_0 \in Y$ :

$$TrendLevel(x_0) = Agr_{y \in Y}(TrendLevel(x_0)_y)$$

$$TrendLevel(y_0) = Agr_{x \in X}(TrendLevel(y_0)_x)$$

$$PerLevel(x_0) = Agr_{y \in Y}(PerLevel(x_0)_y)$$

$$PerLevel(y_0) = Agr_{x \in X}(PerLevel(y_0)_x)$$

Al igual que en el caso anterior, podríamos dar estas definiciones para los contextos del intervalo  $[j, k]$ .

Esta definición nos permite establecer relaciones de preorden en el conjunto de objetos y de atributos de acuerdo con el incremento de su evolución positiva en el tiempo.

**Definición 15.** Dados  $z_i, z_j \in X$  o  $z_i, z_j \in Y$ , definimos las relaciones  $\leq_{TL}$  y  $\leq_{PL}$  como:

$$z_i \leq_{TL} z_j \text{ si } TrendLevel(z_i) \leq TrendLevel(z_j)$$

$$z_i \leq_{PL} z_j \text{ si } PerLevel(z_i) \leq PerLevel(z_j)$$



**Proposición 6.** Las relaciones  $\leq_{TL}$  y  $\leq_{PL}$  son preordenes.

*Demostración.* Ya que los valores de *TrendLevel* y *PerLevel* son valores en  $[0,1]$ , es obvio por la definición que se trata de relaciones reflexivas y transitivas. Sin embargo, no son relaciones de orden por no cumplirse la antisimetría.  $\square$

Utilizando  $\leq_{TL}$  y  $\leq_{PL}$  podemos también establecer rankings en el conjunto de objetos  $X$  y de atributos  $Y$  de nuestra sucesión de contextos. Aquellos objetos o atributos con mayores valores de *TrendLevel* y *PerLevel* serán los que hayan evolucionado de forma más positiva a lo largo del tiempo. La elección entre ambos rankings dependerá de nuestro nivel de exigencia.

Por otro lado, mediante las matrices *TrendLevelM* y *PerLevelM* podemos establecer relaciones en los conceptos *Trend* y *Persistent* definidos a partir de los contextos formales  $(X, Y, TM)$  y  $(X, Y, PM)$  que nos permitan establecer qué conceptos son más relevantes que otros. El procedimiento que seguiremos será el siguiente:

- (1) Obtención de las matrices *TrendLevelM* y *PerLevelM*
- (2) Obtención de las matrices *TM* y *PM*
- (3) Cálculo de los conceptos formales de los contextos formales  $(X, Y, TM)$  y  $(X, Y, PM)$
- (4) Cálculo del peso de cada concepto  $(A, B)$  de  $(X, Y, TM)$  y  $(X, Y, PM)$  definido como:

$$W_{TM}((A, B)) = \begin{cases} \sum_{x_k \in A, y_l \in B} TrendLevelM(x_k, y_l) & \text{si } A, B \neq \emptyset \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$W_{PM}((A, B)) = \begin{cases} \sum_{x_k \in A, y_l \in B} PerLevelM(x_k, y_l) & \text{si } A, B \neq \emptyset \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- (5) Ordenación de los conceptos formales de acuerdo con su peso estableciendo rankings.

#### IV. EJEMPLO PRÁCTICO

Vamos a mostrar la aplicación de los resultados utilizando el siguiente caso práctico:

Sea  $(L, X, Y, R_i), 1 \leq i \leq n$  una secuencia de contextos fuzzy que representa las ventas de artículos deportivos ( $X$ ) en establecimientos ( $Y$ ) a lo largo de un periodo de tiempo. Queremos estudiar los lugares y los artículos en los que ha habido un mayor incremento de ventas teniendo en cuenta que hay artículos que se venden sólo en ciertas estaciones (por ejemplo, skis o trajes de baño) y en ciertas zonas (es más posible vender skis en Colorado que en Florida). Tomaremos  $L = [0, 1]$ .

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0.7 & 1 & 0.8 \\ 0 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0 \end{pmatrix} R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 1 \\ 0.2 & 0.4 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$R_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.6 & 0.5 & 0.7 \\ 0 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix} R_4 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.6 \\ 0.1 & 0.5 & 0.3 \\ 0.6 & 0.8 & 0.8 \end{pmatrix}$$

$$R_5 = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 \\ 0.8 & 1 & 0.9 \end{pmatrix}$$

En este caso obtendríamos las siguientes matrices *Trend* y *Persistent* :

<i>TM</i>	$y_1$	$y_2$	$y_3$	<i>PM</i>	$y_1$	$y_2$	$y_3$
$x_1$	0	0	0	$x_1$	0	0	0
$x_2$	0	1	0	$x_2$	1	1	0
$x_3$	1	0	1	$x_3$	1	0	1

Vamos a continuar con el desarrollo para el contexto  $(X, Y, PM)$ , pudiendo hacer uno paralelo para  $(X, Y, TM)$ . Los conceptos formales de  $(X, Y, PM)$  son los siguientes:

- $(\{x_1\}, \emptyset)$
- $(\{x_2\}, \{y_1, y_2\})$
- $(\{x_3\}, \{y_1, y_3\})$
- $(\{x_2, x_3\}, \{y_1\})$
- $(\emptyset, \{y_1, y_2, y_3\})$

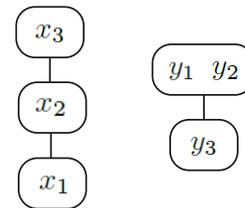
Podemos ahora calcular la matriz *PerLevelM*. El resultado es el siguiente:

<i>PerLevelM</i>	$y_1$	$y_2$	$y_3$
$x_1$	0	0	0
$x_2$	0.6	0.4	0
$x_3$	0.8	1	0.9

Si tomamos la media como agregación, obtenemos los valores:

- $PerLevel(x_1) = 0$
- $PerLevel(x_2) = 0.33$
- $PerLevel(x_3) = 0.9$
- $PerLevel(y_1) = 0.47$
- $PerLevel(y_2) = 0.47$
- $PerLevel(y_3) = 0.3$

que nos permiten establecer los siguientes rankings en el conjunto de objetos y de atributos:

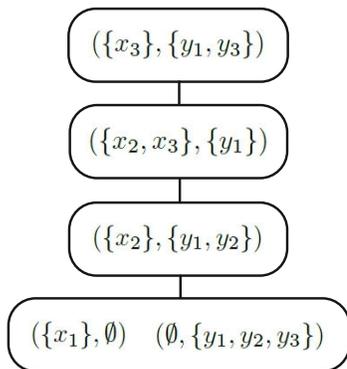


Por tanto, podemos decir que el artículo  $x_3$  y los establecimientos  $y_1$  e  $y_2$  son los que han experimentado en media un mayor incremento en sus ventas. En contra, el artículo  $x_1$  y el establecimiento  $y_3$  tienen los incrementos de ventas menores.

Por otra parte, utilizaremos la matriz *PerLevelM* para ordenar los conceptos de mayor a menor relevancia aplicando el procedimiento descrito en el apartado anterior:

- $W_{PM}((\{x_1\}, \emptyset)) = 0$
- $W_{PM}((\{x_2\}, \{y_1, y_2\})) = 1$
- $W_{PM}((\{x_3\}, \{y_1, y_3\})) = 1.7$
- $W_{PM}((\{x_2, x_3\}, \{y_1\})) = 1.4$
- $W_{PM}((\emptyset, \{y_1, y_2, y_3\})) = 0$

Por tanto, podemos establecer el siguiente ranking de conceptos (la relevancia de los distintos conceptos disminuye de arriba hacia abajo en el gráfico).



Como conclusión podríamos decir que: *El mayor incremento de ventas ha sido en del artículo  $x_3$  en las ciudades  $y_1$  e  $y_3$ . A continuación tendríamos los artículos  $x_2$  y  $x_3$  en  $y_1$ . Finalmente,  $x_2$  en  $y_1$  e  $y_2$ .*

#### V. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

En este trabajo hemos continuado con el estudio de tendencias en una sucesión de contextos  $L$ -fuzzy que representa la evolución en el tiempo de un contexto  $L$ -fuzzy. Con la introducción de los niveles de tendencias (*Trend* y *Persistence* Level) hemos podido establecer qué objetos y atributos son los que sus valores más han aumentado con el paso del tiempo. Además hemos introducido las Matrices *Trend* y *Persistent* level que nos han permitido establecer rankings en los conceptos formales que nos establecen las tendencias en la relación entre los objetos y los atributos de la sucesión de contextos  $L$ -fuzzy.

En el futuro queremos analizar no sólo tendencias positivas, sino también las negativas.

#### AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por el Grupo de Investigación “Sistemas Inteligentes y Energía (SI+E)” de la Universidad del País Vasco - UPV/EHU (Proyecto GIU 16/54), y por el Grupo de Investigación “Inteligencia Artificial y Razonamiento Aproximado” de la Universidad Pública de Navarra y el Gobierno Español (Proyecto TIN2016-77356-P (MINECO, AEI/FEDER, UE))

#### REFERENCIAS

- [1] C. Alcalde, A. Burusco:  $L$ -fuzzy context sequences on complete lattices, IPMU 2014, *Lecture Notes in Computer Science* Part III, CCIS 444, pp. 31–40, 2014.
- [2] C. Alcalde, A. Burusco: The use of two relations in  $L$ -fuzzy contexts, *Information Sciences* 301 (1), pp. 1–12, 2015.
- [3] C. Alcalde, A. Burusco, R. Fuentes-González, I. Zubia: Treatment of  $L$ -fuzzy contexts with absent values, *Information Sciences* 179 (1-2), pp. 1–15, 2009.
- [4] C. Alcalde, A. Burusco, H. Bustince, A. Jurio, J.A. Sanz: Evolution in time of the  $L$ -fuzzy context sequences, *Information Sciences* 326, pp. 202–214, 2016.
- [5] C. Alcalde, A. Burusco, R. Fuentes-González: The study of fuzzy context sequences *International Journal of Computational Intelligence Systems* 6 (3), pp. 518–529, 2013.
- [6] C. Alcalde, A. Burusco, R. Fuentes-González: Application of the  $L$ -fuzzy concept analysis in the morphological image and signal processing, *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence* 72 (1-2), pp. 115–128, 2014.
- [7] L. Antoni, S. Krajci, O. Kridlo, B. Macek, L. Pisková: On heterogeneous formal contexts, *Fuzzy Sets and Systems* 234, pp. 2–33, 2014.
- [8] R. Bělohlávek: Fuzzy Galois Connections, *Math. Logic Quarterly* 45 (4), pp. 497–504, 1999.
- [9] R. Bělohlávek, V. Vychodil: What is a fuzzy concept lattice, in *Proceedings of the Third International Conference on Concept Lattice and their Applications, CLA 2005*, Olomouc, Czech Republic, pp. 34–45, 2005.
- [10] A. Burusco, R. Fuentes-González: The Study of the  $L$ -fuzzy Concept Lattice, *Mathware and Soft Computing* 1 (3), pp. 209–218, 1994.
- [11] A. Burusco, R. Fuentes-González: Construction of the  $L$ -fuzzy Concept Lattice, *Fuzzy Sets and Systems* 97 (1), pp. 109–114, 1998.
- [12] A. Burusco, R. Fuentes-González: Concept lattices defined from implication operators, *Fuzzy Sets and Systems* 114 (1), pp. 431–436, 2000.
- [13] A. Burusco, R. Fuentes-González: The study of the interval-valued contexts, *Fuzzy Sets and Systems* 121, pp. 69–82, 2001.
- [14] C. Alcalde, A. Burusco, R. Fuentes-González: Application of OWA Operators in the  $L$ -fuzzy Concept Analysis in *Aggregation Functions in Theory and Practice*. Book Series: Advances in Intelligent Systems and Computing 228, pp. 129–140, 2013.
- [15] P. Butka, J. Pócs, J. Pósová: On equivalence of conceptual scaling and generalized one-sided concept lattices, *Information Sciences* 259, pp. 57–70, 2014.
- [16] Y. Djouadi, H. Prade: Interval-Valued Fuzzy Galois Connections: Algebraic Requirements and Concept Lattice Construction, *Fundamenta Informaticae* 99 (2), pp. 169–186, 2010.
- [17] Y. Djouadi, H. Prade: Possibility- theoretic extension of derivation operators in formal concept analysis over fuzzy lattices, *FODM* 10 (4), pp. 287–309, 2011.
- [18] B. Ganter, R. Wille: Formal concept analysis: Mathematical foundations, Springer, Berlin - New York, 1999.
- [19] J. Konecny: Isotone fuzzy Galois connections with hedges, *Information Sciences* 181 (10) pp. 1804–1817, 2011.
- [20] H. Lai, D. Zhang: Concept lattices of fuzzy contexts: Formal concept analysis vs. rough set theory, *International Journal of Approximate Reasoning* 50 (5) pp. 695–707, 2009.
- [21] F. Lehmann, R. Wille: A triadic approach to Formal concept analysis, *Conceptual structures: applications, implementation and theory*, Lecture Notes in Artificial Intelligence 954, pp. 32–43, 1995.
- [22] I. Lizasoain, C. Moreno: OWA operators defined on complete lattices, *Fuzzy Sets and Systems* 224, pp. 36–52, 2013.
- [23] J. Medina: Multi-adjoint property-oriented and object-oriented concept lattices, *Information Sciences* 190, pp.95–106, 2012.
- [24] J. Medina, M. Ojeda-Aciego, J. Ruiz Calvino: Formal concept analysis via multi-adjoint concept lattices, *Fuzzy Sets and Systems* 160 (2), pp. 130–144, 2009.
- [25] J. Medina, M. Ojeda-Aciego: Multi-adjoint  $t$ -concept lattices, *Information Sciences* 180 (5), pp. 712–725, 2010.
- [26] J. Medina, M. Ojeda-Aciego, Dual multi-adjoint concept lattices, *Information Sciences* 225, 47–54, 2013.
- [27] R. Neouchi, A. Y. Tawfik, R. A. Frost: Towards a Temporal Extension of Formal Concept Analysis. In *Proceedings of Canadian Conference on Artificial Intelligence*, pp. 335–344, 2001.
- [28] A. Y. Tawfik, G. Scott: Temporal Matching under Uncertainty. In *Proceedings of the Eighth International Workshop on Artificial Intelligence and Statistics*, 2001.
- [29] R. Wille: Restructuring lattice theory: an approach based on hierarchies of concepts, in: *Rival I. (Ed.), Ordered Sets, Reidel, Dordrecht-Boston*, pp. 445–470, 1982.
- [30] K. E. Wolff: States, Transitions, and Life Tracks in Temporal Concept Analysis, *Formal Concept Analysis*, pp. 127–148, 2005.
- [31] K. E. Wolff: Temporal Relational Semantic Systems, *ICCS*, pp. 165–180, 2010.
- [32] R.R. Yager: On ordered weighted averaging aggregation operators in multi-criteria decision making, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* 18, pp. 183–190, 1988.
- [33] R.R. Yager: Families of OWA operators, *Fuzzy Sets and Systems* 59, pp. 125–148, 1993.