

Un modelo de consenso para toma de decisiones en grupo a gran escala usando conjuntos difusos dudosos

1st Rosa M. Rodríguez
Dept. de Ciencias de la Computación e I.A.
Universidad de Granada
Granada, España
rosam.rodriguez@decsai.ugr.es

2th Álvaro Labella
Dept. de Informática
Universidad de Jaén
Jaén, España
alabella@ujaen.es

3rd Luis Martínez
Dept. de Informática
Universidad de Jaén
Jaén, España
martin@ujaen.es

Resumen—El desarrollo tecnológico y las demandas de la sociedad han provocado que los problemas de toma de decisiones en grupo a gran escala (TDG-GS) sean cada vez más comunes. Muchos de estos problemas requieren soluciones aceptadas por todos los expertos involucrados. Para ello, se aplica un proceso de alcance de consenso. Algunos retos de los procesos de alcance de consenso para problemas de TDG-GS son, la escalabilidad y el proceso de supervisión de las preferencias de los expertos, lo que afecta al coste temporal. Teniendo en cuenta estos retos, esta contribución presenta un nuevo modelo de consenso para problemas de TDG-GS capaz de reducir el coste temporal del proceso de alcance de consenso.

Index Terms—toma de decisiones en grupo a gran escala, proceso de alcance de consenso, clustering, conjunto difuso dudoso

I. INTRODUCCIÓN

Hoy en día existen muchos problemas que afectan a la sociedad y requieren decisiones consensuadas. En estos casos, es necesario aplicar un proceso de alcance de consenso (PAC) [8]. La mayoría de los resultados que se han obtenido en este área se centran en toma de decisiones en grupo (TDG) con pocos expertos, sin embargo el desarrollo tecnológico y la actual demanda de la sociedad (redes sociales, e-group shopping) hacen necesario proponer PAC que sean capaces de manejar problemas con grandes grupos (como se indicó en [2] más de 20 expertos). Esta situación implica la aparición de nuevos retos en los PAC, como ya ha sido mencionado por otros investigadores [3]: i) escalabilidad, ii) coste temporal, iii) supervisión constante de las preferencias, iv) fuerte desacuerdo entre expertos, v) dificultades para entender/visualizar el actual estado de acuerdo entre expertos, etc.

El estudio de TDG a gran escala (TDG-GS), se puede clasificar en 4 temáticas:

- Métodos de clustering en TDG-GS
- PAC en TDG-GS
- Modelos de TDG-GS
- Sistemas de soporte para TDG-GS

Recientemente se han indicado las principales limitaciones que los PAC clásicos presentan cuando éstos son aplicados

a problemas de TDG-GS [3], [4] y aunque existen ya algunas propuestas iniciales, aún no son capaces de evitar estas limitaciones.

Por tanto, teniendo en cuenta los retos, y las limitaciones de los PAC clásicos en los problemas de TDG-GS, esta contribución presenta un modelo de consenso para TDG-GS que evita el problema de la escalabilidad y la constante supervisión de las preferencias, ambos relacionados con el coste temporal del PAC. Esta propuesta incluye las siguientes novedades:

- Detecta subgrupos de expertos teniendo en cuenta la similitud de sus preferencias y calcula la relevancia de cada subgrupo considerando su tamaño y cohesión.
- La mayoría de los PAC agregan las preferencias de los expertos al principio del proceso, esto provoca pérdida de información y por tanto desviación en los resultados. Para evitar esta situación, esta propuesta modela las preferencias de los subgrupos de expertos mediante conjuntos difusos dudosos (CDD) [9].
- Define un nuevo proceso de feedback adaptativo que guía el PAC según el grado de consenso alcanzado en cada momento.

El resto de esta contribución se organiza como sigue: la Sección 2 hace una breve revisión sobre TDG-GS y CDD. La Sección 3 presenta un nuevo modelo de consenso para resolver problemas de TDG-GS que utiliza CDD, y finalmente, la Sección 4 termina con algunas conclusiones.

II. PRELIMINARES

Esta sección revisa algunos conceptos básicos sobre TDG-GS, PAC y CDD que serán utilizados en el modelo de consenso propuesto.

II-A. Toma de decisiones en grupo a gran escala

El concepto de TDG-GS es muy similar al de TDG, con la diferencia de que en el primero el número de expertos que participa en el problema es mucho más grande que en el segundo. Un problema de TDG-GS consiste de i) un conjunto de alternativas $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, ($n \geq 2$) como



posible solución al problema, y un conjunto de expertos $E = \{e_1, \dots, e_m\}$, ($m \gg n$), que expresan sus opiniones sobre el conjunto de alternativas X . Una estructura muy utilizada por los expertos para proporcionar sus preferencias en ambos tipos de problemas de TDG es la relación de preferencia difusa, $P = (p_{ij})_{n \times n} \subset X \times X$, $p_{ij} \in [0, 1]$.

Los problemas de TDG-GS se pueden resolver mediante un proceso de selección, similar al utilizado en TDG. Sin embargo, este proceso no garantiza que la decisión seleccionada sea siempre aceptada por todos los expertos que participan en el problema, ya que algunos de ellos podrían considerar que sus opiniones no se tuvieron en cuenta. Una posible solución para evitar este inconveniente y obtener decisiones aceptadas por todos los expertos involucrados en el problema, es añadir un PAC. Este proceso implica que los expertos modifiquen sus preferencias para que estén más cerca de la opinión colectiva.

Un proceso de alcance de consenso es un proceso de discusión iterativo y dinámico que puede realizarse de diferentes formas, tal y como se indica en [4]. La Figura 1 muestra un esquema general de un PAC.

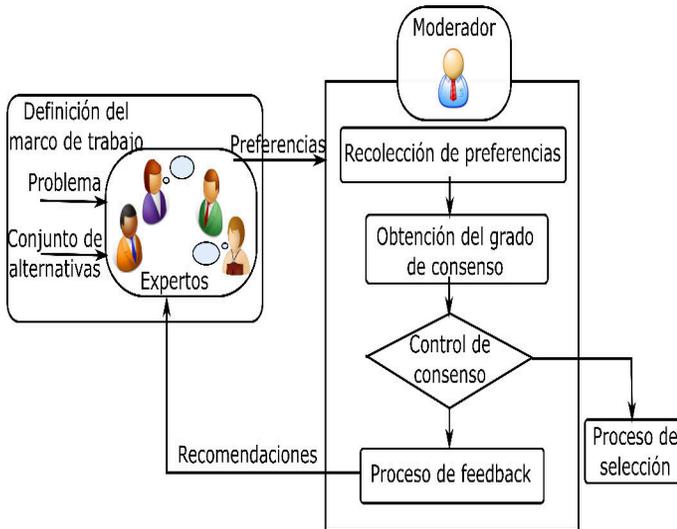


Figura 1. Esquema general de un PAC

En TDG-GS también es necesario aplicar un PAC para obtener soluciones aceptadas por todos los expertos involucrados. Varias propuestas han sido ya introducidas en [5], [6], [10], sin embargo, estas propuestas agregan las preferencias de los expertos al inicio del proceso de decisión, lo que implica pérdida de información y no tienen en cuenta el nivel de acuerdo alcanzado a lo largo del PAC, lo que puede provocar un alto coste temporal, ya que requiere una mayor supervisión de las preferencias durante el proceso de discusión y feedback.

Para evitar estas limitaciones, nuestro modelo incluye un proceso para detectar y ponderar subgrupos, mantener la información inicial fusionando las preferencias mediante CDD en lugar de usar técnicas de agregación, y definir un nuevo proceso de feedback adaptativo.

II-B. Uso de información dudosa

El concepto de CDD introducido en [9], modela la incertidumbre obtenida de la duda que puede tener un experto cuando quiere asignar el grado de pertenencia de un elemento a un conjunto.

Definición 1: [9] Sea X un conjunto de referencia, un conjunto difuso dudoso sobre X es una función h que devuelve un subconjunto de valores en el intervalo $[0, 1]$:

$$h : X \rightarrow \wp([0, 1]). \quad (1)$$

Esta definición fue completada con la siguiente representación matemática, $A = \{\langle x, h_A(x) \rangle : x \in X\}$, donde $h_A(x)$ es un elemento difuso dudoso (EDD) y es un conjunto de valores en $[0, 1]$.

También se definió el concepto de relación de preferencia difusa dudosa para problemas de TDG.

Definición 2: [11] Sea X un conjunto de referencia, una relación de preferencia difusa dudosa (RPDD) sobre X se representa mediante la matriz $H = (h_{ij})_{n \times n} \subset X \times X$, donde $h_{ij} = \{\gamma_{ij}^s | s = 1, 2, \dots, \#h_{ij}\}$ ($\#h_{ij}$ es el número de elementos en h_{ij}) es un EDD que indica el grado de pertenencia para el cual x_i es preferido a x_j . Además,

$$\gamma_{ij}^{\sigma(s)} + \gamma_{ji}^{\sigma'(s)} = 1, \quad h_{ii} = \{0, 5\}, \quad \#h_{ij} = \#h_{ji}, \quad i, j = \{1, 2, \dots, n\}$$

donde $\{\sigma(1), \dots, \sigma(\#h_{ij})\}$ es una permutación de $\{1, \dots, \#h_{ij}\}$, tal que, $\gamma_{ij}^{\sigma(s)}$ es el s^{th} elemento más pequeño en h_{ij} .

En algunas ocasiones para realizar operaciones con CDD es necesario que el número de elementos contenidos en el EDD sea el mismo para poder realizar los cálculos de forma adecuada. Para ello es necesario aplicar un proceso de normalización.

Definición 3: Sea h_i el EDD con menor cardinalidad y $h_i^- = \min\{\gamma | \gamma \in h_i\}$ y $h_i^+ = \max\{\gamma | \gamma \in h_i\}$, entonces el valor γ' que se añade en el EDD, h_i , es calculado como sigue:

$$\gamma' = \eta h_i^+ + (1 - \eta) h_i^-, \quad (2)$$

donde $\eta (0 \leq \eta \leq 1)$, es un parámetro de optimización que refleja la actitud que tiene el experto respecto al riesgo. Si $\eta = 1$, el valor añadido es $\gamma' = h_i^+$, que indica un punto de vista optimista; si $\eta = 0$, el valor añadido es $\gamma' = h_i^-$, que indica un punto de vista pesimista; y si $\eta = 1/2$, entonces $\gamma' = 1/2(h_i^+ + h_i^-)$, lo que significa que el experto es neutro.

III. MODELO DE CONSENSO ADAPTATIVO PARA TDG-GS

Esta sección presenta un nuevo modelo de consenso para TDG-GS capaz de tratar con el problema de escalabilidad y la constante supervisión de las preferencias de los expertos en el proceso de feedback.

- Para lograr el primer objetivo, el modelo incluye un proceso de clustering para detectar subgrupos de expertos basado en la similitud de sus preferencias. Las preferencias de cada subgrupo son modeladas mediante CDD que

representan la duda del grupo. Además los subgrupos son ponderados según su tamaño y cohesión.

- El segundo objetivo es alcanzado mediante un proceso adaptativo que modifica el proceso de feedback en el PAC atendiendo al grado de consenso alcanzado en cada ronda.

El modelo extiende el esquema general mostrado en la Figura 1 añadiendo dos nuevas fases: i) gestión de subgrupos, ii) proceso de feedback adaptativo, y modifica otras dos: i) definición del marco de trabajo, ii) obtención del grado de consenso. El modelo se divide por tanto en 6 fases (ver Fig. 2).

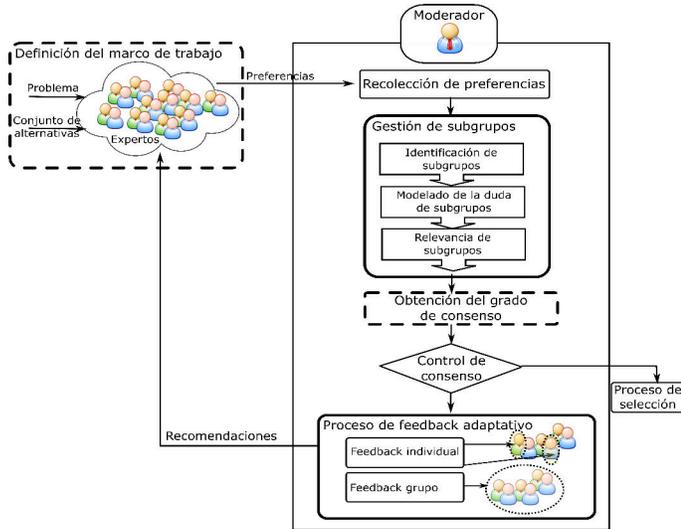


Figura 2. Esquema del modelo de consenso propuesto

III-A. Definición del marco de trabajo

En un problema de TDG-GS hay un conjunto de posibles alternativas $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ y un gran número de expertos $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ implicados en el problema, siendo $m \gg n$. Normalmente se definen dos parámetros, el umbral de consenso y el número máximo de rondas de discusión. Sin embargo, en este modelo es necesario introducir un nuevo parámetro que pueda controlar el proceso adaptativo a lo largo del PAC. Por tanto, en nuestro modelo se definen 3 parámetros:

- $\vartheta \in [0, 1]$: es el umbral de consenso establecido para alcanzar el consenso.
- $\delta \in [0, 1]$, $\delta < \vartheta$: es un parámetro que se utiliza en el proceso de feedback adaptativo para determinar el nivel de consenso alcanzado (alto o bajo).
- Max_rondas : este parámetro controla el número máximo de rondas permitidas en el problema de TDG-GS.

III-B. Recolección de preferencias

Cada experto $e_r \in E$, proporciona sus preferencias sobre X mediante una relación de preferencia difusa (RPD), $P^r = (p_{ij}^r)_{n \times n}$, la cual es recíproca $p_{ij}^r + p_{ji}^r = 1$, $i, j \in 1, \dots, n$.

III-C. Gestión de subgrupos

Como hemos comentado anteriormente, el primer objetivo que nos planteamos alcanzar es evitar el problema de escalabilidad en TDG-GS y para ello consideramos que de todos los expertos involucrados en el problema, algunos de ellos tienen preferencias similares. Por tanto, la idea principal en esta fase es reducir el número de preferencias. Esta fase se divide en 3 procesos.

1) Identificación de subgrupos

Para identificar grupos de expertos con preferencias similares aplicamos un algoritmo basado en el fuzzy c-means, pero adaptado a nuestro problema.

- Inicialmente hay un cluster para cada alternativa, $C = \{C^1, \dots, C^n\}$.
- Se obtiene un centroide c^l para cada cluster. Existen distintas formas de inicializar los centroides, en esta propuesta como el problema es conocido, cada centroide es inicializado con una RPD que representa la preferencia de una alternativa sobre el resto:

$$c^l = \begin{pmatrix} - & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & - & 0,5 & \dots & 0,5 \\ 0 & 0,5 & - & \dots & 0,5 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0,5 & 0,5 & \dots & - \end{pmatrix}, \dots, c^n = \begin{pmatrix} - & 0,5 & 0,5 & \dots & 0 \\ 0,5 & - & 0,5 & \dots & 0 \\ 0,5 & 0,5 & - & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & - \end{pmatrix}$$
- Se calcula el grado de pertenencia de cada RPD, P^r , a cada centroide $c^{l,t}$, $\mu_{c^{l,t}}(P^r) \in [0, 1]$,

$$\mu_{c^{l,t}}(P^r) = \frac{(1/d(P^r, c^{l,t}))^{1/(b-1)}}{\sum_{u=1}^n (1/d(P^r, c^{u,t}))^{1/(b-1)}} \quad (3)$$

donde $d(P^r, c^{l,t})$ es la distancia de Minkowski, t es la iteración actual, y b indica el grado de difusividad de los clusters. Cuanto mayor sea el valor de b , más difuso es el cluster [1]. Normalmente este parámetro se fija con el valor 2.

- Se calculan los nuevos centroides según las RPD de los expertos incluidas en cada cluster.

$$c_{ij}^{l,t+1} = \frac{1}{|C^{l,t}|} \sum_{P^r \in C^{l,t}} p_{ij}^r, i, j \in \{1, \dots, n\}, \quad (4)$$

donde $|C^{l,t}|$ es el número de relaciones de preferencia que pertenecen al cluster C^l en la iteración t .

- El algoritmo termina cuando todos los clusters se estabilizan, es decir, cuando la variación de los grados de preferencia entre dos iteraciones consecutivas se acercan a 0.

$$\frac{\sum_{r=1}^m \sum_{l=1}^n |\mu_{c^{l,t}}(P^r) - \mu_{c^{l,t-1}}(P^r)|}{m \cdot n} \leq \epsilon \quad (5)$$

donde ϵ es un umbral que debería ser cercano a 0.

2) Modelado de la duda de subgrupos

Para evitar la pérdida de información en las etapas iniciales del PAC, en lugar de simplificar el modelado de preferencias aplicando técnicas de agregación, en esta propuesta consideramos que aunque las preferencias de los expertos en el subgrupo sean similares, reflejan la duda del grupo. Por tanto,



sea $G^l = \{e_1^l, \dots, e_n^l\}$ un subgrupo de expertos que pertenece al cluster, C^l , con RPD, $P^{l1} = (p_{ij}^{l1})_{n \times n}, \dots, P^{lr} = (p_{ij}^{lr})_{n \times n}$, construimos una RPDD, $HP^l = (h_{ij}^l)_{n \times n}$, $l \in \{1, \dots, n\}$, fusionando las preferencias de todos los expertos del subgrupo G^l , tal que, $h_{ij}^l = \{p_{ij}^{lk} | k = 1, 2, \dots, |G^l|\}$ siendo $|G^l|$ la cardinalidad de G^l .

3) Relevancia de subgrupos

La relevancia de cada subgrupo se obtiene mediante dos características:

- Tamaño: es el número de expertos del subgrupo.
- Cohesión: indica cómo de cerca están los expertos unos de otros dentro del grupo.

El tamaño se puede obtener directamente del proceso de *identificación de subgrupos*, sin embargo, para obtener la cohesión es necesario definir un nuevo enfoque. Esta fase se divide en 3 pasos que se detallan a continuación.

a) Cálculo de la cohesión de un subgrupo

Para obtener la cohesión de las preferencias de los expertos $HP^l = (h_{ij}^l)_{n \times n}$, que pertenecen al subgrupo G^l , hemos definido un método geométrico que consiste en calcular el área dada por las valoraciones máximas y mínimas de h_{ij}^l , sobre el conjunto de alternativas X . Como se puede observar en la Figura 3, el eje de abscisas X representa el conjunto Z formado por todos los pares de alternativas, donde cada par $z_t = (x_i, x_j), j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j$ es colocado equidistantemente sobre el eje de abscisas X . El área se obtiene mediante los valores máximo, p_{ij}^+ , y mínimo, p_{ij}^- , de cada par de alternativas. Para ello es necesario establecer el orden en el que los pares de alternativas son colocados en el eje de abscisas X . En esta propuesta, hemos considerado las valoraciones mínimas en orden creciente.

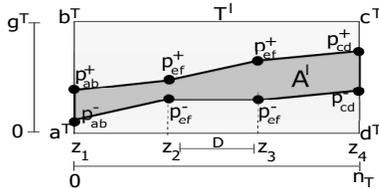


Figura 3. Representación gráfica de la cohesión de un subgrupo.

Formalmente el método geométrico se define como sigue:

1. Sea T^l el área total del rectángulo definido por los puntos a^T , b^T , c^T y d^T (ver Fig. 3), i.e., $T^l = g^T \times n^T$.
2. Sea $I = \bigcup_{i,j \in n, i \neq j} \{(i, j)\}$ un conjunto con todas las posibles combinaciones sobre el conjunto de alternativas $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Los valores máximos y mínimos para cada par de alternativas se obtienen de la siguiente forma:

$$\gamma_{ij}^- = \min\{\gamma_{ij}^1, \gamma_{ij}^2, \dots, \gamma_{ij}^s\}, \forall (i, j) \in I$$

$$\gamma_{ij}^+ = \max\{\gamma_{ij}^1, \gamma_{ij}^2, \dots, \gamma_{ij}^s\}, \forall (i, j) \in I$$

El primer y último par de alternativas considerado en el eje de la X son:

$$\gamma_{ab}^- = \min_{i,j \in I} \{\gamma_{ij}^-\}, (a, b) \in I$$

$$\gamma_{cd}^+ = \max_{i,j \in I} \{\gamma_{ij}^+\}, (c, d) \in I$$

Definimos una función f para obtener los índices de los pares de alternativas, $f : \{z_1, z_2, \dots, z_{n(n-1)}\} \rightarrow I$.

El área A^l , comprendida entre los valores máximo y mínimo ordenados en el eje de la X se calcula como sigue:

$$A^l = \left[\sum_{i,j \in I} (\gamma_{ij}^+ - \gamma_{ij}^-) - \frac{(\gamma_{ab}^+ - \gamma_{ab}^-) + (\gamma_{cd}^+ - \gamma_{cd}^-)}{2} \right] \cdot D \quad (6)$$

donde D es la distancia entre z_i y z_{i+1} , que en este caso es 1.

3. Finalmente se obtiene la cohesión,

$$cohesion(G^l) = 1 - \frac{A^l}{T^l} \quad (7)$$

b) Cálculo del tamaño de un subgrupo

El valor del tamaño de un subgrupo G^l , se puede obtener directamente de la fase de *identificación de subgrupos*, pero su representación debe ser ajustada y adaptada al número de expertos que participan en el problema de TDG-GS. Para ello, proponemos un proceso basado en computación con palabras en el que el tamaño es modelado mediante una función de pertenencia difusa $\mu_{tamaño}$ como la mostrada en la Figura 4, en la que el universo de discurso es el número de expertos en el subgrupo. Los puntos a y b de la función dependen del número de alternativas y expertos en el problema de TDG-GS.

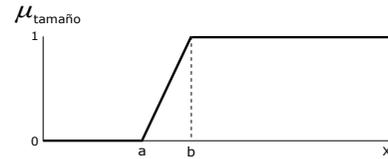


Figura 4. Función de pertenencia

c) Cálculo de la relevancia de un subgrupo

Para obtener el peso de cada subgrupo, agregamos los valores que hemos obtenido para el tamaño y cohesión con la siguiente función.

Definición 4: Sea $Y_{G^l} = \{y_1, y_2\}$ los valores obtenidos para el tamaño y cohesión, $y_1, y_2 \in [0, 1]$, del subgrupo G^l , los cuales son agregados mediante la siguiente ecuación,

$$\varphi(Y_{G^l}) = (1 + y_2)^{y_1 \beta} \quad (8)$$

siendo $\beta > 0$ un parámetro para incrementar/decrementar la influencia de la cohesión en el cálculo del peso.

Finalmente, estos valores son normalizados.

$$w_l = \frac{\varphi(Y_{G^l})}{\sum_{z=1}^n \varphi(Y_{G^z})}, \forall l \in \{1, \dots, n\}. \quad (9)$$

III-D. Obtención del grado de consenso

El grado de consenso entre expertos se calcula mediante un proceso de 3 pasos.

1. Para cada par de subgrupos G^l y G^k , se calcula una matriz de similitud $MS^{lk} = (m_{ij}^{lk})_{n \times n}$, $m_{ij}^{lk} = 1 -$

$d(h_{ij}^l, h_{ij}^k)$, donde d es una medida de distancia para EDD [7].

En este paso hay que tener en cuenta que si el número de valores en el EDD de cada RPDD es diferente, es necesario aplicar un proceso de normalización (ver Def. 3. Por tanto, todas las RPDD $HP^l(h_{ij}^l)_{n \times n}$, son normalizadas, $\overline{HP}^l = (\overline{h}_{ij}^l)_{n \times n}$ antes de calcular las matrices de similitud.

2. Las matrices de similitud son agregadas para obtener una matriz de consenso, $MC = (mc_{ij})_{n \times n}$. Aunque diferentes operadores de agregación pueden ser utilizados, sin pérdida de generalidad en esta propuesta usamos la media aritmética,

$$mc_{ij} = \frac{\sum_{l=1}^{n-1} \sum_{k=l+1}^n ms_{ij}^{lk}}{n(n-1)/2} \quad (10)$$

3. El grado de consenso se calcula a dos niveles utilizando la matriz de consenso MC :

- Nivel de alternativas: el grado de consenso para cada alternativa se calcula como,

$$ca_i = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1, i \neq j}^n mc_{ij} \quad (11)$$

- Nivel de relación de preferencia: el grado de consenso entre todos los expertos que participan en el problema de TDG-GS se calcula como,

$$gc = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n ca_i \quad (12)$$

III-E. Control de consenso

En esta fase se compara el grado de consenso gc obtenido en la fase anterior, con el umbral de consenso establecido $\vartheta \in [0, 1]$. Si $gc \geq \vartheta$, el proceso de consenso termina, en caso contrario, es necesario realizar otra ronda de discusión. El número máximo de rondas viene dado por el parámetro Max_rondas .

III-F. Proceso de feedback adaptativo

Cuando el grado de consenso alcanzado gc no es suficiente, es necesario realizar otra ronda de discusión para incrementar el grado de consenso entre los expertos que participan en el problema. Esta ronda de discusión está guiada por un proceso de feedback. Los modelos de consenso existentes para TDG-GS no tienen en cuenta el grado de consenso alcanzado en cada ronda para adaptar el proceso de feedback, esto implica un proceso de supervisión más complejo y largo. Dado que el segundo objetivo de esta propuesta es reducir la constante supervisión de las preferencias de los expertos, en este modelo se define un proceso de feedback adaptativo que adapta la generación de recomendaciones según el grado de consenso alcanzado en cada ronda. Para distinguir entre los dos procesos de feedback, se introduce un nuevo parámetro δ . El proceso de feedback se divide en 3 pasos.

- Obtener una matriz colectiva, HP^C , agregando las preferencias representadas mediante RPDD normalizadas

$\{\overline{HP}^1, \dots, \overline{HP}^n\}$ utilizando un operador de agregación para CDD [7].

- Calcular la proximidad entre cada subgrupo $\{\overline{HP}^1, \dots, \overline{HP}^n\}$, y la matriz colectiva HP^C , utilizando una medida de similitud para CDD [7]:

$$pr^l = sim(HP^C, \overline{HP}^l) = 1 - d(HP^C, \overline{HP}^l) \quad (13)$$

Los valores de proximidad obtenidos pr , son utilizados para identificar a los subgrupos más alejados de la opinión colectiva.

- Dependiendo del nivel de consenso alcanzado, el proceso de feedback puede ir dirigido a todos los expertos de un subgrupo o sólo a aquellos expertos más alejados. A continuación definimos ambos procesos.

Proceso de feedback en grupo

Cuando el grado de consenso $gc < \delta$, significa que el consenso es *bajo* y es necesario realizar muchos cambios para incrementar el grado de consenso. En este caso, se recomienda a todos los expertos de los subgrupos más alejados que modifiquen sus preferencias. Para ello, es necesario identificar los subgrupos más alejados y seleccionar los pares de alternativas a cambiar.

- Si $pr^l \leq \overline{pr}$, entonces seleccionamos el subgrupo G^l , donde \overline{pr} es el valor medio de los valores de proximidad obtenidos, $\overline{pr} = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n pr^l$.
- Si $ca_i \leq \vartheta$, entonces seleccionamos la alternativa x_i y buscamos los pares de alternativas,
 - Si $pr_{ij}^l \leq \overline{pr}_i$, entonces seleccionamos el par de alternativas (x_i, x_j) , siendo $\overline{pr}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n pr_{ij}^l$ y $pr_{ij}^l = 1 - d(h_{ij}^C, h_{ij}^l)$.

Una vez se hayan identificado los subgrupos y pares de alternativas, es necesario establecer la dirección del cambio, es decir, si hay que incrementar o decrementar los valores de las preferencias. Las reglas de dirección son las siguientes:

- Si $\nu(h_{ij}^l) < \nu(h_{ij}^C)$, entonces todos los expertos que pertenecen al subgrupo G^l deberían incrementar sus preferencias para el par de alternativas (x_i, x_j) .
- Si $\nu(h_{ij}^l) > \nu(h_{ij}^C)$, entonces todos los expertos que pertenecen al subgrupo G^l deberían decrementar sus preferencias para el par de alternativas (x_i, x_j) .

Donde los valores $\nu(h_{ij}^l)$ y $\nu(h_{ij}^C)$ son obtenidos mediante la función de score para EDD definida mediante la siguiente ecuación:

$$\nu(h) = \frac{1}{\#h} \sum_{s=1}^{\#h} \gamma^s \quad (14)$$

Proceso de feedback individual

En este caso $\delta \leq gc < \vartheta$, lo que significa que el nivel de consenso es *alto*, pero no lo suficiente para alcanzar el consenso, por tanto, el número de cambios es mucho menor que con el anterior proceso de feedback, y sólo aquellos expertos cuya opinión esté más alejada de la opinión colectiva tienen que cambiar sus preferencias. Para ello, hay que identificar el



subgrupo G^l , el par de alternativas (x_i, x_j) y los expertos e_r que están en desacuerdo.

- Si $pr^l \leq \overline{pr}$, entonces seleccionamos el subgrupo G^l .
- Si $ca_i \leq \vartheta$, entonces seleccionamos la alternativa x_i y
 - Si $pr_{ij}^l \leq \overline{pr}_i$, entonces seleccionamos el par de alternativas (x_i, x_j) .
- Si $1 - d(\nu(h_{ij}^C), p_{ij}^{lr}) \leq \overline{pr}_i$, entonces seleccionamos el experto e_r .

Los expertos seleccionados deberían cambiar sus preferencias según las siguientes reglas de dirección.

- Si $p_{ij}^{lr} < \nu(h_{ij}^C)$, entonces el experto $e_r \in G^l$ debería incrementar su preferencia sobre el par de alternativas (x_i, x_j) .
- Si $p_{ij}^{lr} > \nu(h_{ij}^C)$, entonces el experto $e_r \in G^l$ debería decrementar su preferencia para el par de alternativas (x_i, x_j) .
- Si $p_{ij}^{lr} = \nu(h_{ij}^C)$, no es necesario realizar cambios.

IV. CONCLUSIONES

Los problemas de TDG-GS son cada vez más comunes y las decisiones son más apreciadas y aceptadas por los expertos involucrados cuando éstas son consensuadas. Para ello, es necesario aplicar PAC. Los modelos de consenso existentes, consumen mucho tiempo, debido a la supervisión de las preferencias de los expertos y en problemas de TDG-GS este tiempo se incrementa. Por tanto, esta contribución se centra en reducir el coste temporal relacionado con la escalabilidad y el proceso de supervisión de las preferencias de los expertos definiendo un nuevo modelo de consenso para TDG-GS.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo está parcialmente financiado por el proyecto de investigación TIN2015-66524-P, el Ministerio de Economía y Competitividad Juan de la Cierva Incorporación (FPDI-2013-18193) y fondos FEDER.

REFERENCIAS

- [1] J. Bezdek. *Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms*. Springer, 1981.
- [2] X.H. Chen and Rong Liu. Improved clustering algorithm and its application in complex huge group decision-making. *Systems Engineering and Electronics*, 28(11):1695–1699, 2006.
- [3] Á. Labella, Y. Liu, R. M. Rodríguez, and L. Martínez. Analyzing the performance of classical consensus models in large scale group decision making: A comparative study. *Applied Soft Computing*, 67:677–690, 2018.
- [4] I. Palomares, F.J. Estrella, L. Martínez, and F. Herrera. Consensus under a fuzzy context: Taxonomy, analysis framework afryca and experimental case of study. *Information Fusion*, 20:252–271, 2014.
- [5] I. Palomares, L. Martínez, and F. Herrera. A consensus model to detect and manage noncooperative behaviors in large-scale group decision making. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 22(3):516–530, 2014.
- [6] F.J. Quesada, I. Palomares, and L. Martínez. Managing experts behavior in large-scale consensus reaching processes with uninorm aggregation operators. *Applied Soft Computing*, 35:873 – 887, 2015.
- [7] R.M. Rodríguez, L. Martínez, V. Torra, Z.S. Xu, and F. Herrera. Hesitant fuzzy sets: state of the art and future directions. *International Journal of Intelligent Systems*, 29(6):495–524, 2014.
- [8] S. Saint and J. R. Lawson. *Rules for Reaching Consensus. A Modern Approach to Decision Making*. Jossey-Bass, 1994.
- [9] V. Torra. Hesitant fuzzy sets. *International Journal of Intelligent Systems*, 25(6):529–539, 2010.

- [10] X.H. Xu, Z.J. Du, and X.H. Chen. Consensus model for multi-criteria large-group emergency decision making considering non-cooperative behaviors and minority opinions. *Decision Support Systems*, 79:150 – 160, 2015.
- [11] B. Zhu and Z.S. Xu. Regression methods for hesitant fuzzy preference relations. *Technological and Economic Development of Economy*, 19:S214–S227, 2013.