Estudio del Modus Tollens para implicaciones borrosas

Isabel Aguiló, Jaume Suñer, Joan Torrens
Soft Computing, Image Processing and Aggregation Research Group (SCOPIA)
Department of Mathematics and Computer Science
University of the Balearic Islands. 07122 Palma de Mallorca, Spain.
Balearic Islands Health Research Institute (IdISBa). 07010 Palma de Mallorca, Spain.
isabel.aguilo@uib.es, jaume.sunyer@uib.es, jts224@uib.es

***Resumen*—En la lógica borrosa y el razonamiento aproximado, la propiedad del Modus Tollens se tranforma en una desigualdad funcional involucrando una t-norma, una implicación borrosa y una negación. En este trabajo ampliamos dicha desigualdad substituyendo la t-norma por una uninorma conjuntiva, dando lugar al llamado U-Modus Tollens. Estudiamos esta nueva propiedad para implicaciones derivadas de uninormas, demostrando que existen numerosas soluciones entre las implicaciones residuadas o RU-implicaciones.**

***Index Terms*—Función de implicación borrosa, Modus Tollens, uninorma, implicación residuada, RU-implicación.**

I. Introducción

Las funciones de implicación borrosas se usan habitualmente, tanto para modelar los condicionales borrosos como también en el proceso de inferencia borrosa. De esta forma, la importancia de las funciones de implicación borrosas radica principalmente en sus aplicaciones que se extienden a muchos campos, y no se limitan únicamente al razonamiento aproximado y al control borroso (ver por ejemplo [3], [5], [14]). Ese es también el motivo de que resulte importante disponer de una gama de funciones de implicación borrosas tan amplia como sea posible (ver [25]), así como caracterizar aquellas que cumplen determinadas propiedades que resultan importantes en las aplicaciones.

Entre estas propiedades destacan las reglas de inferencia básicas dadas por el Modus Ponens y el Modus Tollens. En el ámbito de la lógica borrosa, dichas reglas se traducen en sendas desigualdades funcionales que se escriben respectivamente como

$$T(x, I(x, y)) \leq y \quad \text{para todos} \quad x, y \in [0, 1], \tag{1}$$

y

$$T(N(y), I(x, y)) \leq N(x) \quad \text{para todos} \quad x, y \in [0, 1], \tag{2}$$

donde T es una t-norma, I es una función de implicación borrosa y N una negación.

Debido a su importancia, ambas reglas de inferencia han sido extensivamente estudiadas por diversos autores (ver por ejemplo [2], [3], [12], [14], [22]–[24], [26]). Los primeros estudios se realizaron para implicaciones derivadas de t-normas y t-conormas. En concreto, las implicaciones residuadas y las (S, N)-implicationes fueron estudiadas en [2], [22], [23] y las QL y D-implicationes en [24]. Como generalización de estas clases de implicaciones, se han introducido otras derivadas de uninormas, en especial las RU-implicaciones y las (U, N)-implicaciones (ver por ejemplo [1], [4], [6], [13], [18]–[20]). Recientemente, el Modus Ponens y el Modus Tollens se han estudiado también para estos dos tipos de implicaciones derivadas de uninormas (ver [12] y [11] respectivamente).

De hecho, aún cuando las uninormas se introdujeron inicialmente en el ámbito de las funciones de agregación (ver [8], [27]), también han sido estudiadas como operadores lógicos dado que siempre son conjuntivas o disyuntivas. En particular, las uninormas conjuntivas son utilizadas a menudo como conjunciones borrosas y, en este sentido, substituir en las reglas del Modus Ponens y del Modus Tollens la t-norma T por una uninorma conjuntiva U resulta natural e interesante a la vez. En esta línea, dicha substitución en el Modus Ponens fue ya considerada en [15], [16] dando lugar a la propiedad llamada U-Modus Ponens (o también U-condicionalidad). Lo primero que se deriva de estos trabajos es que las implicaciones usuales, como las derivadas de t-normas y t-conormas o las implicaciones de Yager, no satisfacen la U-condicionalidad. Así, los candidatos posibles para satisfacer el U-Modus Ponens aparecen entre las implicaciones derivadas de uninormas. Se ha estudiado y resuelto ya para el caso de RU-implicaciones en [15], [16] y se ha iniciado su estudio para el caso de (U, N)-implicaciones en [17].

Por el contrario, no se ha realizado un estudio similar para el caso del Modus Tollens. Precisamente, en este trabajo queremos rellenar ese hueco y estudiar la generalización del Modus Tollens que se obtiene substituyendo la t-norma T por una uninorma U, dando lugar a la propiedad que llamaremos U-Modus Tollens. Esto es, queremos estudiar la propiedad

$$U(N(y), I(x, y)) \leq N(x) \quad \text{para todos} \quad x, y \in [0, 1], \tag{3}$$

donde U es una uninorma, I es una función de implicación borrosa y N una negación.

En cuanto a la organización del trabajo, tras esta introducción empezamos con un capítulo de preliminares dedicado a que el artículo sea tan autocontenido como sea posible. La sección 3 presenta la definición y primeras propiedades del Modus Tollens respecto de una uninorma U. La sección 4 estudia el U-Modus Tollens para RU-implicaciones derivadas de tres tipos de uninormas: las de $\mathcal{U}_{\text{mín}}$, las representables y las idempotentes. Finalmente, la sección 5 incluye las conclusiones y algunas propuestas de trabajo futuro.

II. Preliminares

Supondremos que el lector está familiarizado con los resultados básicos sobre t-normas, t-conormas, negaciones y funciones de implicación borrosas (para detalles sobre t-normas, véase [9]; sobre implicaciones, véase [3], [5], [7]). A continuación recordaremos solo algunos conceptos sobre funciones de implicación borrosas y sobre uninormas con el objetivo de que el trabajo sea lo más autocontenido posible.

II-A. Funciones de implicación borrosas

Definición 1: ([3], [7]) Una operación binaria $I : [0,1]^2 \to [0,1]$ es una *función de implicación borrosa*, o una *implicación borrosa*, si satisface:

(I1) $I(x,z) \geq I(y,z)$ cuando $x \leq y$, para todo $z \in [0,1]$.
(I2) $I(x,y) \leq I(x,z)$ cuando $y \leq z$, para todo $x \in [0,1]$.
(I3) $I(0,0) = I(1,1) = 1$ e $I(1,0) = 0$.

Nótese que, de la definición, se desprende que $I(0,x) = 1$ e $I(x,1) = 1$ para todo $x \in [0,1]$ mientras que los valores simétricos $I(x,0)$ e $I(1,x)$ no se derivan de la definición.

Definición 2: ([3], [7]) Sea I una implicación borrosa. La función N_I definida por $N_I(x) = I(x,0)$ para todo $x \in [0,1]$, se llama la *negación natural* de I y es siempre una negación borrosa.

A continuación recordamos algunas de las propiedades más habituales de las implicaciones borrosas que utilizaremos a lo largo del trabajo:

- El *principio de neutralidad* por la izquierda:
$$I(1,y) = y \quad \text{para todo} \quad y \in [0,1]. \qquad (NP)$$
- El *principio de identidad*:
$$I(x,x) = 1 \quad \text{para todo } x \in [0,1]. \qquad (IP)$$
- La *contraposición* respecto de una negación N:
$$I(x,y) = I(N(y),N(x)) \quad \text{para todos} \quad x,y \in [0,1]. \qquad CP(N)$$

II-B. Uninormas

Definición 3: ([8], [27]) Una *uninorma* es una aplicación $U : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ asociativa, conmutativa, creciente en cada variable y tal que existe un elemento $e \in [0,1]$, llamado *elemento neutro*, tal que $U(e,x) = x$ para todo $x \in [0,1]$.

Evidentemente, una uninorma con elemento neutro $e = 1$ es una t-norma y una uninorma con elemento neutro $e = 0$ es una t-conorma. Para cualquier otro valor $e \in]0,1[$ la operación se comporta como una t-norma en $[0,e]^2$, como una t-conorma en $[e,1]^2$ y toma valores entre el mínimo y el máximo en el conjunto $A(e)$ dado por

$$A(e) = [0,e[\times]e,1] \cup]e,1] \times [0,e[.$$

Denotaremos de forma habitual una uninorma con elemento neutro e y t-norma y t-conorma subyacentes T y S, respectivamente, por $U \equiv \langle T,e,S \rangle$. Cualquier uninorma satisface que $U(0,1) \in \{0,1\}$; cuando $U(1,0) = 0$, se dice que la uninorma U es *conjuntiva*, mientras que, cuando $U(1,0) = 1$, se dice que U es *disyuntiva*.

Existen muchas clases diferentes de uninormas. Las más habituales pueden hallarse en el artículo recopilatorio [10]. Recordemos aquí la estructura de tres de las clases más usadas de uninormas conjuntivas.

Proposición 1: ([8], [10]) Sea $U : [0,1]^2 \to [0,1]$ una uninorma con elemento neutro $e \in]0,1[$. Si $U(0,1) = 0$, entonces la sección $x \mapsto U(x,1)$ es continua excepto para $x = e$ si y solo si U viene dada por $U(x,y) =$

$$\begin{cases} eT\left(\frac{x}{e}, \frac{y}{e}\right) & \text{si } (x,y) \in [0,e]^2, \\ e + (1-e)S\left(\frac{x-e}{1-e}, \frac{y-e}{1-e}\right) & \text{si } (x,y) \in [e,1]^2, \\ \text{mín}(x,y) & \text{si } (x,y) \in A(e), \end{cases}$$

donde T es una a t-norma y S es una t-conorma.
Denotaremos por $\mathcal{U}_{\text{mín}}$ a esta clase de uninormas, y por $U \equiv \langle T,e,S \rangle_{\text{mín}}$ a una uninorma de $\mathcal{U}_{\text{mín}}$ con elemento neutro e y t-norma y t-conorma subyacentes T y S, respectivamente, como .

Las uninormas idempotentes fueron completamente caracterizadas para el caso general en [21] de la siguiente forma.

Proposición 2: ([10], [21]) U es una uninorma idempotente con elemento neutro $e \in [0,1]$ si y solo si existe una función no creciente $g : [0,1] \to [0,1]$, simétrica respecto de la función identidad, con $g(e) = e$, tal que $U(x,y) =$

$$\begin{cases} \text{mín}(x,y) & \text{si } y < g(x) \text{ o } (y = g(x) \text{ y } x < g^2(x)), \\ \text{máx}(x,y) & \text{si } y > g(x) \text{ o } (y = g(x) \text{ y } x > g^2(x)), \\ x \text{ o } y & \text{si } y = g(x) \text{ y } x = g^2(x), \end{cases}$$

y U es conmutativa en los puntos (x,y) tales que $y = g(x)$ con $x = g^2(x)$.
Denotaremos por $U \equiv \langle g,e \rangle_{\text{ide}}$ a una uninorma idempotemte U con elemento neutro e y función asociada g, y a la clase de todas las uninormas idempotentes, por $\mathcal{U}_{\text{ide}}$.

Obviamente, para estas uninorrmas, la t-norma subyacente es el mínimo y la t-conorma subyacente es el máximo.

Definición 4: ([8], [10]) Diremos que una uninorma U, con elemento neutro $e \in]0,1[$, es *representable* si existe una función estrictamente creciente $h : [0,1] \to [-\infty,+\infty]$ (llamada *generador aditivo* de U, que es único excepto una constante multiplicativa $k > 0$), con $h(0) = -\infty$, $h(e) = 0$ y $h(1) = +\infty$, tal que U viene dada por

$$U(x,y) = h^{-1}(h(x) + h(y))$$

para todos $(x,y) \in [0,1]^2 \setminus \{(0,1),(1,0)\}$. Se tiene que $U(0,1) = U(1,0) = 0$ o $U(0,1) = U(1,0) = 1$.

Denotaremos por $U \equiv \langle e,h \rangle_{\text{rep}}$ a una uninorma representable con elemento neutro $e \in]0,1[$ y generador aditivo, y a la clase de todas la uninormas representables, por $\mathcal{U}_{\text{rep}}$.

Por otra parte, existen diversas clases de funciones de implicación derivadas de uninormas. Recordamos aquí el caso de las RU-implicaciones.

Definición 5: ([6]) Sea U una uninorma. La *operación residuada* obtenida a partir de U es la operación binaria dada por

$$I_U(x, y) = \sup\{z \in [0, 1] \mid U(x, z) \leq y\}$$

para todos $x, y \in [0, 1]$.

Proposición 3: ([6]) Sea U una uninorma y I_U su operación residuada. Entonces I_U es una implicación si y solo si $U(x, 0) = 0$ para todo $x < 1$. En tal caso, I_U recibe el nombre de *RU-implicación*.

Esto incluye todas las uninormas conjuntivas, pero también muchas de disyuntivas, por ejemplo, en las clases de las uninormas representables (véase [6]) y las idempotentes (véase [18]). Sin embargo, en el caso de trabajar con uninormas continuas por la izquierda, claramente se obtiene que I_U es una implicación si y solo si U es conjuntiva.

III. Modus Tollens respecto de una uninorma

Como ya hemos comentado el objetivo principal de este trabajo es el estudio del Modus Tollens substituyendo la t-norma T por una uninorma U, de una forma similar a como se hizo para el Modus Ponens en [15], [16]. Damos a continuación la definición formal.

Definición 6: Diremos que una función de implicación borrosa I y una negación N satisfacen el *Modus Tollens respecto de una uninorma U*, o simplemente el *U-Modus Tollens*, si

$$U(N(y), I(x, y)) \leq N(x) \quad \text{para todos} \quad x, y \in [0, 1]. \quad (4)$$

Notemos que la definición se ha dado para una uninorma en general y no para una que sea conjuntiva (que es el objetivo real puesto que debe generalizar la conjunción o t-norma). Esto es debido a que no es necesario dado que dicha propiedad sobre U se deriva directamente de la definición como sigue.

Proposición 4: Sean I una función de implicación borrosa y N una negación que satisfacen el Modus Tollens respecto de una uninorma U. Entonces la uninorma U ha de ser necesariamente conjuntiva.

De la definición resulta claro que el U-Modus Tollens no depende sólo de la uninorma y la implicación, sino también, y en especial, de la negación utilizada en la ecuación (4). Ilustramos este hecho en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1: Veamos cómo se comporta el U-Modus Tollens en los casos extremos de considerar la negación más pequeña y la más grande.

i) Consideremos la negación más pequeña $N = N_{D_1}$ dada por

$$N_{D_1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Notemos que en este caso (4) siempre se satisface para todo $y > 0$ dado que la uninorma U es conjuntiva. Mientras que para $y = 0$ y $x > 0$ tenemos que

$$U(N(0), I(x, 0)) = U(1, N_I(x)) \leq N(x) = 0,$$

de donde se deduce que $N_I(x) = 0$ para todo $x > 0$. En resumen, una implicación I y la negación N_{D_1} satisfacen el Modus Tollens respecto de una uninorma conjuntiva U si y sólo si N_I es la propia negación N_{D_1}.

ii) Consideremos ahora la negación más grande $N = N_{D_2}$ dada por

$$N_{D_2}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

En este caso se puede ver, de forma parecida, que una implicación I y la negación N_{D_2} satisfacen el Modus Tollens respecto de una uninorma conjuntiva U si y sólo si $I(1, y) = 0$ para todo $y < 1$.

De forma similar al caso de t-normas, cuando la uninorma U es continua por la izquierda se puede dar una caracterización sencilla de las soluciones.

Proposición 5: Sean I una función de implicación borrosa, N una negación y U una uninorma conjuntiva. Si U es continua por la izquierda, I, N satisfacen el Modus Tollens respecto de U si y sólo si

$$I(x, y) \leq I_U(N(y), N(x)) \quad \text{para todos } x, y \in [0, 1],$$

donde I_U indica la implicación residuada derivada de la uninorma U.

Sin embargo, la condición anterior puede ser difícil de comprobar según los casos. Queremos estudiar con más profundidad la condición del Modus Tollens para dar resultados más específicos según sean U y N. Un primer análisis de la definición anterior permite dar algunos resultados generales que listamos en la siguiente proposición.

Proposición 6: Sean I una función de implicación borrosa y N una negación que satisfacen el Modus Tollens respecto de una uninorma conjuntiva U. Sea e el elemento neutro de U, entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $U(N(y), I(1, y)) = 0$ para todo $y \in [0, 1]$.
2. $N_I(x) \leq N(x)$ para todo $x \in [0, 1]$. Además, para todo $x \in [0, 1]$ tal que $N_I(x) \geq e$ ha que ser $N(x) = 1$.
3. Sea $\alpha_N = \sup\{x \in [0, 1] \mid N(x) \geq e\}$. Entonces, se satisface una y sólo una de las siguientes condiciones:
   - $N(x) < e$ para todo $x > 0$ (es decir, $\alpha_N = 0$),
   - $\alpha_N > 0$ y se tiene $I(1, y) = 0$ para todo $y < \alpha_N$.
4. Si I satisface (NP), ha de ser necesariamente $\alpha_N = 0$.
5. Si I satisface (IP) y $N(x) < 1$ para todo $x > 0$, ha de ser necesariamente $\alpha_N = 0$.

A partir del apartado 3) de la proposición anterior, se deduce que si $\alpha_N > 0$ (y eso se da por ejemplo siempre que N sea continua) las implicaciones habituales derivadas de t-normas y t-conormas (R, (S, N), QL y D-implicaciones), así como las implicaciones de Yager no satisfacen nunca el U-Modus Tollens (ya que para todas ellas se satisface (NP)). En cambio, para diversos tipos de implicaciones derivadas de uninormas, en especial las RU-implicaciones, si se tiene, o se puede tener, $I(1, y) = 0$ para todo $y < 1$.

Dedicaremos por tanto la próxima sección al estudio del U-Modus Tollens para RU-implicaciones. Antes, damos algunos resultados para implicaciones en general en el caso de negaciones con $\alpha_N = 0$, es decir , tales que $N(x) < e$ para todo $x > 0$. El primero de ellos hace referencia a que, si U es de $\mathcal{U}_{\text{mín}}$, el U-Modus Tollens está garantizado para todos los valores con $x \le y$ y sólo hace falta verificar que se satisface para el resto de valores, es decir, para $y < x$.

Proposición 7: Sean I una función de implicación borrosa, N una negación con $\alpha_N = 0$ y U una uninorma de $\mathcal{U}_{\text{mín}}$ con elemento neutro e. Entonces I, N satisfacen el Modus Tollens respecto de U si y sólo si

$$U(N(y), I(x, y)) \le N(x) \quad \text{para todos } y < x.$$

Pasamos ahora a estudiar el caso en que la implicación satisface (NP), que es el caso de la mayoria de implicaciones derivadas de t-normas y t-conormas.

Proposición 8: Sean I una función de implicación borrosa que satisface (NP), N una negación y U una uninorma conjuntiva con elemento neutro e. Si I, N satisfacen el Modus Tollens respecto de U, entonces son ciertas las siguientes propiedades:

1. $U(N(y), y) = 0$ para todo $y \in [0, 1]$.
2. $N(x) = 0$ para todo $x \ge e$ y $N(x) < e$ para todo $x > 0$.
3. $U(N(y), I(e, y)) = 0$ para todo $y \in [0, 1]$.
4. Si N es estrictamente decreciente en el intervalo $]0, e[$, ha de ser $I(x, y) < e$ para todos $y < x < e$.

Podemos dar ahora una caracterización de las soluciones del U-Modus Tollens para el caso en que I satisfaga (NP), U sea de $\mathcal{U}_{\text{mín}}$ y N sea estrictamente decreciente en el intervalo $]0, e[$.

Teorema 1: Sean I una función de implicación borrosa que satisface (NP), $U \equiv \langle T_U, e, S_U \rangle_{\text{mín}}$ y N una negación estrictamente decreciente en $]0, e[$. Entonces I, N satisfacen el Modus Tollens respecto de U, si y sólo si se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $U(N(y), I(e, y)) = 0$ para todo $y \in [0, 1]$.
2. $N(x) = 0$ para todo $x \ge e$ y $N(x) < e$ para todo $x > 0$.
3. $I(x, y) < e$ para todos $y < x < e$.
4. I' y N' satisfacen el Modus Tollens respecto de la t-norma T_U para todos $y < x$, donde I' y N' vienen dadas respectivamente por

$$I'(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \le y \\ \frac{I(ex, ey)}{e} & \text{si } y < x \end{cases} \tag{5}$$

$$N'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{N(ex)}{e} & \text{en cualquier otro caso,} \end{cases} \tag{6}$$

Ejemplo 2: Consideremos la uninorma de $\mathcal{U}_{\text{mín}}$, $U \equiv \langle T_U, e, S_U \rangle_{\text{mín}}$ donde $T_U = T_{\mathbf{LK}}$ es la t-norma de Łukasiewicz y S_U es una t-conorma cualquiera. Sea N_e la negación dada por

$$N_e(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ e - x & \text{si } 0 < x < e \\ 0 & \text{si } x \ge e. \end{cases}$$

Por último, consideremos la implicación:

$$I_e(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \text{ o } y = 1 \\ \text{máx}(e - x, y) & \text{si } 0 < x \le e \text{ y } 0 \le y \le e \\ y & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Es fácil ver que estos operadores satisfacen todas las condiciones del teorema 1 y por lo tanto I_e, N_e satisfacen el Modus Tollens respecto de la uninorma U.

Nota 1: Notemos que en el ejemplo anterior, al igual que en el teorema 1, la t-conorma S_U puede ser cualquiera y lo mismo sucede con los valores de la implicación I fuera del rectángulo $[0, e[^2$ con la única condición de que satisfaga (NP).

IV. U-MODUS TOLLENS PARA RU-IMPLICACIONES

En el apartado anterior hemos visto que si trabajamos con negaciones N con $\alpha_N > 0$ (y ésto incluye las negaciones continuas), entonces se requiere que las implicaciones satisfagan $I(1, y) = 0$ para los valores de $y < \alpha_N$. Esta propiedad se satisface en RU-implicaciones derivadas, por ejemplo, de uninormas representables y también de algunas idempotentes. Por este motivo queremos estudiar en este apartado el U-Modus Tollens para RU-implicaciones. Lo haremos para RU-implicaciones derivadas de los tres tipos de uninormas conjuntivas recordados en los preliminares y lo dividiremos en una sección para cada caso.

IV-A. RU-implicaciones derivadas de uninormas en $\mathcal{U}_{\text{mín}}$

Veremos que en este caso tampoco son posibles negaciones continuas y volvemos a necesitar negaciones con $\alpha_N = 0$. En lo que sigue tomaremos U_0 una uninorma de $\mathcal{U}_{\text{mín}}$ de la forma $U_0 \equiv \langle T_0, e_0, S_0 \rangle_{\text{mín}}$ i I_{U_0} su implicación residuada (ver [6] para detalles sobre su estructura). Entonces tenemos los siguientes resultados.

Proposición 9: Sea I_{U_0} la implicación borrosa derivada de una uninorma $U_0 \equiv \langle T_0, e_0, S_0 \rangle_{\text{mín}}$, N una negación y $U \equiv \langle T_U, e, S_U \rangle$ una uninorma conjuntiva. Si I_{U_0}, N satisfacen el Modus Tollens respecto de U, entonces son ciertas las siguientes propiedades:

1. $U(N(y), y) = 0$ para todo $y \le e_0$.
2. $\alpha_N = 0$ (es decir, $N(x) < e$ para todo $x > 0$).
3. $N(x) = 0$ para todo $x \ge e$.
4. Si $e_0 < e$, T_U es continua y $U(e_0, e_0) = e_0$, se satisface $N(x) < e_0$ para todo $x > 0$ y $N(x) = 0$ para todo $x \ge e_0$.

Para caracterizar las soluciones en este caso distinguiremos dos posibilidades según sea el orden de los elementos neutros e y e_0.

Teorema 2: Sea I_{U_0} la implicación borrosa derivada de una uninorma $U_0 \equiv \langle T_0, e_0, S_0 \rangle_{\text{mín}}$, N una negación y U una uninorma conjuntiva con elemento neutro $e = e_0$. Entonces I_{U_0}, N satisfacen el Modus Tollens respecto de U, si y sólo si se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $N(x) = 0$ para todo $x \ge e$ y $N(x) < e$ para todo $x > 0$.

2. I_{T_0} y N' satisfacen el Modus Tollens respecto de la t-norma T_U para todos $y < x$, donde I_{T_0} es la implicación residuada derivada de la t-norma T_0 y N' viene dada por la ecuación (6).

Teorema 3: Sea I_{U_0} la implicación borrosa derivada de una uninorma $U_0 \equiv \langle T_0, e_0, S_0 \rangle_{\text{mín}}$, N una negación y U una uninorma conjuntiva con elemento neutro e con $e < e_0$. Supongamos que U_0 viene dada por $U_0(x,y) =$

$$\begin{cases} eT_0'\left(\frac{x}{e}, \frac{y}{e}\right) & \text{si } x,y \in [0,e] \\ e + (e_0 - e)T_0''\left(\frac{x-e}{e_0-e}, \frac{y-e}{e_0-e}\right) & \text{si } x,y \in [e,e_0] \\ e_0 + (1-e_0)S_0\left(\frac{x-e_0}{1-e_0}, \frac{y-e_0}{1-e_0}\right) & \text{si } x,y \in [e_0,1] \\ \text{mín}(x,y) & \text{en cualquier otro caso,} \end{cases}$$

siendo T_0', T_0'' t-normas. Entonces I_{U_0}, N satisfacen el Modus Tollens respecto de U, si y sólo si se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $N(x) = 0$ para todo $x \geq e$ y $N(x) < e$ para todo $x > 0$.
2. $I_{T_0'}$ y N' satisfacen el Modus Tollens respecto de la t-norma T_U para todos $y < x$, donde $I_{T_0'}$ es la implicación residuada derivada de la t-norma T_0' y N' viene dada por la ecuación (6).

Teorema 4: Sea I_{U_0} la implicación borrosa derivada de una uninorma $U_0 \equiv \langle T_0, e_0, S_0 \rangle_{\text{mín}}$, N una negación y U una uninorma conjuntiva con elemento neutro e con $e_0 < e$. Supongamos que U viene dada por $U(x,y) =$

$$\begin{cases} e_0T_U'\left(\frac{x}{e_0}, \frac{y}{e_0}\right) & \text{si } x,y \in [0,e_0] \\ e_0 + (e - e_0)T_U''\left(\frac{x-e_0}{e-e_0}, \frac{y-e_0}{e-e_0}\right) & \text{si } x,y \in [e_0,e] \\ e + (1-e)S_U\left(\frac{x-e}{1-e}, \frac{y-e}{1-e}\right) & \text{si } x,y \in [e,1] \\ \text{mín}(x,y) & \text{en cualquier otro caso,} \end{cases}$$

siendo T_U', T_U'' t-normas. Entonces I_{U_0}, N satisfacen el Modus Tollens respecto de U, si y sólo si se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $N(x) = 0$ para todo $x \geq e_0$ y $N(x) < e_0$ para todo $x > 0$.
2. I_{T_0} y N' satisfacen el Modus Tollens respecto de la t-norma T_U' para todos $y < x$, donde I_{T_0} es la implicación residuada derivada de la t-norma T_0 y N' viene dada por la ecuación (6).

Nota 2: Notemos que cuando $U_0(e,e) = e$ y T_0 es continua entonces la uninorma $U_0 \equiv \langle T_0, e_0, S_0 \rangle_{\text{mín}}$ viene dada como en el teorema 3, ya que entonces T_0 resulta ser suma ordinal de dos t-normas. Análogamente, la uninorma U viene dada como en el teorema 4 siempre que $U(e_0,e_0) = e_0$ y T_U sea continua.

Ejemplo 3: En el caso $e_0 < e$ consideremos por ejemplo uninormas $U_0 \equiv \langle T_0, e_0, S_0 \rangle_{\text{mín}}$ y U como en el teorema 4 donde $T_0 = T_U' = T_{\mathbf{LK}}$ la t-norma de Łukasiewicz y N la negación dada por

$$N(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ e_0 - x & \text{si } 0 < x < e_0 \\ 0 & \text{si } x \geq e_0. \end{cases}$$

Con estas restricciones se satisfacen las condiciones del teorema y I_{U_0}, N satisfacen el U-Modus Tollens respecto de la uninorma U.

IV-B. RU-implicaciones derivadas de uninormas representables

No daremos en este apartado caracterizaciones generales como en el anterior, pero sí para casos concretos. En particular, veremos que en este caso sí se pueden hallar soluciones con $\alpha_N > 0$, incluso con negaciones fuertes. Concretamente, en este apartado U_0 denotará una uninorma representable de la forma $U_0 \equiv \langle e_0, h_0 \rangle_{\text{rep}}$ y I_{U_0} su implicación residuada (ver [3], [6] para detalles sobre su estructura). Recordemos que entonces la función

$$N_{h_0}(x) = h_0^{-1}(-h_0(x)) \quad \text{para todo } x \in [0,1]$$

es siempre una negación fuerte que se conoce como la negación asociada a la uninorma U_0.

Teorema 5: Sea I_{U_0} la implicación borrosa derivada de una uninorma representable $U_0 \equiv \langle e_0, h_0 \rangle_{\text{rep}}$, N_{h_0} su negación asociada y U una uninorma conjuntiva, continua por la izquierda con elemento neutro e. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- I_{U_0}, N_{h_0} satisfacen el Modus Tollens respecto de U.
- $I_{U_0}(x,y) \leq I_U(N_{h_0}(y), N_{h_0}(x))$ para todos $x,y \in [0,1]$.
- $U(x,y) \leq U_0(x,y)$ para todos $x,y \in [0,1]$.

Ejemplo 4: Sea $U_0 \equiv \langle e, h_0 \rangle_{\text{rep}}$ una uninorma representable con elemento neutro $e \in]0,1[$. Es conocido entonces que la t-norma subyacente T_U y la t-conorma S_U son estrictas. Consideremos las uninormas de $\mathcal{U}_{\text{mín}}$ dadas por

$$U \equiv \langle T_U, e, S_U \rangle_{\text{mín}} \qquad \text{y} \qquad U' \equiv \langle \text{mín}, e, S_U \rangle_{\text{mín}}.$$

Es obvio que $U \leq U_0$ pero $U' \not\leq U_0$ y por tanto, a partir del teorema anterior, deducimos que I_{U_0}, N_{h_0} satisfacen el U-Modus Tollens respecto de U pero no respecto de U'.

IV-C. RU-implicaciones derivadas de uninormas idempotentes

Igual que en el apartado anterior, veremos que en este caso también se pueden hallar soluciones con negaciones fuertes. Concretamente, en este apartado U_0 denotará una uninorma idempotente de la forma $U_0 \equiv \langle e_0, g_0 \rangle_{\text{ide}}$ y I_{U_0} su implicación residuada (ver [18] para detalles sobre su estructura). Recordemos que en este caso, para que I_{U_0} sea realmente una implicación, ha de ser $g_0(0) = 1$ aunque U_0 puede ser incluso disyuntiva.

Teorema 6: Sea N_0 una negación fuerte con punto fijo e_0, I_{U_0} la implicación borrosa derivada de una uninorma idempotente $U_0 \equiv \langle e_0, N_0 \rangle_{\text{ide}}$ y U una uninorma conjuntiva, continua por la izquierda con elemento neutro e. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- I_{U_0}, N_0 satisfacen el Modus Tollens respecto de U.
- $I_{U_0}(x,y) \leq I_U(N_0(y), N_0(x))$ para todos $x,y \in [0,1]$.
- $U(x,y) \leq U_0(x,y)$ para todos $x,y \in [0,1]$.

V. Conclusiones y trabajo futuro

En los procesos de inferencia borrosa resulta imprescindible utilizar conjunciones, implicaciones (y negaciones) que satisfagan el Modus Ponens y el Modus Tollens. Aún cuando generalmente las conjunciones se modelizan mediante t-normas, cada vez es más habitual introducir también el uso de uninormas conjuntivas. En este sentido, generalizar el Modus Ponens (Tollens) respecto de una de esas uninormas se convierte en un punto interesante de estudio.

De forma similar a como se hizo para el Modus Ponens en [15]–[17], en este trabajo se realiza un estudio del Modus Tollens respecto de uninormas conjuntivas. Se dan diversas propiedades necesarias para su cumplimiento y caracterizaciones de las soluciones en diversos casos concretos. Se estudia también el caso de RU-implicaciones derivadas de uninormas de $\mathcal{U}_{\text{mín}}$, de uninormas representables y de uninormas idempotentes.

Como trabajo futuro, quedan muchos flecos por analizar, como son un estudio más exhaustivo de los casos de RU-implicaciones derivadas de uninormas representables e idempotentes, extender dicho estudio a RU-implicaciones derivadas de otros tipos de uninormas (ver [10]) y también a (U, N)-implicaciones derivadas de uninormas (ver [3]).

Acknowledgment

This paper has been partially supported by the Spanish Grant TIN2016-75404-P, AEI/FEDER, UE.

Referencias

[1] I. Aguiló, J. Suñer, J. Torrens, "A characterization of residual implications derived from left-continuous uninorms," Information Sciences, 180, 3992–4005, 2010.

[2] C. Alsina, E. Trillas, "When (S, N)-implications are (T, T_1)-conditional functions?," Fuzzy Sets and Systems, 134, 305–310, 2003.

[3] M. Baczyński, B. Jayaram, Fuzzy Implications. Studies in Fuzziness and Soft Computing, vol. 231. Springer, Berlin Heidelberg, 2008.

[4] M. Baczyński, B. Jayaram, "(U,N)-implications and their characterizations," Fuzzy Sets and Systems, 160, 2049–2062, 2009.

[5] M. Baczyński, B. Jayaram, S. Massanet, and J. Torrens, "Fuzzy implications: Past, present, and future", in Springer Handbook of Computational Intelligence, J. Kacprzyk and W. Pedrycz, Eds. Springer Berlin Heidelberg, 2015, pp. 183–202.

[6] B. De Baets, J. C. Fodor, "Residual operators of uninorms," Soft Computing 3, 89–100, 1999.

[7] J. Fodor, M. Roubens. Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.

[8] J. C. Fodor, R. R. Yager, A. Rybalov, "Structure of Uninorms," International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-based Systems, 5, 411–427, 1997.

[9] E.P. Klement, R. Mesiar, E. Pap. Triangular norms. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

[10] M. Mas, S. Massanet, D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, "A survey on the existing classes of uninorms," Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 29, 1021–1037, 2015.

[11] M. Mas, J. Monreal, M. Monserrat, J.V. Riera, J. Torrens, "Modus Tollens on fuzzy implication functions derived from uninorms," in Fuzzy Logic and Information Fusion. To Commemorate the 70th Birthday of Professor Gaspar Mayor. In the series: Studies in Fuzziness and Soft Computing, vol. 339, T. Calvo and J. Torrens, Eds. Springer, Switzerland, 2016, pp. 49–64.

[12] M. Mas, M. Monserrat, D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, "RU and (U, N)-implications satisfying Modus Ponens," International Journal of Approximate Reasoning, 73, 123–137, 2016.

[13] M. Mas, M. Monserrat, J. Torrens, "Two types of implications derived from uninorms," Fuzzy Sets and Systems, 158, 2612–2626, 2007.

[14] M. Mas, M. Monserrat, J. Torrens, E. Trillas, "A survey on fuzzy implication functions," IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 15(6), 1107–1121, 2007.

[15] M. Mas, D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, "On a generalization of the Modus Ponens: U-conditionality," in Proceedings of IPMU-2016, Part I, CCIS 610, J.P. Carvalho et al. Eds. 2016, pp. 1–12.

[16] M. Mas, D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, "On some classes of RU-implications satisfying U-Modus Ponens," in Aggregation functions in theory and in practice. In the series: Advances in Intelligent Systems and Computing, 581, V. Torra, R. Mesiar and B. De Baets, Eds. 2018, pp. 71–82.

[17] M. Mas, D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, "Generalized Modus Ponens for (U, N)-implications," in Jesús Medina, Manuel Ojeda-Aciego, José Luis Verdegay Galdeano, David A. Pelta, Inma P. Cabrera, Bernadette Bouchon-Meunier, Ronald R. Yager (Eds.), Proceedings of IPMU 2018, Part I, Communications in Computer and Information Science, vol. 853 (2018) pp. 649–660.

[18] D. Ruiz, J. Torrens, "Residual implications and co-implications from idempotent uninorms," Kybernetika 40, 21–38, 2004.

[19] D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, "Distributivity of residual implications over conjunctive and disjunctive uninorms," Fuzzy Sets and Systems, 158, 23–37, 2007.

[20] D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, "S- and R-implications from uninorms continuous in $]0, 1[^2$ and their distributivity over uninorms," Fuzzy Sets and Systems, 160, 832–852, 2009.

[21] D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, B. De Baets, J. Fodor, "Some remarks on the characterization of idempotent uninorms," in Computational Intelligence for Knowledge-Based Systems Design. Lecture Notes in Computer Science, vol. 6178, E. HÃllermeier, R. Kruse, F. Hoffmann, Eds. Springer, Berlin, Heidelberg, 2010, pp. 425–434.

[22] E. Trillas, C. Alsina, A. Pradera, "On MPT-implication functions for fuzzy logic," Revista de la Real Academia de Ciencias. Serie A. Matemáticas (RACSAM) 98(1), 259–271, 2004.

[23] E. Trillas, C. Alsina, E. Renedo, A. Pradera, "On contra-symmetry and MPT-conditionality in fuzzy logic," International Journal of Intelligent Systems, 20, 313–326, 2005.

[24] E. Trillas, C. Campo, S. Cubillo, "When QM-operators are implication functions and conditional fuzzy relations," International Journal of Intelligent Systems, 15, 647–655, 2000.

[25] E. Trillas, M. Mas, M. Monserrat, J. Torrens, "On the representation of fuzzy rules," International Journal of Approximate Reasoning, 48, 583–597, 2008.

[26] E. Trillas, L. Valverde, "On Modus Ponens in fuzzy logic," in 15th International Symposium on Multiple-Valued Logic, pp. 294–301. Kingston, Canada, 1985.

[27] R. R. Yager, A. Rybalov, "Uninorm aggregation operators," Fuzzy Sets and Systems, 80, 111–120, 1996.