Negaciones naturales asociadas a t-subnormas discretas

Sebastia Massanet*†, Juan Vicente Riera*†, Joan Torrens*†
* *Departamento de Ciencias Matemáticas e Informática*
Grupo de investigación en Soft Computing, Procesamiento de Imágenes y Agregación (SCOPIA)
Universidad de las Islas Baleares, 07122 Palma, España
†*Instituto de Investigación Sanitaria de las Islas Baleares (IdISBa), 07010 Palma, España*
{s.massanet, jvicente.riera, jts224}@uib.es

***Resumen*—En las últimas décadas, las operaciones definidas sobre cadenas finitas, usualmente llamadas operaciones discretas, han experimentado un gran interés por sus aplicaciones en muchos campos de la ciencia. Una de estas operaciones son las llamadas t-subnormas discretas que son una generalización de las t-normas discretas y que tienen una especial relevancia en aplicaciones que usan etiquetas lingüísticas. En este trabajo, se estudian las negaciones naturales asociadas a t-subnormas discretas incidiendo en su estructura y en algunas de sus propiedades. En particular, se caracterizan algunos casos concretos de negaciones discretas que pueden ser la negación natural asociada a una t-subnorma discreta. En este trabajo, los conceptos de negación débil y simétrica, que resultan ser equivalentes en el caso discreto, desempeñarán un papel clave.**

***Index Terms*—función de agregación discreta, t-subnorma discreta, negación natural.**

I. Introducción

En muchas situaciones prácticas en las que los cálculos y los razonamientos deben de ser reducidos a un número finito de posibles valores, a menudo cualitativos, el enfoque lingüístico borroso es un marco adecuado para modelar dicha información. Esto es debido, en este caso, a que los términos cualitativos usados por los expertos son habitualmente representados por variables lingüísticas en lugar de valores numéricos. En este tipo de enfoques, las variables lingüísticas se valoran en cadenas finitas totalmente ordenadas tales como:

$$L = \{\text{Extremadamene Malo}, \text{Muy Malo}, \text{Malo}, \text{Regular},$$
$$\text{Bueno}, \text{Muy Bueno}, \text{Extremadamente Bueno}\},$$

que pueden ser todas representadas por la cadena finita $L_n = \{0, 1, \ldots, n\}$. Consecuentemente, muchos investigadores han centrado sus esfuerzos en el estudio de operaciones definidas sobre L_n, o abreviadamente operaciones discretas (ver [7], [8], [11], [18] y concretamente [23] como trabajo pionero en este ámbito).

Entre las diferentes operaciones discretas, las funciones de agregación discretas destacan por su importancia debido a la necesidad de fusionar un conjunto inicial de datos en uno final que los represente. Existen muchos ejemplos de posibles aplicaciones de las funciones de agregación entre los que destacan los procesos de decisión, las evaluaciones subjetivas, el procesamiento de imágenes o el reconocimiento de patrones, entre otros. Por ello, el estudio de dichas funciones ha ido en aumento en los últimos años como se evidencia con la publicación de diferentes monográficos sobre dicha temática (ver [2], [3], [12]). En muchos casos, el estudio de funciones de agregación discretas se lleva a cabo suponiendo la verificación de alguna propiedad adicional, como puede ser el caso de la suavidad, que es considerada en este entorno como la homóloga a la continuidad en el intervalo unidad, o equivalentemente la propiedad de 1-Lipschitz. En esta línea de investigación, muchas familias de funciones de agregación discretas han sido también estudiadas o incluso caracterizadas. Por ejemplo, las t-normas y t-conormas suaves han sido caracterizadas en [24] (ver también [23]), las t-subnormas suaves en [20], las medias ponderadas ordinales en [16], las uninormas en $\mathcal{U}_{\text{mín}}$ y $\mathcal{U}_{\text{máx}}$ y nulnormas en [18], las uninormas discretas idempotentes en [6], las uninormas y nulnormas no conmutativas en [19] y [8] respectivamente, las cópulas en [22] y las cuasi-cópulas en [1].

Las funciones de agregación discretas se pueden clasificar en cuatro grandes familías dependiendo de su relación con la función mínimo y la función máximo: conjuntivas cuando se encuentran por debajo del mínimo, disyuntivas cuando se encuentran por encima del máximo, funciones promedio o compensatorias cuando se encuentran entre el mínimo y el máximo y mixtas en cualquier otro posible caso. En este artículo, trabajaremos con funciones de agregación discretas conjuntivas y en particular, con la familia de t-subnormas discretas. Estas operaciones generalizan la familia de t-normas discretas (ver [7], [15], [24]) y pueden ser vistas como un caso particular de subgrupo topológico ordenado [5]. Las t-subnormas sobre $[0, 1]$ juegan un papel muy relevante en la construcción de sumas ordinales de t-normas continuas por la izquierda así como en otros métodos de construcción (ver [14]). Además, los estudios sobre generadores aditivos y multiplicativos de estos operadores (ver [9], [21], [25]) así como la verificación de determinadas propiedadades tales como la cancelatividad [17] o la verificación de la condición de Lipschitz justifican la importacia del estudio de las t-subnormas.

Recientemente, una linea de investigación de las t-subnormas sobre $[0, 1]$ ha sido dedicada a su negación natural asociada. El concepto de negación natural asociada fue estudiado en [4] para el caso de t-normas continuas por la izquierda, mientras que en [13] se investigaron en profundidad las t-subnormas con negación natural asociada fuerte. En este último trabajo, fue demostrado que tales t-subnormas son de hecho t-normas. Además se investigaron las relaciones entre diferentes propiedades algebraicas y analíticas como la cancelatividad condicional, la propiedad Arquimediana, la continuidad por la izquierda o sus elementos nilpotentes. Por ello, y siguiendo esta linea de investigación, en este artículo queremos desarrollar un estudio similar para el caso de t-subnormas discretas. La negación natural asociada a estos operadores discretos será ampliamente analizada y se presentarán varias ideas sobre su estructura.

Este trabajo se organizará de la siguiente manera: con la intención de que sea lo más autocontenido posible, en la sección II se presentaran algunos conceptos básicos sobre operaciones discretas, y en concreto sobre t-subnormas y t-normas discretas. En la sección III se estudiaran las negaciones débiles y simétricas, dos subfamilias de negaciones discretas que veremos que en el contexto discreto son equivalentes En la sección IV, el concepto de 0-función de una t-subnorma discreta es introducido e investigado caracterizando aquellas 0-funciones que satisfacen la condición de ser una negación discreta. Además, entre otras importantes propiedades, se demuestra que las negaciones débiles son las únicas negaciones discretas que son la negación natural asociada a una t-norma discreta. Finalmente, este trabajo finaliza con la sección V en la que se exponen algunas conclusiones y posibles líneas de trabajo futuro.

II. Preliminares

Supondremos que el lector está familiarizado con los conceptos más relevantes sobre funciones de agregación, negaciones borrosas, t-normas (ver [15]) y también sobre t-normas discretas, esto es, t-normas definidas sobre una cadena finita (ver [24]). Por ello, solo recordaremos las definiciones y resultados esenciales necesarios para una correcta comprensión de este trabajo.

Es conocido (ver [24]) que para el estudio de funciones de agregación binarias todas las cadenas finitas con el mismo número de elementos son equivalentes. Por ello, utilizaremos la más simple de ellas con $n+1$ elementos:

$$L_n = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$$

y, para todo $a, b \in L_n$ con $a \leq b$, utilizaremos la notación $[a, b]$ para denotar la subcadena dada por $[a, b] = \{x \in L_n \mid a \leq x \leq b\}$.

Definición 1 (**[24]):**

- Una función $f : L_n \to L_n$ se dice que es *suave* cuando $\mid f(x) - f(x-1) \mid \leq 1$ para todo $x \in L_n$ con $x \geq 1$.
- Una operación binaria F sobre L_n se dice que es *suave* cuando sus secciones, vertical y horizontal, lo son.

La importancia de la condición de suavidad radica en el hecho de que generalmente esta característica es usada en el caso discreto de manera equivalente a la continuidad en el intervalo $[0, 1]$, propiedad equivalente a la de divisibilidad (para una t-norma T, $x \leq y$ si y solo si existe $z \in L_n$ tal que $T(y, z) = x$), ver también [24].

Proposición 2 (**[24]):** La única negación suave (equivalentemente fuerte o estrictamente decreciente) sobre L_n es la negación clásica dada por

$$N(x) = n - x \quad \text{para todo} \quad x \in L_n.$$

Proposición 3 (**[24]):** Consideremos $m+1$ elementos de la cadena L_n dados por $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_{m-1} < a_m = n$ y sea T_i una t-norma definida sobre la cadena $[a_{i-1}, a_i]$ para todo $i = 1, \ldots, m$. Entonces, la operación binaria sobre L_n dada por $T(x, y) =$

$$\begin{cases} T_i(x, y) & \text{si existe un } i \text{ tal que } a_{i-1} \leq x, y \leq a_i, \\ \min\{x, y\} & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

es siempre una t-norma en L_n usualmente llamada *suma ordinal* de las t-normas $T_1, \ldots, T_m$.

Proposición 4 (**[24]):** Existe una y solo una t-norma Arquimediana y suave sobre L_n dada por la expresión

$$T(x, y) = \max\{0, x + y - n\} \tag{1}$$

conocida habitualmente como la t-norma de Łukasiewicz.

Además, toda t-norma suave se puede caracterizar como una suma ordinal de t-normas de Łukasiewicz del siguiente modo tal y como indica el siguiente resultado:

Proposición 5 (**[24]):** Una t-norma T sobre L_n es suave si y solo si existe un número natural m con $1 \leq m \leq n$ y un subconjunto J de L_n,

$$J = \{0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_{m-1} < a_m = n\}$$

tal que T viene dada por $T(x, y) =$

$$\begin{cases} \max\{a_k, x + y - a_{k+1}\} & \text{si existe } a_k \in J \\ & \text{con } a_k \leq x, y \leq a_{k+1}, \\ \min\{x, y\} & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Un concepto que generaliza la noción de t-norma es el de t-subnorma.

Definición 6: Sea $T : L_n^2 \to L_n$ una operación binaria sobre L_n. Se dice que T es una *t-subnorma* cuando T es asociativa, conmutativa, creciente en cada variable y verifica $T(x, y) \leq \min\{x, y\}$ para todo $x, y \in L_n$.

Obviamente, cualquier t-norma sobre L_n es también una t-subnorma pero no viceversa. Por ejemplo, la menor t-subnorma sobre L_n es la cero t-subnorma ($T(x, y) = 0$ para todo $x, y \in L_n$) que claramente no es una t-norma sobre L_n.

III. Algunas propiedades de la negaciones discretas

Como la única negación suave sobre L_n es la clásica, expresada por $N(x) = n - x$, nos podemos plantear el hecho de investigar otras negaciones diferentes a ésta. En este sentido, si consideramos la posibilidad de que la negación no sea suave, podemos encontrar muchas negaciones discretas tal como veremos a continuación. Las siguientes definiciones son adaptaciones sobre L_n de las propuestas en [4] y [6].

Definición 7: Sea $N : L_n \to L_n$ una negación discreta.

- N es una *negación débil* si $x \leq N^2(x)$ para todo $x \in L_n$.
- N se dice *simétrica* cuando el conjunto
$$F_N = \{(n,0)\} \cup \{(x,y) \in L_n^2 \mid N(x+1) \leq y \leq N(x)\}$$
es simétrico, esto es, $(x,y) \in F_N$ si y solo si $(y,x) \in F_N$.

En el caso de negaciones definidas sobre el intervalo $[0,1]$, las negaciones débiles y simétricas no coinciden en general, y solo coinciden en el caso en que N sea continua por la izquierda (ver [4]). El siguiente ejemplo ilustra este hecho.

Ejemplo 8: Las negaciones simétricas son aquellas negaciones N cuyo grafo es simétrico con respecto a la función identidad. Así, cada posible región constante de N se corresponde con un punto de discontinuidad y viceversa (ver [4]). En este sentido, si la función no es continua por la izquierda en esos puntos, la propiedad $x \leq N^2(x)$ puede fallar. Por ejemplo, la negación dada por

$$N(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0{,}25, \\ 1{,}25 - x & \text{si } 0{,}25 < x < 1, \\ 0 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Es fácil probar que N es simétrica, pero claramente no es una negación débil ya que para todo x tal que $0 < x \leq 0{,}25$ se verifica que $N^2(x) = N(1) = 0 < x$.

En el caso discreto ambos conceptos coinciden siempre como se verá en la siguiente proposición. La demostración de la misma es una adaptación de la considerada en el lema 2 de [6]. Hemos querido incluir la demostración de este resultado en aras de una mayor comprensión del mismo.

Proposición 9: Sea $N : L_n \to L_n$ una negación discreta. Las siguientes propiedades son equivalentes:

i) N es simétrica.
ii) N es una negación débil.
iii) Para todo $(x,y) \in L_n^2$ se verifica:
$$y \leq N(x) \iff x \leq N(y).$$

Demostración. $(i) \implies (ii)$. Para todo $x \in L_n$ tenemos por definición que $(x, N(x)) \in F_N$. Como N es simétrica se tiene que $(N(x), x) \in F_N$ hecho que implica que $x \leq N(N(x))$. Esto es, N es una negación débil.

$(ii) \implies (iii)$. Consideremos $(x,y) \in L_n^2$ tal que $x \leq N(y)$, el decrecimiento de N implica que $N(x) \geq N(N(y)) \geq y$. Similarmente, de $y \leq N(x)$ se sigue que $x \leq N(y)$.

$(iii) \implies (i)$. Queremos probar que F_N es simétrica. Consideremos $(x,y) \in F_N$, entonces $N(x+1) \leq y \leq N(x)$ y por tanto $x \leq N(y)$. Por otra parte, si $N(y+1) > x$, entonces

$$x+1 \leq N(y+1) \implies y+1 \leq N(x+1) \implies y < N(x+1),$$

que contradice el hecho que $(x,y) \in F_N$. Por tanto, concluimos que $N(y+1) \leq x$ y así $(y,x) \in F_N$, demostrando que F_N es simétrica. ∎

Existen muchos ejemplos de negaciones discretas débiles (o simétricas) sobre L_n. En el siguiente ejemplo presentamos una familia paramétrica de negaciones discretas que abarcan desde la negación drástica hasta la negación clásica.

Ejemplo 10: Consideremos $\alpha \in L_n$ y sea N_α dada por

$$N_\alpha(x) = \begin{cases} n & \text{si } x = 0, \\ \alpha - x & \text{si } 0 < x < \alpha, \\ 0 & \text{si } x \geq \alpha. \end{cases}$$

Claramente N_α es una negación débil para todo $\alpha \in L_n$. Además, si $\alpha = 0$ obtenemos N_0 la negación drástica, mientras que si $\alpha = n$ obtenemos la negación clásica $N_n(x) = n - x$.

IV. T-subnormas discretas y sus negaciones asociadas

En esta sección queremos investigar la región cero de una t-subnorma discreta similarmente a como se ha estudiado en el caso de t-subnormas definidas sobre el intervalo unidad. Para ello empezaremos dando la siguiente definición propuesta en [13] para el caso $[0,1]$.

Definición 11: Para cada t-subnorma discreta $T : L_n \times L_n \to L_n$, llamaremos *0-función asociada* (denotada por N_T) a aquella dada por

$$N_T(x) = \text{máx}\{z \in L_n \mid T(x,z) = 0\}.$$

Contrariamente a lo que ocurre para el caso de las t-normas, la 0-función asociada de una t-subnorma no necesita ser una negación discreta porque $N_T(n) = \text{máx}\{z \in L_n \mid T(n,z) = 0\}$ podría ser diferente de 0 (cuando T es una t-subnorma propia, n no es el elemento neutro de T). Cuando N_T sea una negación discreta, la llamaremos *negación natural asociada* de la t-subnorma T. Además, cabe destacar que

1. Si $n = 1$, la t-subnorma cero (con 0-función asociada dada por $N(x) = 1$ para $x \in \{0,1\}$, no es una negación), y la t-norma mínimo (con la negación clásica como negación natural asociada) son las únicas t-subnormas sobre $L_1 = \{0,1\}$.
2. Cuando $n = 2$ hay exactamente siete t-subnormas sobre L_2 que pueden ser fácilmente construidas, de las cuales solo dos de ellas son t-normas. En cualquier caso, las únicas posibidades de 0-funciones asociadas son:
   - La función constante $N(x) = 2$ para todo $x \in L_2 = \{0,1,2\}$.
   - $N(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \in \{0,1\}, \\ 1 & \text{si } x = 2. \end{cases}$
   - La negación clásica $N(x) = 2 - x$.
   - La negación drástica $N(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{si } x \in \{1,2\}. \end{cases}$

   Claramente, solo los dos últimos casos son negaciones discretas.

De acuerdo a los resultados anteriores, supondremos a partir de ahora que $n \geq 3$. Así, para $n \geq 3$ podemos encontrar también ejemplos de t-subnormas, diferentes de la t-subnorma cero, cuya 0-función asociada no es una negación discreta tal como se puede ver en el siguiente ejemplo.

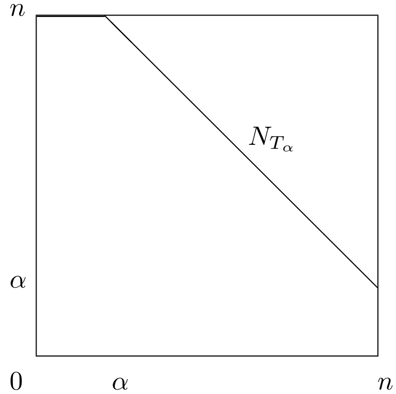

Figura 1. 0-función asociada N_{T_α} del ejemplo 12.

Ejemplo 12: Consideremos $\alpha \in L_n$ y la función $T_\alpha : L_n^2 \to L_n$ dada por

$$T_\alpha(x,y) = \max\{0, x+y-n-\alpha\} \qquad \text{para todo} \quad x,y \in L_n.$$

Entonces T_α es siempre un t-subnorma suave (ver [20]) con $T_\alpha(n,n) = n-\alpha$. En particular, T_α es una t-subnorma propia si y solo si $\alpha > 0$. Además, su 0-función asociada vendrá dada por:

$$N_{T_\alpha}(x) = \max\{z \in L_n \mid T_\alpha(x,z) = 0\}$$
$$= \max\{z \in L_n \mid x+z-n-\alpha \leq 0\}.$$

Esto es,

$$N_{T_\alpha}(x) = \min\{n, n+\alpha-x\} = \begin{cases} n & \text{si } x \leq \alpha, \\ n+\alpha-x & \text{si } x > \alpha. \end{cases}$$

Por tanto, es obvio que N_{T_α} es una negación discreta solo cuando $\alpha = 0$ en cuyo caso T_α es de hecho la t-norma de Łukasiewicz. Para los otros casos se tiene que $N_{T_\alpha}(n) = \alpha > 0$. Podemos ver dibujada la función N_{T_α} en la figura 1.
En el caso discreto tenemos una fácil caracterización de las t-subnormas que verifican que N_T es una negación.

Lema 13: Sea $T : L_n^2 \to L_n$ una t-subnorma discreta. La 0-función asociada a T es una negación discreta si y solo si $T(n,1) = 1$.

Demostración. Si N_T es una negación discreta entonces $N_T(n) = \max\{z \in L_n \mid T(x,n) = 0\} = 0$ y consecuentemente $T(n,1) > 0$. Como T siempre está por debajo del mínimo entonces se debe verificar que $T(n,1) = 1$.

Recíprocamente, si $T(n,1) = 1$ entonces $N_T(n) = 0$ y N_T es una negación discreta. ■

Además, N_T resulta ser una negación débil y esta propiedad caracteriza de hecho las negaciones que estan asociadas a una t-subnorma satisfaciendo $T(n,1) = 1$ (equivalentemente aquellas que estan asociadas a alguna t-norma) de la siguiente manera:

Proposición 14: Sea $N : L_n \to L_n$ una negación discreta. Los siguientes ítems son equivalentes:

i) Existe una t-norma T tal que $N = N_T$.
ii) Existe una t-subnorma T verificando $T(n,1) = 1$ tal que $N = N_T$.
iii) N es una negación débil.

Demostración. Es evidente que $(i) \implies (ii)$. Para demostrar que $(ii) \implies (iii)$ supongamos que existe alguna t-subnorma T con $T(n,1) = 1$ tal que $N = N_T$. En este caso tenemos $N(x) = \max\{z \in L_n \mid T(x,z) = 0\}$ y por tanto $T(x, N(x)) = 0$ hecho que implica directamente que

$$N^2(x) = N(N(x)) = \max\{z \in L_n \mid T(N(x), z) = 0\} \geq x.$$

Finalmente, para ver que $(iii) \implies (i)$, consideremos N una negación débil y tomemos la función dada por

$$T(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq N(x), \\ \min\{x,y\} & \text{si } y > N(x), \end{cases} \tag{2}$$

y veamos que T es una t-norma[1], que tendrá claramente a N como negación natural asociada. Notar que la función T dada por la ecuación (2) es creciente en ambas variables y para todo $x > 0$ tenemos $T(n,x) = \min\{n,x\} = x$, mientras que $T(n,0) = 0$ por definición. Así, T tiene por elemento neutro n. Como N es una negación débil, por la proposición 9 se tiene que $y \leq N(x)$ si y solo si $x \leq N(y)$ y esto implica que T también es conmutativa. Finalmente, es fácil ver (aunque es un cálculo tedioso) que también se verifica la propiedad asociativa y así obtenemos que T es una t-norma. ■

De acuerdo a la proposición anterior, cuando una negación discreta N es la negación asociada a alguna t-subnorma también es la negación asociada a alguna t-norma. Sin embargo, puede haber muchas más t-subnormas que t-normas que tienen una negación débil específica como su negación asociada (ver por ejemplo la proposición 17). Pero este no es el caso cuando la negación asociada sea suave, esto es, cuando se considera la negación clásica $N(x) = n - x$ como demostraremos en el siguiente resultado, que puede ser interpretado como el homólogo para el caso discreto del teorema 3.3 de [13].

Proposición 15: Sea $T : L_n^2 \to L_n$ una t-subnorma discreta con negación natural asociada $N_T(x) = n - x$. Entonces, necesariamente T es una t-norma.

Demostración. Solo es necesario ver que $n \in L_n$ es el elemento neutro de T. Supongamos que existe un $x \in L_n$ tal que $T(n,x) = x' < x$. Entonces se tiene que $n - x' > n - x$ y consecuentemente $T(x, n-x') > 0$. Denotemos por $y = T(x, n-x')$, entonces

$$0 = T(n-x', x') = T(n-x', T(x,n))$$
$$= T(T(n-x', x), n) = T(y,n),$$

que es una contradicción ya que por el lema 13 se tiene $T(n,y) \geq T(n,1) = 1$ para todo $y > 0$. Consecuentemente, debe ser $T(n,x) = x$ para todo $x \in L_n$ y por tanto T es una t-norma. ■

Como consecuencia de la proposición anterior algunos resultados conocidos para t-subnormas sobre $[0,1]$ que tienen una negación fuerte asociada (ver [13], [14]), pueden ser

[1]Para cualquier negación débil N, la t-norma T dada por la ecuación (2) es conocida habitualmente como *mínimo nílpotente* con respecto a N.

demostrados aquí para el caso discreto, tal como veremos en la siguiente proposición.

Proposición 16: Sea $T : L_n^2 \to L_n$ una t-subnorma discreta con negación natural asociada $N_T(x) = n - x$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

i) T es condicionalmente cancelativa.
ii) T es estrictamente creciente en su región positiva.
iii) T es suave.
iv) T es la t-norma de Łukasiewicz.

Demostración. Daremos solo un esbozo de la demostración. Es obvio que $(i) \Longrightarrow (ii)$.

Para demostrar que $(ii) \Longrightarrow (iii)$, consideremos $x, y \in L_n$ con $x < y$. Se tiene que $n - y < n - x$ y así, $T(y, n - x) > 0$. Sea $z = T(y, n - x)$. Entonces, usando un razonamiento similar al caso $[0, 1]$ (ver teorema 2 de [14]) se demuestra que debe verificarse $T(y, n - z) = x$. Esto es, existe algún $z \in L_n$ tal que $T(y, z) = x$ y T satisface la propiedad de divisibilidad que es equivalente a la condición de que T sea una t-norma suave (ver la proposición 7.3.3 de [24]).

$(iii) \Longrightarrow (iv)$. Como T tiene por negación asociada $N_T(x) = n - x$, debe de ser una t-norma y la única t-norma suave con esta condición es la t-norma de Łukasiewicz.

Finalmente, la implicación $(iv) \Longrightarrow (i)$ es trivial. ■

La proposición 15 nos permite caracterizar todas las t-subnormas que tienen por negación natural la familia paramétrica de negaciones discretas considerada en el ejemplo 10. Para ello,

Proposición 17: Sea $T : L_n^2 \to L_n$ una t-subnorma discreta. Se verifican los siguientes resultados:

i) N_α es la negación natural asociada a T si y solo si T es una suma ordinal de una t-norma T' sobre $[0, \alpha]$ con la negación clásica $N(x) = \alpha - x$ como negación asociada y una t-subnorma T'' sobre $[\alpha, 1]$.
ii) Si T es suave entonces N_α es la negación natural asociada a T si y solo si T es suma ordinal de la t-norma de Łukasiewicz sobre $[0, \alpha]$ y una t-subnorma suave T'' sobre $[\alpha, 1]$.

Demostración. Probemos el primer ítem (i). Supongamos que N_α es la negación natural asociada a T. Considerando la restricción de T en el cuadrado $[0, \alpha]^2$, claramente obtenemos una t-subnorma, $T' = T_{/[0,\alpha]^2}$, sobre la cadena finita $[0, \alpha]$ con negación natural asociada $N(x) = \alpha - x$ para todo $x \in [0, \alpha]$. Aplicando la proposición 15 se deduce que T' debe de ser una t-norma y consecuentemente tenemos, en particular, que $T(\alpha, \alpha) = \alpha$. En este caso, es bien sabido que T debe de ser una suma ordinal de una t-norma T' sobre $[0, \alpha]$ y una t-subnorma T'' sobre $[\alpha, 1]$.

Recíprocamente, es claro que cualquier t-subnorma expresada como una suma ordinal de una t-norma T' sobre $[0, \alpha]$ con negación asociada $N(x) = \alpha - x$ y una t-subnorma T'' sobre $[\alpha, 1]$, tiene a N_α como negación natural asociada.

Finalmente, notar que el ítem (ii) es consecuencia inmediata del ítem previo y de la proposición 16. ■

La estructura de las t-subnormas caracterizadas en la proposición 17 puede ser vista en la figura 2.

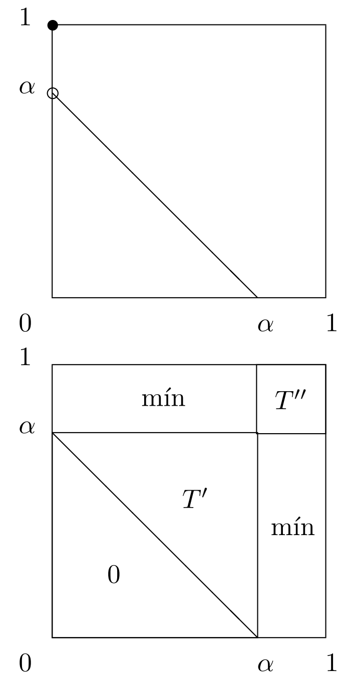

Figura 2. Negaciones N_α (arriba) de la familia parametrizada dada en el ejemplo 10 y la estructura de las t-subnormas (abajo) teniendo a N_α como negación natural asociada y caracterizadas en la proposición 17-(i).

V. Conclusiones y trabajo futuro

En este trabajo, se ha presentado un estudio en profundidad sobre las negaciones naturales asociadas a t-subnormas discretas. En primer lugar, hemos demostrado la equivalencia entre negaciones débiles y negaciones simétricas en el entorno discreto, resultado que, en general, no se verifica en el intervalo unidad $[0, 1]$ salvo que la negación borrosa sea continua por la izquierda. Después hemos introducido el concepto de 0-función de una t-subnorma discreta (a partir de la definición dada para el caso $[0, 1]$) y se han caracterizado los casos en que esta función es de hecho una negación discreta. A partir de esta investigación, como consecuencia de las propiedades de sus negaciones naturales asociadas, se han demostrado varios resultados sobre la relación existente entre t-subnormas discretas y t-normas discretas. De particular importancia es la proposición 14 que demuestra que las negaciones débiles son las únicas negaciones discretas que son las negaciones naturales asociadas a una t-norma discreta.

Como trabajo futuro, queremos analizar este tema desde otra perspectiva, esto es, si fijamos una negación débil N, ¿qué t-normas T pueden ser consideradas para conseguir una nueva t-norma T' tal que $N_{T'} = N$ y $T'(x, y) = T(x, y)$ para todo $y > N(x)$? Equivalentemente, caracterizar aquellas t-normas T cuyo operador

$$T'(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq N(x), \\ T(x, y) & \text{si } y > N(x), \end{cases}$$

es una t-norma. Este problema se ha abordado ya en [4] para el caso $[0, 1]$ pero no ha sido investigado todavía en el entorno discreto.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por el proyecto TIN2016-75404-P, AEI/FEDER, UE.

Referencias

[1] I. Aguiló, J. Suñer and J. Torrens, Matrix representation of discrete quasi-copulas, Fuzzy Sets and Systems, 159 (2008) 1658-1672.
[2] G. Beliakov, A. Pradera and T. Calvo, Aggregation Functions: A Guide for Practicioners, Springer, Berlin Heidelberg (2007).
[3] T. Calvo, G. Mayor, R. Mesiar (editors); “Aggregation operators. New trends and applications”, Studies in Fuzziness and Soft Computing, 97. Physica-Verlag, Heidelberg, (2002).
[4] R. Cignoli, F. Esteva, L. Godo and F. Montagna, On a class of left-continuous t-norms, Fuzzy Sets and Systems, 131 (2002) 283–296.
[5] A.H. Clifford, Naturally ordered commutative semigroups, Amer. J. Math., 76 (1954) 631-646.
[6] B. De Baets, J. Fodor, D. Ruiz-Aguilera and J. Torrens, Idempotent uninorms on finite ordinal scales, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 17 (2009) 1-14.
[7] B. De Baets and R. Mesiar, Discrete triangular norms, in: Topological and Algebraic Structures in Fuzzy Sets, A Handbook of Recent Developments in the Mathematics of Fuzzy Sets (S. Rodabaugh and E.-P. Klement, eds.), Trends in Logic 20, Kluwer Academic Publishers, 2003, pp. 389-400.
[8] J.C. Fodor, Smooth associative operations on finite ordinal scales, IEEE Trans. on Fuzzy Systems, 8 (2000) 791-795.
[9] R. Ghiselli Ricci, Representation of continuous triangular subnorms, in Proceedings of the IPMU-04, Perugia, Italy (2004) pp. 1105-1110.
[10] R. Ghiselli Ricci, R. Mesiar and A. Mesiarová, Lipschitzianity of triangular subnorms, in Proceedings of the IMPU-06, Paris (2006) pp. 671-677.
[11] L. Godo and V. Torra, On aggregation operators for ordinal qualitative information, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 8 (2000) 143-154.
[12] M. Grabisch, J.L. Marichal, R. Mesiar and E. Pap, Aggregation functions, in the series: *Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 127*, Cambridge University Press, (2009)
[13] B. Jayaram, T-subnorms with strong associated negation: Some properties, Fuzzy Sets and Systems, 323 (2017) 94–102.
[14] S. Jenei, Continuity of left-continuous triangular norms with strong induced negations and their boundary conditions, Fuzzy Sets and Systems, 124 (2001) 35–41.
[15] E.P. Klement, R. Mesiar and E. Pap, Triangular norms, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2000).
[16] A. Kolesárová, G. Mayor and R. Mesiar, Weighted ordinal means, Information Sciences, 177 (2007) 3822-3830.
[17] K. C. Maes, A. Mesiarová-Zemánková, Cancellativity properties for t-norms and t-subnorms, Information Sciences, 179 (2009) 1221-1233.
[18] M. Mas, G. Mayor and J. Torrens, $t-$Operators and uninorms on a finite totally ordered set, International Journal of Intelligent Systems, 14 (1999) 909-922.
[19] M. Mas, M. Monserrat and J. Torrens, On left and right uninorms on a finite chain, Fuzzy Sets and Systems, 146 (2004) 3-17.
[20] M. Mas, M. Monserrat and J. Torrens, Smooth t-subnorms on finite scales, Fuzzy Sets and Systems, 167 (2011) 82-91.
[21] G. Mayor and J. Monreal, Additive generators of discrete conjunctive aggregation operations, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 15 (2007) 1046-1052.
[22] G. Mayor, J. Suñer and J. Torrens, Copula-like operations on finite settings, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 13 (2005) 468-477.
[23] G. Mayor and J. Torrens, On a class of operators for expert systems, International Journal of Intelligent Systems, 8 (1993) 771-778.
[24] G. Mayor and J. Torrens, Triangular norms in discrete settings, in: E.P. Klement and R. Mesiar (Eds.), *Logical, Algebraic, Analytic, and Probabilistic Aspects of Triangular Norms*. Elsevier, Amsterdam, 2005, pp. 189–230.
[25] A. Mesiarová, Continuous triangular subnorms, Fuzzy Sets and Systems, 142 (2004) 75-83.