Un marco semántico general para la Lógica de Simplificación

Pablo Cordero, Manuel Enciso, Angel Mora
Universidad de Málaga,
Andalucía Tech.
Málaga, Spain
{pcordero,enciso}@uma.es, amora@ctima.uma.es

Vilem Vychodil
Dept. Computer Science
Palacky University Olomouc
Olomouc, Czechia
vilem.vychodil@upol.cz

***Resumen*—Presentamos una generalización de la Lógica de Simplificación para el razonamiento con reglas "si-entonces" sobre atributos difusos. Las implicaciones y la lógica propuesta están parametrizadas por sistemas de conexiones de Galois isótonas que permiten manejar diferentes interpretaciones de dependencias entre datos. Describimos la semántica de las reglas y el sistema axiomático de la lógica.**

***Index Terms*—Teoría de retículos, lógica difusa, implicaciones**

I. Parametrizaciones por Conexiones de Galois Isótonas

En este trabajo resumimos el presentado en [9] que se enmarca dentro del Análisis Formal de Conceptos (AFC) [1] en su versión difusa. Ésta considera un retículo completo residuado $\mathbb{L}$ y define un $\mathbb{L}$-contexto como una terna $\mathbf{I} = \langle X, Y, I \rangle$ donde X e Y son conjuntos no vacíos de objetos y atributos respectivamente e I es una $\mathbb{L}$-relación difusa de X en Y. Para cada objeto $x \in X$, se considera el conjunto difuso $I_x \in L^Y$ tal que $I_x(y) = I(x, y)$ para todo $y \in Y$. Una implicación de atributos es una expresión $A \Rightarrow B$ donde $A, B \in L^Y$ y se dice que el contexto $\mathbf{I}$ la satisface si $A \subseteq I_x$ implica $B \subseteq I_x$ para todo $x \in X$.

Nuestra propuesta explora sistemas de inferencia generales para razonar con implicaciones entre atributos difusos. Tomamos como punto de partida la generalización presentada en [3], donde el autor considera, como parámetros, un conjunto S de conexiones de Galois isotonas que es cerrado bajo composición y contiene a la identidad. Propone una axiomatización completa basada en los Axiomas de Armstrong. En este marco general, una implicación $A \Rightarrow B$ es cierta en I_x si, para todo $\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \rangle \in S$, se cumple que $\boldsymbol{f}(A) \subseteq I_x$ implica $\boldsymbol{f}(B) \subseteq I_x$.

Como alternativa a los bien conocidos Axiomas de Armstong [7], en [8] los autores propusieron una Lógica de Simplificación y nuevos métodos para la manipulación automática de implicaciones [10], [11]. Posteriormente, en [4], se propuso la lógica *FASL (Fuzzy Attribute Simplification Logic)* para implicaciones de atributos con grados y parametrizados por *"hedges"*.

En este resumen mostramos una generalización de la Lógica de Simplificación, equivalente a la citada [3], para implicaciones con grados cuya semántica está parametrizada por conexiones de Galois isótonas.

Supported by Grants TIN2014-59471-P and TIN2017-89023-P. V. Vychodil was also supported the project no. CZ.1.07/2.3.00/20.0059.

II. Marco teórico

En este marco general, consideramos, como estructura para los grados, un retículo co-residuado completo, es decir, un álgebra $\mathbb{L} = \langle L, \leq, \oplus, \ominus, 0, 1 \rangle$ satisfaciendo las siguientes condiciones:

- $\langle L, \leq, 0, 1 \rangle$ es un retículo completo donde 0 es el mínimo y 1 es el máximo. Como es usual, usamos los símbolos $\vee$ y $\wedge$ para denotar respectivamente supremo e ínfimo.
- $\langle L, \oplus, 0 \rangle$ es un monoide conmutativo.
- El par $\langle \oplus, \ominus \rangle$ satisface la siguiente propiedad de adjunción: para todo $a, b, c \in L$,

$$a \leq b \oplus c \quad \text{si y solo si} \quad a \ominus b \leq c. \tag{1}$$

L^Y denota el conjunto de todos los $\mathbb{L}$-conjuntos difusos en el universo Y. Las operaciones en $\mathbb{L}$ se extienden elemento a elemento a los $\mathbb{L}$-conjuntos difusos en la forma habitual: Para $A, B \in L^Y$ los $\mathbb{L}$-conjuntos difusos $A \oplus B$ and $A \ominus B$ se definen como $(A \oplus B)(y) = A(y) \oplus B(y)$ y $(A \ominus B)(y) = A(y) \ominus B(y)$ para todo $y \in Y$.

Las parametrizaciones [3] que se usan en nuestra propuesta se definen en términos de conexiones de Galois isótonas en $\langle L^Y, \subseteq \rangle$. En particular, consideramos pares $\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \rangle$ donde $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \colon L^Y \to L^Y$ son tales que, para todo $A, B \in L^Y$,

$$\boldsymbol{f}(A) \subseteq B \quad \text{si y solo si} \quad A \subseteq \boldsymbol{g}(B). \tag{2}$$

Es bien conocido que esta definición es equivalente a pedir que ambas funciones sean isótonas, que $\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}$ se inflacionaria y que $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}$ sea deflacionaria. Como consecuencia, $\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}$ es un *operador de cierre* y $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}$ es un *operador de núcleo* (*operador interior*).

Además, para cualquier isomorfismo $\boldsymbol{f}$ in $\langle L^Y, \subseteq \rangle$, el par $\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}^{-1} \rangle$ es una conexión de Galois isótona y, en particular, la función identidad $\boldsymbol{I}_Y \colon L^Y \to L^Y$ lo es. Otro ejemplo interesante es $\langle \mathbf{0}_Y, \mathbf{1}_Y \rangle$ donde $\mathbf{0}_Y(A)(y) = 0$ y $\mathbf{1}_Y(A)(y) = 1$, para cualquier $A \in L^Y$ e $y \in Y$.

Por último, dadas dos conexiones de Galois isótonas $\langle \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{g}_1 \rangle$ y $\langle \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{g}_2 \rangle$, su *composición* $\langle \boldsymbol{f}_1 \circ \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{g}_2 \circ \boldsymbol{g}_1 \rangle$ es también una conexión de Galois.

Definición 1 ([3]): Una familia de conexiones de Galois isótonas S in $\langle L^Y, \subseteq \rangle$ es una $\mathbb{L}$-parametrización si $\mathbb{S} = \langle S, \circ, \langle \boldsymbol{I}_Y, \boldsymbol{I}_Y \rangle \rangle$ es un monoide. En otras palabras, si S es es cerrada para la composición y contiene a la identidad.

III. LÓGICA DE SIMPLIFICACIÓN PARAMETRIZADA

Dado un *alfabeto* Y no vacío, cuyos elementos se denominan *atributos*, el conjunto de fórmulas bien formadas del lenguaje es:

$$\mathcal{L}_Y = \{A \Rightarrow B \mid A, B \in L^Y\}.$$

Las fórmulas del lenguaje se denominan *implicaciones* y para cada implicación, la primera y segunda componente se denomina *premisa* y *conclusion* respectivamente. Finalmente, los conjuntos de implicaciones $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$ se denominan *teorías*.

Sobre este lenguaje, definimos la Lógica de Simplificación presentando la semántica y un sistema axiomático. Finalmente, en la publicación de referencia del presente resumen [9], se prueba que la visión semántica y sintáctica coinciden, probando la corrección y completitud de la lógica propuesta.

Antes de definir la interpretación de las fórmulas, introducimos el concepto de $\mathbb{L}$-conjuntos difusos S-aditivos que juegan un papel fundamental en los modelos.

Definición 2: Sea Y un conjunto no vacío y S una $\mathbb{L}$-parametrización. Un $\mathbb{L}$-conjunto difuso $A \in L^Y$ se dice S-*aditivo* si, para todo $B, C \in L^Y$ y $\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \rangle \in S$,

$$\boldsymbol{f}(B) \subseteq A \text{ y } \boldsymbol{f}(C) \subseteq A \text{ implica } \boldsymbol{f}(B \oplus C) \subseteq A.$$

La proposición siguiente es directa a partir de la Definción 2 y (2).

Proposición 1: Sea Y un conjunto no vacío y S una $\mathbb{L}$-parametrización. Un $\mathbb{L}$-conjunto difuso $A \in L^Y$ es S-aditivo si y solo si $\boldsymbol{g}(A) \oplus \boldsymbol{g}(A) = \boldsymbol{g}(A)$.

Dada una $\mathbb{L}$-parametrización S, los modelos de la lógica se definen en términos de $\mathbb{L}$-conjuntos S-aditivos de la siguiente forma:

Definición 3: Sea $A \Rightarrow B \in \mathcal{L}_Y$. Un conjunto S-aditivo $M \in L^Y$ es un *modelo* para $A \Rightarrow B$ si, para todo $\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \rangle \in S$, $\boldsymbol{f}(A) \subseteq M$ implica que $\boldsymbol{f}(B) \subseteq M$.

Denotamos el conjuntos de los modelos de $A \Rightarrow B$ por $\mathcal{M}od(A \Rightarrow B)$. De forma usual, el conjunto de modelos para una teoría $\Sigma \subseteq \mathcal{L}_Y$ se define como

$$\mathcal{M}od(\Sigma) = \bigcap_{A \Rightarrow B \in \Sigma} \mathcal{M}od(A \Rightarrow B).$$

Por extensión, un $\mathbb{L}$-contexto $\mathbf{I} = \langle X, Y, I \rangle$ es un modelo de $A \Rightarrow B$ cuando $\{I_x \mid x \in X\} \subseteq \mathcal{M}od(A \Rightarrow B)$.

Definición 4: Sea $A \Rightarrow B \in \mathcal{L}_Y$ y $\Sigma \subseteq \mathcal{L}_Y$. La implicación $A \Rightarrow B$ se dice *semánticamente derivada* de la teoría Σ, denotado por $\Sigma \models A \Rightarrow B$, si $\mathcal{M}od(\Sigma) \subseteq \mathcal{M}od(A \Rightarrow B)$.

Introducimos por último en el presente resumen el sistema axiomático de la lógica.

Definición 5: El sistema axiomático está formado por un esquema de axioma y tres reglas de inferencia:

Reflexividad: infiere $A \Rightarrow A$,
Composición: de $A \Rightarrow B, A \Rightarrow C$ infiere $A \Rightarrow B \oplus C$,
Simplificación: de $A \Rightarrow B, C \Rightarrow D$ infiere $A \oplus (C \ominus B) \Rightarrow D$,
Extensión: de $A \Rightarrow B$ infiere $\boldsymbol{f}(A) \Rightarrow \boldsymbol{f}(B)$.

para todo $A, B, C, D \in L^Y$ y $\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \rangle \in S$.

Del modo habitual, se dice que una implicación $A \Rightarrow B \in \mathcal{L}_Y$ es sintácticamente derivada de (o inferida por) una teoría $\Sigma \subseteq \mathcal{L}_Y$, denotado por $\Sigma \vdash A \Rightarrow B$, si existe una secuencia $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \mathcal{L}_Y$ tal que σ_n es $A \Rightarrow B$ y, para todo $1 \leq i \leq n$, una de las siguientes condiciones se cumple:

- $\sigma_i \in \Sigma$;
- σ_i es un axioma (Reflexividad);
- σ_i se obtiene aplicando reglas de inferencia (Composición, Simplificación o Extensión) a implicaciones de $\{\sigma_j \mid 1 \leq j < i\}$.

El siguiente teorema asegura que ambos pilares de la lógica, las derivaciones semánticas y sintácticas, coinciden.

Teorema 1 (Corrección y completitud): Para cualquier implicación $A \Rightarrow B \in \mathcal{L}_Y$ y cualquier teoría $\Sigma \subseteq \mathcal{L}_Y$, las siguientes afirmaciones se cumplen:

1. $\Sigma \vdash A \Rightarrow B$ implica $\Sigma \models A \Rightarrow B$.
2. Si L^Y es finito, $\Sigma \models A \Rightarrow B$ implica $\Sigma \vdash A \Rightarrow B$.

REFERENCIAS

[1] Ganter, B., Wille, R.: Formal Concept Analysis: Mathematical Foundations. Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA, 1st edn. (1997)

[2] Belohlavek, R.: Fuzzy Relational Systems: Foundations and Principles. Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, USA (2002)

[3] Vychodil, V.: Parameterizing the semantics of fuzzy attribute implications by systems of isotone Galois connections. IEEE Trans. on Fuzzy Systems 24, 645–660 (2016)

[4] Belohlavek, R., Cordero, P., Enciso, M., Mora, A., Vychodil, V.: Automated prover for attribute dependencies in data with grades. International Journal of Approximate Reasoning 70, 51–67 (2016)

[5] Belohlavek, R., Vychodil, V.: Attribute dependencies for data with grades I. International Journal of General Systems 45(7–8), 864–888 (2016)

[6] Belohlavek, R., Vychodil, V.: Attribute dependencies for data with grades II. International Journal of General Systems 46(1), 66–92 (2017)

[7] Armstrong, W.W.: Dependency structures of data base relationships. In: Rosenfeld, J.L., Freeman, H. (eds.) Information Processing 74: Proceedings of IFIP Congress. pp. 580–583. North Holland, Amsterdam (1974)

[8] Cordero, P., Enciso, M.M., Mora, A., de Guzmán, I.P.I., Mora, Á., Pérez de Guzman, I.: SLFD Logic: Elimination of Data Redundancy in Knowledge Representation 2527, 141–150 (2002)

[9] Cordero, P., Enciso, M., Mora, A.,Vychodil, V. : Towards Simplification Logic for Graded Attribute Implications with General Semantics. CEUR Workshop Proceedings, 2123: 129–140, 2018. Selected papers of the 14th International Conference on Concept Lattices and Their Applications. ISSN: 1613-0073. http://ceur-ws.org/Vol-2123/

[10] Lorenzo, E.R., Adaricheva, K.V., Cordero, P., Enciso, M., Mora, A.: From an Implicational System to its Corresponding D-basis. In: Proceedings of the Twelfth International Conference on Concept Lattices and Their Applications, Clermont-Ferrand, France, October 13-16, 2015. pp. 217–228 (2015)

[11] Mora, A., Cordero, P., Enciso, M., Fortes, I., Aguilera, G.: Closure via functional dependence simplification. International Journal of Computer Mathematics 89(4), 510–526 (2012)