# Caracterizaciones y equivalencias de algunas familias de funciones de implicación borrosas generadas a partir de cópulas

Sebastia Massanet*†, Ana Pradera‡, Daniel Ruiz-Aguilera*†, Joan Torrens*†
* *Grupo de investigación en Soft Computing, Procesamiento de Imágenes y Agregación (SCOPIA)*
*Departamento de Ciencias Matemáticas e Informática*
*Universitat de les Illes Balears, 07122 Palma, España*
†*Instituto de Investigación Sanitaria de las Islas Baleares (IdISBa), 07010 Palma, España*
‡ *Departamento de Ciencias de la Computación, Arquitectura de Computadores,*
*Lenguajes y Sistemas Informáticos y Estadística e Investigación Operativa*
*Universidad Rey Juan Carlos, 28933 Móstoles, Madrid, España*
E-mails: s.massanet@uib.es, ana.pradera@urjc.es, daniel.ruiz@uib.es, jts224@uib.es

***Resumen*—Este trabajo es un resumen de los artículos [5] y [6] publicados en Fuzzy Sets and Systems para su presentación en la Multiconferencia CAEPIA'18 KeyWorks.**

***Index Terms*—Función de implicación borrosa, cópula, implicación probabilística, implicación de supervivencia, implicación S-probabilística, implicación de S-supervivencia.**

## I. RESUMEN

La caracterización y representación de los conectivos lógicos borrosos es una de las principales líneas de investigación en el campo teórico en lógica borrosa. Como consecuencia de este estudio, se ha conseguido caracterizar de forma axiomática un gran número de familias de conectivos lógicos borrosos. Por un lado, en el campo de las funciones de agregación, se han caracterizado varias familias de t-normas y t-conormas, cópulas y uninormas, entre otros operadores. Por otro lado, hay que destacar el esfuerzo de muchos investigadores en la caracterización de las familias de funciones de implicación borrosa. Así, se han caracterizado las $(S, N)$-implicaciones con $N$ una negación borrosa continua, las $R$-implicaciones generadas a partir de t-normas continuas por la izquierda, sus respectivas generalizaciones derivadas de uninormas, las implicaciones $f$ y $g$-generadas de Yager o las $h$-implicaciones, entre otras. La importancia de estos operadores radica en el gran número de aplicaciones que tienen en campos tan diversos como el razonamiento aproximado, el control borroso, el procesamiento de imágenes o la minería de datos. Se pueden consultar todas estas aplicaciones, en [1] y [2].

Una de las razones por las que las funciones de implicación borrosas son tan utilizadas es la flexibilidad existente en su definición:

*Definición 1:* Una operación binaria $I : [0,1]^2 \to [0,1]$ se llama una *función de implicación borrosa* si satisface:

(I1) $I(x_1, y) \geq I(x_2, y)$ cuando $x_1 \leq x_2$, para todo $y \in [0,1]$.

(I2) $I(x, y_1) \leq I(x, y_2)$ cuando $y_1 \leq y_2$, para todo $x \in [0,1]$.

(I3) $I(0,0) = I(1,1) = 1$ e $I(1,0) = 0$.

Esta definición permite la existencia de una infinidad de familias de funciones de implicación borrosas. Cada una de estas familias satisface alguna propiedades adicionales que son útiles para algunas de las aplicaciones anteriormente mencionadas. De esta manera, dependiendo de la aplicación considerada, se puede escoger la función de implicación borrosa que satisface las propiedades adicionales deseables. Sin embargo, esta necesidad de disponer de un repertorio extenso de estos operadores ha tenido un efecto no deseado. En los últimos años, se han propuesto multitud de familias, algunas de una complejidad notable, cuya caracterización se desconoce. Esto ha provocado la aparición de familias, que aunque fueron presentadas como nuevas familias, después de estudiarlas en profundidad y obtener su caracterización, se demostró que tenían intersección o incluso que coincidían con familias ya conocidas. Por tanto, es de suma importancia caracterizar las familias de funciones de implicación borrosas introducidas hasta la fecha para conocer el comportamiento de cada familia y su relación con las demás.

Este ha sido el objetivo de los artículos [5] y [6]. En estos trabajos, se han caracterizado cuatro familias de funciones de implicación borrosas derivadas de cópulas y que fueron introducidas en [3] y [4] con la idea de combinar tanto la imprecisión modelada mediante los conceptos borrosos como la aleatoriedad proveniente de la teoría de probabilidades. Estas familias son las siguientes:

1) *Implicaciones probabilísticas*:

$$I_C(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ \frac{C(x,y)}{x} & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

donde $C$ es una cópula que satisface $C(x_1, y)x_2 \geq C(x_2, y)x_1$ para todo $x_1 \leq x_2$ e $y \in [0,1]$.

2) *Implicaciones de supervivencia*:

$$I_C^*(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ \frac{x+y-1+C(1-x,1-y)}{x} & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

donde $C$ es una cópula que satisface $C(1-x_1, 1-y)x_2 - C(1-x_2, 1-y)x_1 \geq (1-y)(x_2-x_1)$ para todo $x_1 \leq x_2$ e $y \in [0, 1]$.

3) *Implicaciones S-probabilísticas*: $\tilde{I}_C(x, y) = C(x, y) - x + 1$ donde $C$ es una cópula.
4) *Implicaciones de S-supervivencia*: $\tilde{I}^*_C(x, y) = y + C(1-x, 1-y)$ donde $C$ es una cópula.

Concretamente, en [5] se obtiene la caracterización de las implicaciones $S$-probabilísticas y de las implicaciones de $S$-supervivencia. En dicha caracterización, juegan un papel importante tanto el concepto de negación natural de una implicación dada por $N_I(x) = I(x, 0)$, como las propiedades adicionales siguientes:

- El *principio de neutralidad por la izquierda*,

$$I(1, y) = y, \quad y \in [0, 1]. \qquad (\mathbf{NP})$$

- El *2-crecimiento*,

$$I(x_2, y_1)+I(x_1, y_2) \leq I(x_1, y_1)+I(x_2, y_2), \quad (\mathbf{2-IC})$$

para todo $x_1 \leq x_2$ e $y_1 \leq y_2$.

En este punto, la caracterización es la siguiente:

*Teorema 2:* Sea $I : [0, 1]^2 \to [0, 1]$ una función binaria. Entonces las afirmaciones siguientes son equivalentes:

i) $I$ satisface **(NP)**, **(2-IC)**, $N_I(x) = N_c(x) = 1 - x$ e $I(0, y) = I(x, 1) = 1$ para todo $x, y \in [0, 1]$.
ii) $I$ es una implicación material generada por una co-cópula $D$ y la negación borrosa $N_c$, i.e., $I(x, y) = D(1 - x, y)$.
iii) $I$ es una implicación $S$-probabilística generada por una cópula $C$.
iv) $I$ es una implicación de $S$-supervivencia generada por una cópula $C'$.

Además, las expresiones de $D$, $C$ y $C'$ son únicas y vienen dadas por

$$\begin{aligned} D(x, y) &= I(1 - x, y), \\ C(x, y) &= I(x, y) + x - 1, \\ C'(x, y) &= I(1 - x, 1 - y) + y - 1, \end{aligned}$$

para todo $x, y \in [0, 1]$.

La relevancia de este resultado radica en el hecho que se demuestra que las familias de implicaciones $S$-probabilisticas y de $S$-supervivencia son en realidad la misma y además, coinciden con las implicaciones materiales generadas por una co-cópula y $N_c$. Así, cualquier futuro estudio relativo a estas implicaciones puede centrarse en una sola de estas familias y los resultados pueden ser fácilmente reescritos en términos de las otras familias.

Un estudio similar se lleva a cabo en [6] para las familias de implicaciones probabilísticas e implicaciones de supervivencia. En dicho trabajo, se obtienen las caracterizaciones de estas familias demostrando de nuevo que ambas familias coinciden. El siguiente resultado aporta dicha caracterización.

*Teorema 3:* Sea $I : [0, 1]^2 \to [0, 1]$ una función binaria. Entonces las afirmaciones siguientes son equivalentes:

i) $I$ es una implicación probabilística derivada de una cópula $C$.
ii) $I$ es una implicación de supervivencia derivada de una cópula $C'$.
iii) $I$ satisface **(I1)**, **(NP)**, $I(0, y) = 1$ para todo $y \in [0, 1]$, la propiedad

$$x_2 I(x_2, y_1) + x_1 I(x_1, y_2) \leq x_1 I(x_1, y_1) + x_2 I(x_2, y_2)$$

para todo $x_1 \leq x_2$ e $y_1 \leq y_2$ y

$$N_I(x) = N_{D_1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Además, las expresiones de $C$ y $C'$ son únicas y vienen dadas por

$$\begin{aligned} C(x, y) &= xI(x, y), \\ C'(x, y) &= x + y - 1 + (1 - x)I(1 - x, 1 - y), \end{aligned}$$

para todo $x, y \in [0, 1]$.

La coincidencia de estas dos familias puede demostrarse de forma alternativa usando el concepto de cópula de supervivencia $C^*$ que a partir de una cópula $C$, se construye como $C^*(x, y) = x + y - 1 + C(1-x, 1-y)$ para todo $x, y \in [0, 1]$.

*Teorema 4:* Sea $C$ una cópula y sea $I$ una función binaria. Entonces $I$ es una implicación probabilística derivada de la cópula $C$ si, y sólo si, $I$ es una implicación de supervivencia derivada de la cópula $C^*$. Esto es, $I_C = I^*_{C^*}$ o, equivalentemente, $I_{C^*} = I^*_C$.

En resumen, las caracterizaciones obtenidas en los artículos [5] y [6] han permitido, por una parte, reducir cinco familias de funciones de implicación borrosas a dos únicas familias y por otra parte, clarificar su estructura y propiedades adicionales. Esto permitirá simplificar el estudio de dichas familias y facilitar su aplicación en cualquier campo donde las funciones de implicación borrosa han demostrado su utilidad.

## Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por los proyectos TIN2015-66471-P, TIN2016-75404-P AEI/FEDER, UE y TIN2016-81731-REDT.

## Referencias

[1] M. Baczyński and B. Jayaram. *Fuzzy Implications*, volume 231 of *Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Springer, Berlin Heidelberg, 2008.

[2] M. Baczyński, B. Jayaram, S. Massanet, and J. Torrens. Fuzzy implications: Past, present, and future. In J. Kacprzyk and W. Pedrycz, editors, *Springer Handbook of Computational Intelligence*, pages 183–202. Springer Berlin Heidelberg, 2015.

[3] P. Grzegorzewski. Survival implications. In S. Greco et al., editor, *Advances on Computational Intelligence - 14th International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems, IPMU 2012. Proceedings, Part II*, volume 298 of *Communications in Computer and Information Science*, pages 335–344. Springer, 2012.

[4] P. Grzegorzewski. Probabilistic implications. *Fuzzy Sets and Systems*, 226:53–66, 2013.

[5] S. Massanet, A. Pradera, D. Ruiz-Aguilera, and J. Torrens. From three to one: Equivalence and characterization of material implications derived from co-copulas, probabilistic S-implications and survival S-implications. *Fuzzy Sets and Systems*, 323:103–116, 2017.

[6] S. Massanet, A. Pradera, D. Ruiz-Aguilera, and J. Torrens. Equivalence and characterization of probabilistic and survival implications. *Fuzzy Sets and Systems*, 2018. Artículo en prensa. DOI=10.1016/j.fss.2018.06.014.