



Algoritmo Evolutivo con División del Espacio de los Objetivos en base a la Solución Nadir: Un Estudio Comparativo sobre el Problema de la Mochila 0/1 Bi-Objetivo

1st Máximo Méndez

Instituto Universitario de Sistemas Inteligentes (SIANI)
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria (ULPGC)
España

maximo.mendez@ulpgc.es

2nd Daniel Alejandro Rossit

Departamento de Ingeniería
CONICET, Universidad Nacional del Sur (UNS)
Argentina

daniel.rossit@uns.edu.ar

3rd Mariano Frutos

Departamento de Ingeniería
CONICET, Universidad Nacional del Sur (UNS)
Argentina

mfrutos@uns.edu.ar

4th Begoña González

Instituto Universitario de Sistemas Inteligentes (SIANI)
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria (ULPGC)
España

bego.landin@ulpgc.es

Resumen—Este trabajo presenta un algoritmo evolutivo multiobjetivo (AEMO) el cual divide el espacio de los objetivos, en varias regiones utilizando la solución Nadir calculada en cada generación del algoritmo. Para la clasificación de las soluciones de las distintas regiones en frentes no-dominados, se utilizan diferentes estrategias de optimización de las funciones objetivo. La idea es intensificar la diversidad del frente de soluciones no-dominadas alcanzado. El algoritmo propuesto (NSGA-II/OSD) se implementa sobre el algoritmo NSGA-II y se ensaya sobre el Problema de la Mochila 0/1 Bi-Objetivo (MOKP-0/1) bien conocido en la comunidad multiobjetivo. Con dos objetivos, este problema es de difícil resolución para un AEMO dado el elevado número de soluciones superpuestas (overlapping solutions) que se generan durante su evolución. El método propuesto ofrece muy buen desempeño cuando es comparado con los algoritmos NSGA-II y MOEA/D muy reconocidos ambos en la literatura especializada.

Index Terms—Optimización, Algoritmos Evolutivos Multiobjetivo, Dominancia de Pareto, MOKP0/1, NSGA-II, MOEA/D.

I. INTRODUCCIÓN

Un problema de optimización multiobjetivo (POM) es aquel que corresponde a una cierta realidad industrial, económica o de otra índole y sobre el que un decisor desea optimizar varios objetivos usualmente en conflicto entre sí. Cuando se resuelve un POM de complejidad difícil, métodos metaheurísticos son muy apropiados. Estos métodos no garantizan obtener el frente exacto de soluciones no-dominadas, pero sí un conjunto aproximado.

La segunda generación de algoritmos evolutivos multiobjetivo (AEMOs), ha demostrado obtener excelentes resultados resolviendo POM [1]. De naturaleza estocástica, los AEMOs están basados en el concepto de población de soluciones lo

que les proporciona gran destreza para encontrar múltiples soluciones no-dominadas en espacios de soluciones de diversa naturaleza. NSGA-II [2] y MOEA/D [12] son dos AEMOs muy reconocidos en la comunidad científica multiobjetivo. El primero, utiliza una clasificación de rangos por dominancia como mecanismo de convergencia, mientras que crowding-distance es el mecanismo usado para diversificar las soluciones. El segundo, funciona descomponiendo el POM en un número de subproblemas escalares o mono-objetivos que son resueltos todos a la misma vez mediante la evolución de una población de soluciones. Algunos trabajos recientes describen dificultades en cuanto a la especificación del punto de referencia en MOEA/D [6], [7], [9], [11]. Trabajos con AEMOs que incluyan un sub-división del espacio de los objetivos como la propuesta en este trabajo son muy escasos, sólo hemos encontrado [8], [10].

El problema de la mochila multiobjetivo en variables binarias (MOKP/0-1) es un problema combinatorio bien conocido y ampliamente manejado en la comunidad multi-objetivo. Un considerable número de métodos exactos y metaheurísticos, ver por ejemplo [3], [5], [12], intentan resolver este problema. En [4], se señala que se genera un elevado número de soluciones superpuestas (overlapping solutions) cuando los AEMOs se aplican a problemas combinatorios con muchas variables de decisión y baja dimensionalidad. La aparición de soluciones superpuestas cuando el Problema de la Mochila 0/1 Bi-Objetivo se resuelve con un AEMO, tiene un significativo impacto negativo sobre la diversidad del frente final de soluciones no-dominadas alcanzado.

Se propone un híbrido de NSGA-II, que subdivide el espacio de los objetivos en varias regiones utilizando la solución Nadir

calculada en cada generación del algoritmo. Las distintas subdivisiones utilizan diferentes estrategias de optimización de las funciones objetivo. La idea que subyace es intensificar la diversidad de soluciones del frente alcanzado, permitiendo que soluciones dominadas por los extremos del frente no-dominado alcanzado en cada generación del algoritmo puedan entrar en la población N no-dominada del algoritmo.

El resto del trabajo se organiza de la siguiente manera. En la sección II se presentan algunos conceptos básicos para entender mejor este trabajo. En la sección III se describe el método propuesto. Los resultados experimentales se detallan en la sección IV. Por último, en la sección V se presentan las conclusiones.

II. CONCEPTOS BÁSICOS

En términos de minimización, un POM puede ser definido de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \text{Min. } F(x) &= f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x) \\ \text{s.a.} \\ g_k(x) &\leq 0 & k \in (1, 2, \dots, p) \\ h_l(x) &= 0 & l \in (1, 2, \dots, q) \end{aligned} \quad (1)$$

donde $F(x)$ es el vector de objetivos a minimizar y $n \geq 2$ el número de objetivos. Las ecuaciones $g_k(x) \leq 0$ y $h_l(x) = 0$ representan respectivamente p restricciones de desigualdad y q restricciones de igualdad. Los valores de x que satisfacen el conjunto de las $(p + q)$ restricciones, definen el espacio realizable S . El vector $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in S$ es un vector solución de m variables de decisión.

El conjunto de las imágenes de cada solución realizable en el espacio de la decisión, conforma el conjunto de soluciones realizables en el espacio de los objetivos $Z = f(S)$ definido como $Z = \{z_1 = f_1(x), \dots, z_n = f_n(x), \forall x \in S\}$ y donde $z = (z_1, \dots, z_n) \in R^n$ representa una solución realizable en el espacio de los objetivos.

Una solución $z^t = (z_1^t, z_2^t, \dots, z_n^t) \in Z$ domina una solución $z^u = (z_1^u, z_2^u, \dots, z_n^u) \in Z$ y se le conoce como Pareto-óptima si se verifican las siguientes condiciones:

1. $z_j^t \leq z_j^u \quad \forall j \in (1, 2, \dots, n)$
2. $\exists j \in (1, 2, \dots, n)$ tal que $z_j^t < z_j^u$

Al conjunto de soluciones Pareto-óptimas en el espacio de soluciones se le llama conjunto óptimo de Pareto y a su imagen en el espacio de objetivos frente óptimo de Pareto.

II-A. MOEA/D con especificación de Zhang del punto de referencia

Básicamente, MOEA/D trabaja descomponiendo un POM en un número finito de sub-problemas escalares y resolviéndolos simultáneamente mediante la evolución de una población de soluciones. Algunos enfoques para convertir un POM en un sub-problema escalar se pueden consultar en [12]. El enfoque de Tchebycheff se expresa como sigue:

$$\begin{aligned} \text{Min. } g^{te}(x|\lambda, z^*) &= \max_{1 \leq i \leq n} \{\lambda_i f_i(x) - z_i^*\} \\ \text{s.a. } x &\in X \end{aligned} \quad (2)$$

donde $z^* = (z_1^*, \dots, z_n^*)$ es el punto de referencia (PR) especificado en este trabajo de la siguiente forma:

$$z_i^* = \alpha * \min\{f_i(x) | x \in X\} \text{ paracada } i = 1, \dots, n \quad (3)$$

y donde $\alpha \geq 1$.

II-B. MOEA/D con especificación de Ishibuchi del punto de referencia

Ishibuchi et al. proponen en [6] usar en (2) la siguiente especificación para el PR:

$$z^R = z_i^* - \alpha_t (z_i^{max} - z_i^*) \quad (4)$$

donde $z_i^* = (z_1^*, \dots, z_n^*)$ corresponde al mínimo valor en la función objetivo i , $z_i^{max} = (z_1^{max}, \dots, z_n^{max})$ corresponde al máximo valor de la función objetivo i en la generación en curso y α_t es un parámetro que decrece en cada generación del algoritmo. De (4) es obvio que cuando $\alpha_t = 0$ los valores z^R y z^* tienen los mismos valores.

Para hacer que el valor z^R se aproxime gradualmente al valor del punto de referencia z^* durante la ejecución del algoritmo, el valor α_t es modificado en cada generación según:

$$\alpha_t = \alpha (t_{max} - t) / (t_{max} - 1) \quad (5)$$

donde α es un valor inicial de α_t , t_{max} es el número máximo de generaciones del algoritmo y t es la generación actual. Nótese que el valor final de α_t en la última generación es cero, i.e., z^R tiende a z^* durante la ejecución del algoritmo.

III. MÉTODO PROPUESTO

El algoritmo propuesto en este trabajo consiste en una versión modificada de NSGA-II, en los siguientes términos:

1. En cada generación t del algoritmo: una población $R_t = P_t + Q_t$ es construida con P_t la población de padres de tamaño N y Q_t la población de hijos (tamaño N) generados de las operaciones de cruzamiento y mutación a partir de la población N construida en la generación $t-1$.
2. A partir de la población R_t la solución Nadir es identificada mediante algún método.
3. En base a la solución Nadir el espacio de los objetivos se divide en tres regiones independientes R_1 , R_2 y R_3 tal como se indica en la Fig. 1 izquierda.
4. Las soluciones de cada región R_1 , R_2 y R_3 son clasificadas (complejidad computacional $O(n^2N)$) en diferentes frentes no-dominados (F_1, F_2, \dots, F_n). Para la clasificación de las soluciones, se usan diferentes criterios de optimización de las funciones objetivo f_1 y f_2 .
 - a) Región R_1 : Las dos funciones objetivo f_1 y f_2 son siempre maximizadas (ver Fig. 1 derecha).
 - b) Región R_2 : La función f_1 es siempre maximizada. La función f_2 es maximizada si se cumple la condición $t \geq nt$, en caso contrario f_2 es minimizada (ver Fig. 1 derecha). El valor t es la generación actual y nt un parámetro (número de generaciones



que se maximiza o minimiza la función objetivo) que se define como:

$$nt = \alpha t_{max} \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (6)$$

- c) Región R3: La función f_2 es siempre maximizada. La función f_1 es maximizada si se cumple la condición $t \geq nt$, en caso contrario f_1 es minimizada (ver Fig. 1 derecha).

Finalizado el paso 4, toda la población R_t queda clasificada en frentes de no-dominación (F_1, F_2, \dots, F_n).

5. Para completar la población P_{t+1} hasta alcanzar un tamaño N , como en NSGA-II, las soluciones con menor rango primero, y mayor crowding-distance segundo, son escogidas.

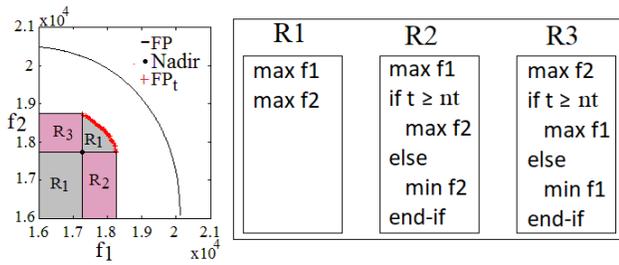


Figura 1. División propuesta del espacio de los objetivos en base a la solución Nadir (izquierda). Criterios de optimización de las funciones objetivo para cada región R_1 , R_2 y R_3 (derecha).

IV. EXPERIMENTOS Y COMPARACIONES

IV-A. Problema de la Mochila Multiobjetivo MOKP/0-1

El problema de la mochila multiobjetivo en variables binarias (MOKP/0-1) consiste en una serie de objetos o ítems con un peso, un beneficio asociado a cada uno de ellos y un límite de capacidad para cada mochila. Así, la tarea radica en encontrar el subconjunto de objetos que maximicen los beneficios totales de cada mochila y que puedan ser colocados en dichas mochilas sin exceder sus límites de capacidad. El problema es de complejidad NP-difícil y puede ser usado para modelar cualquier aplicación real que se ajuste al modelo descrito en (7).

El MOKP/0-1 puede ser definido formalmente como sigue:

$$\begin{cases} \max. & f_i(x) = \sum_{j=1}^m b_{ij}x_j \quad i = 1, \dots, n \\ \text{s.a.} & \sum_{j=1}^m w_{ij}x_j \leq c_i \quad x_j \in \{0, 1\} \end{cases} \quad (7)$$

donde: m =número de objetos, x_j =variable de decisión, n =número de sacos, b_{ij} =beneficio objeto j según saco i , w_{ij} =peso objeto j según saco i y c_i = capacidad saco i .

IV-B. Configuración de parámetros y métricas

En este trabajo, las implementaciones de NSGA-II y MOEA/D se han realizado según [2] y [12]. Ambos algoritmos son aplicados sobre el 500-MOKP/0-1 con dos objetivos, los

datos del problema y frente óptimo pueden descargarse de: <http://www.tik.ee.ethz.ch/sop/download/supplementary/testProblemSuite/>.

En todos los experimentos se utilizó codificación binaria, cruce uniforme de probabilidad 0.8 y probabilidad de mutación (bit a bit) de 1/500. Un número de 400000 evaluaciones de la función objetivo se usó como condición de parada. Tres tamaños de la población $N=50$, $N=100$ y $N=200$ soluciones fueron utilizadas en los tres algoritmos NSGA-II/OSD, NSGA-II y MOEA/D. Los valores examinados para el parámetro α definido en (6) de balance convergencia/diversidad de NSGA-II/OSD fueron $\alpha=0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$ y 1.0. Con MOEA/D, los valores ensayados de α en el cálculo del punto de referencia z^* según la especificación de Zhang definida en (3) fueron $\alpha=1.0, 1.05, 1.1, 1.15, 1.2, 1.25, 1.3$; en la versión de Ishibuchi para el cálculo del punto de referencia z^R definido en (4) y (5), los valores se fijaron en $\alpha=0.0, 0.05, 0.1, 0.5, 1.0, 1.1, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0$ y 10.0.

Para la comparación de los resultados obtenidos por los algoritmos, se emplearon la S-metric o hipervolumen H (punto de referencia usado el 0,0) sugerida en [13] y visualizaciones de los frentes de soluciones de Pareto alcanzados de valor H más próximo al valor medio final calculado en 30 ejecuciones independientes.

IV-C. Análisis previo: NSGA-II/OSD y efectos de variar el parámetro α

En esta subsección se analizan las influencias en la convergencia y diversidad del frente de soluciones alcanzado, cuando se varía el parámetro α en la ecuación (6) en el algoritmo propuesto NSGA-II/OSD. En la Fig. 2 (izquierda), se muestran los valores del hipervolumen medio al modificar los valores del parámetro α . Se puede observar que los mejores valores de H se obtienen para valores intermedios del parámetro α . Para mejor interpretar estos resultados, la Fig. 2 (centro) muestra los efectos sobre la distribución de soluciones de los frentes de Pareto obtenidos cuando $N=200$. Los frentes de Pareto de menor diversidad (mayor convergencia) y mayor diversidad (menor convergencia) se obtienen cuando $\alpha=0.0$ y $\alpha=1.0$ respectivamente. El frente con el mejor valor del hipervolumen se alcanza cuando $\alpha=0.5$, ver la Fig. 2 (derecha).

IV-D. Resultados comparativos: NSGA-II/OSD vs NSGA-II

En esta subsección se compara el algoritmo NSGA-II/OSD propuesto en este trabajo con el algoritmo NSGA-II de Deb et al. [2]. La Fig. 3 muestra los frentes de soluciones de Pareto obtenidos por ambos algoritmos. Se observa que el frente de soluciones alcanzado con el método propuesto ($\alpha=0.5$) tiene bastante más diversidad que el alcanzado por NSGA-II, aunque en términos de convergencia parece que NSGA-II obtiene mejor valor. La Fig. 4 (izquierda) muestra que en términos de la métrica H , el frente de soluciones logrado por NSGA-II/OSD es mejor que el obtenido por NSGA-II; también la Fig. 4 (derecha) señala para NSGA-II/OSD un menor valor de la desviación estándar del hipervolumen. En la Fig. 5 (izquierda) se aprecia que durante la evolución de

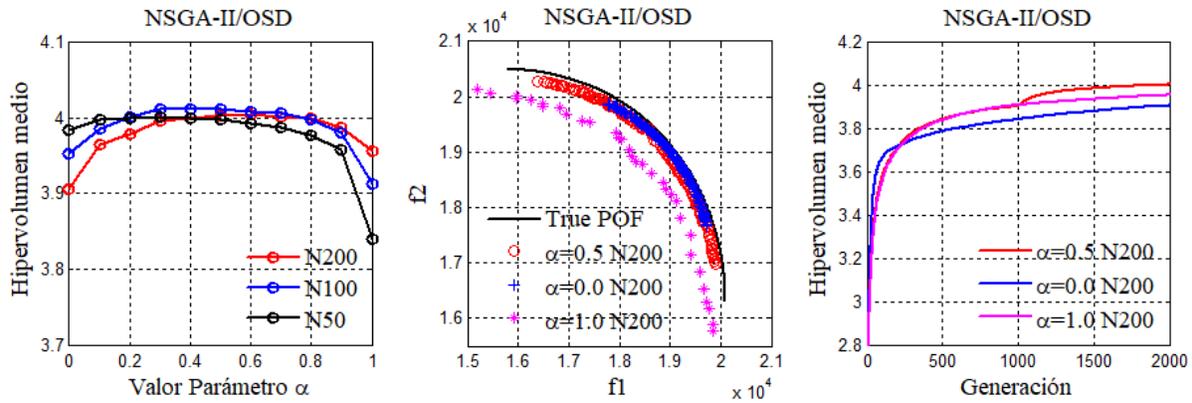


Figura 2. Valores H al variar el parámetro α en el algoritmo propuesto NSGA-II/OSD (izquierda). Gráficas de soluciones no-dominadas con el valor H más próximo al valor medio final en 30 ejecuciones (centro). Evolución del hipervolumen medio de los frentes mostrados en la gráfica central (derecha).

los algoritmos, el porcentaje de soluciones diferentes en la población N de soluciones es siempre mejor para el algoritmo propuesto, lo que justifica la mayor diversidad del frente de soluciones logrado por NSGA-II/OSD. También, el número de reparaciones por ensayo realizadas a los cromosomas de las soluciones de la población para que sean factibles, es menor con el método propuesto tal como se aprecia en la Fig. 5 (derecha).

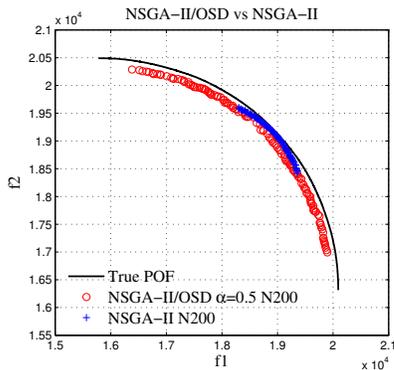


Figura 3. NSGA-II/OSD versus NSGA-II: gráficas de soluciones no-dominadas con el valor H más próximo al valor medio final en 30 ejecuciones.

IV-E. Análisis previo: MOEA/D e importancia de la especificación del punto de referencia PR

Dos especificaciones del punto de referencia -la de Zhang y la de Ishibuchi descritas en los apartados II-A y II-B- se comparan en esta subsección. La Fig. 6 (izquierda) muestra los valores del hipervolumen medio H al variar el valor α en la especificación de Zhang del punto de referencia en MOEA/D según la ecuación (3). El valor H crece hasta un valor máximo (cuando $\alpha = 1.2$) para luego volver a decrecer. También se pueden observar, en la Fig. 7 (izquierda), los efectos sobre la diversidad de los frentes de soluciones alcanzados cuando $\alpha=1.0$ (mínima diversidad) y $\alpha=1.2$ (máxima diversidad y máximo valor de H).

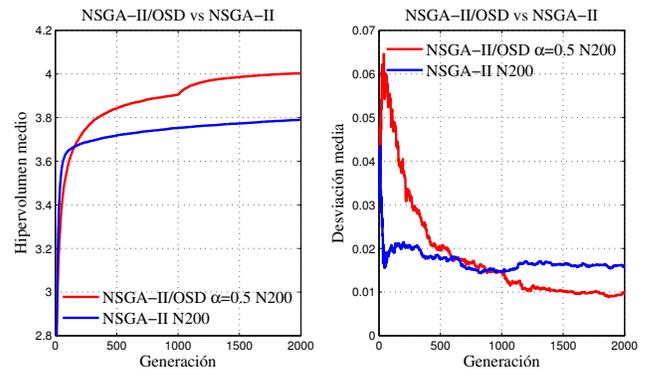


Figura 4. NSGA-II/OSD versus NSGA-II: Evolución de los valores de los hipervolumenes medio (izquierda) y desviaciones del hipervolumen (derecha).

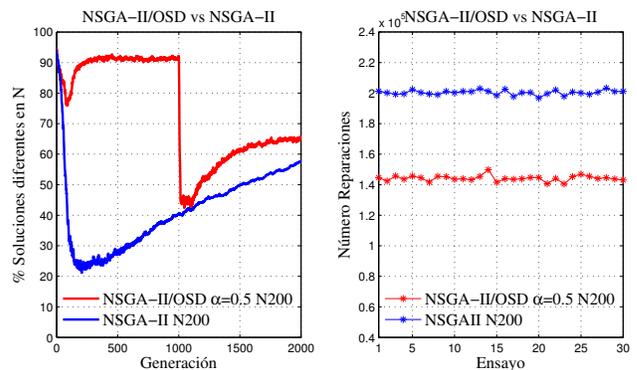


Figura 5. NSGA-II/OSD versus NSGA-II: Evolución de los porcentajes medios de soluciones diferentes en las poblaciones N (izquierda) y de los números de reparaciones de los cromosomas por ensayo (derecha).

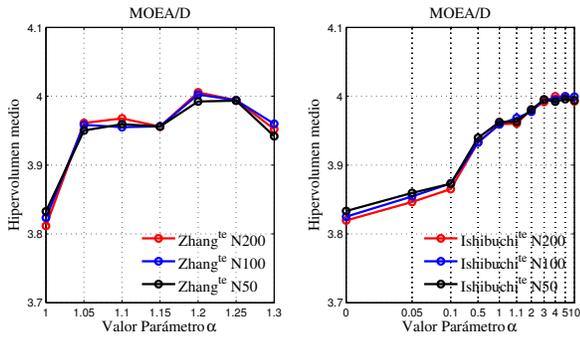


Figura 6. Valores H al variar el parámetro α en la especificación de Zhang del PR en MOEA/D (izquierda). Valores H al variar el parámetro α en la especificación de Ishibuchi del PR en MOEA/D (derecha).

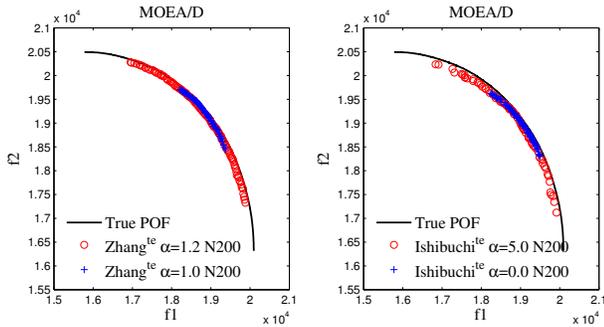


Figura 7. Gráficas de soluciones no-dominadas con el valor H más próximo al valor medio final en 30 ejecuciones: especificación de Zhang del PR (izquierda), especificación de Ishibuchi del PR (derecha).

Utilizando ahora en MOEA/D la especificación de Ishibuchi del punto de referencia según las ecuaciones (4) y (5), también al variar el valor α se obtienen diferentes valores del hipervolumen H. La Fig. 6 (derecha) señala que el valor H crece hasta un valor máximo (cuando $\alpha \geq 3$) a partir del cual permanece estable.

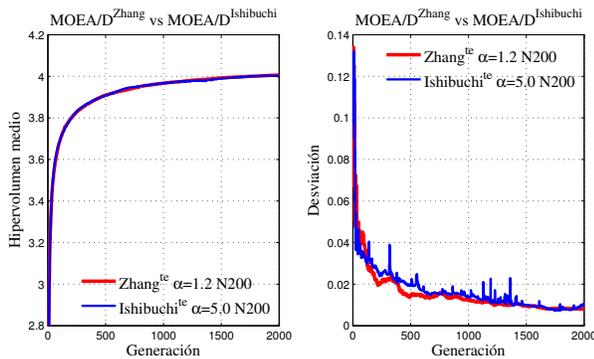


Figura 8. Evolución de los hipervolumenes medio (izquierda) y desviaciones del hipervolumen (derecha) usando las especificaciones de Zhang e Ishibuchi del PR en MOEA/D.

Una comparación de MOEA/D usando las especificaciones de Zhang con el valor $\alpha=1.2$ e Ishibuchi con valores $\alpha \geq 3$, muestra valores parecidos de la métrica H (Fig. 8 izquierda)

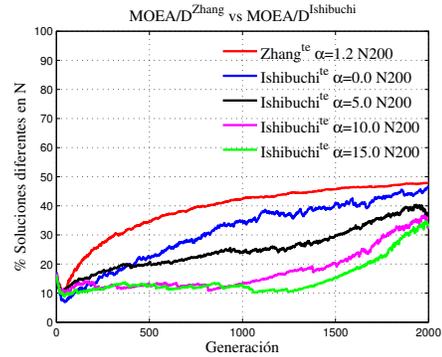


Figura 9. Evolución de los porcentajes medios de soluciones diferentes en las poblaciones N.

y de la desviación de H (Fig. 8 derecha) a lo largo de la evolución del algoritmo. No obstante, hay que señalar que el frente de soluciones logrado por MOEA/D con la especificación de Ishibuchi es más pobre (ver Fig. 7 derecha) en número de soluciones diferentes en la población N que el logrado usando la especificación de Zhang. En la Fig. 9 se muestra que utilizando la especificación de Zhang, MOEA/D consigue siempre en toda la evolución del algoritmo un mayor número de soluciones diferentes en la población N; por otro lado, en dicha gráfica también se observa que incrementando el valor α usando la especificación de Ishibuchi en MOEA/D, hay un decremento del número de soluciones diferentes en N.

IV-F. Resultados comparativos: NSGA-II/OSD vs MOEA/D

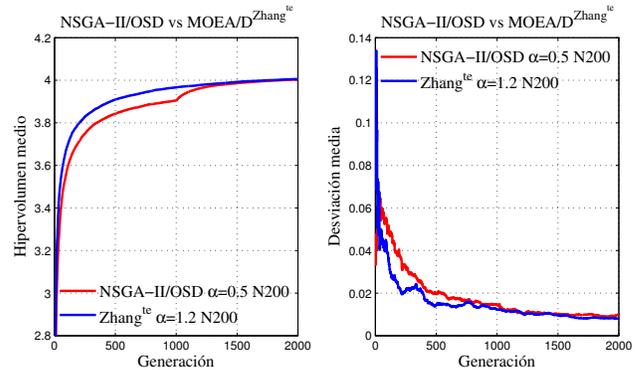


Figura 10. NSGA-II/OSD versus MOEA/D: Evolución de los valores de los hipervolumenes medio (izquierda) y desviaciones del hipervolumen (derecha).

En esta subsección comparamos el algoritmo NSGA-II/OSD propuesto en este trabajo y el algoritmo MOEA/D con especificación de Zhang del PR, utilizando en ambos algoritmos aquel valor α que proporcionó el mejor valor del hipervolumen medio H tras 30 ejecuciones independientes y que según los experimentos descritos en anteriores apartados fue $\alpha=1.2$ para ambos algoritmos. En la Fig. 10 (izquierda) se observa que durante la primera mitad de la evolución de los algoritmos, MOEA/D tiene un mejor valor de H luego, los valores H obtenidos por ambos algoritmos se igualan justo a partir de

que las estrategias usadas con NSGA-II/OSD en las regiones R2 y R3 (Fig. 1) son a maximizar ambos objetivos. Idéntica conclusión se obtiene con las desviaciones del hipervolumen en la Fig. 10 (derecha).

De otra parte, en la Fig. 11 se observa que el frente de soluciones alcanzado con el método propuesto obtiene más diversidad que el alcanzado por MOEA/D con especificación de Zhang del PR, aunque en términos de convergencia es MOEA/D quien parece tener mejor valor. Estas diferencias se pueden explicar porque NSGA-II/OSD presenta siempre un mejor porcentaje de soluciones diferentes en la población N durante la evolución del algoritmo tal como se ve en la Fig. 12 (izquierda). Finalmente, la Fig. 12 (derecha) muestra que NSGA-II/OSD realiza un menor número de reparaciones de cromosomas para factibilizar las soluciones.

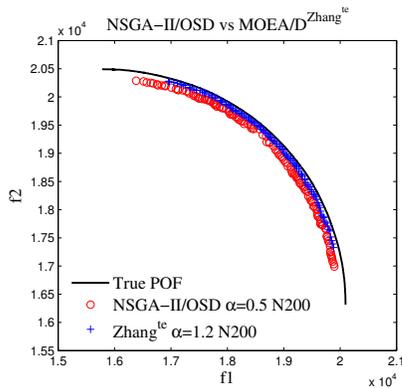


Figura 11. NSGA-II/OSD versus MOEA/D: gráficas de soluciones no-dominadas con el valor H más próximo al valor medio final en 30 ejecuciones.

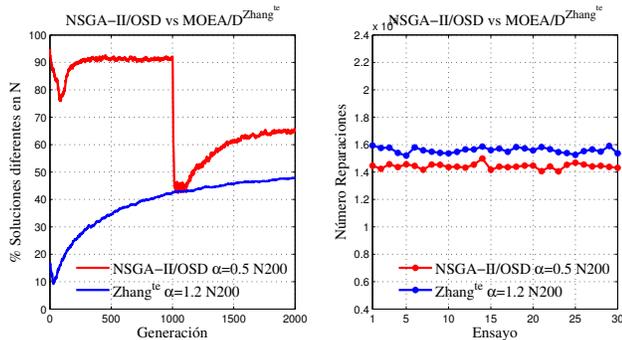


Figura 12. NSGA-II/OSD versus MOEA/D: Evolución de los porcentajes medios de soluciones diferentes en las poblaciones N (izquierda) y de los números de reparaciones de los cromosomas por ensayo (derecha).

V. CONCLUSIONES

En este trabajo se propone un algoritmo evolutivo multi-objetivo (NSGA-II/OSD) que hibridiza NSGA-II. El algoritmo subdivide el espacio de los objetivos en varias regiones utilizando la solución Nadir calculada en cada generación del algoritmo. Las distintas subdivisiones utilizan diferentes estrategias de optimización de las funciones objetivo. El algoritmo NSGA-II/OSD propuesto permite definir un parámetro

$\alpha \in [0, 1]$ muy fácil de usar, que permite balancear la diversidad/convergencia del frente de soluciones no-dominadas alcanzado por el algoritmo; para el valor $\alpha=1.2$ el algoritmo logra su mejor valor de hipervolumen medio.

El algoritmo propuesto obtiene muy buen desempeño y mejores resultados cuando es comparado con NSGA-II. Cuando NSGA-II/OSD es comparado con MOEA/D con la especificación del punto de referencia de Zhang según (3), en términos de la métrica del hipervolumen medio, ambos algoritmos obtienen valores similares. No obstante, NSGA-II/OSD logra una mayor diversificación de soluciones en el frente no-dominado final alcanzado, mientras MOEA/D parece alcanzar mejor convergencia.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos el soporte económico del Departamento de Informática y Sistemas de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria.

REFERENCIAS

- [1] Carlos A. Coello Coello, Gary B. Lamont, David A. Van Veldhuizen. Evolutionary algorithms for solving multi-objective problems. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 2006.
- [2] K. Deb, A. Pratap, S. Agrawal, T. Meyarivan. A Fast and Elitist Multiobjective Genetic Algorithm : NSGA-II. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, Vol. 6, n2, pages 182-197, 2002.
- [3] X. Gandibleux, A. Freville. Tabu search based procedure for solving the 0-1 multiobjective knapsack problem: the two objectives case. J. of Heuristics, 6(3): 361-383, 2000.
- [4] Hisao Ishibuchi, Kaname Narukawa, Yusuke Nojima. Handling of Overlapping Objective Vectors in Evolutionary Multiobjective Optimization. International Journal of Computational Intelligence Research 1(2005): 1-18, 2005
- [5] Hisao Ishibuchi, Naoya Akedo, Yusuke Nojima. Behavior of multiobjective evolutionary algorithms on many-objective knapsack problems. IEEE Transactions on Evolutionary Computation 19(2), 2015.
- [6] Hisao Ishibuchi, Ken Doi, Yusuke Nojima. Reference Point Specification in MOEA/D for Multi-Objective and Many-Objective Problems. 2016 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics (SMC), 2016.
- [7] R. Saborido, A.B. Ruiz, M. Luque. Global WASF-GA: An Evolutionary Algorithm in Multiobjective Optimization to approximate the whole Pareto Optimal Front. Evolutionary Computation 25(2): 309-349, 2017.
- [8] Mingzhao Wang, Yuping Wang, Xiaoli Wang. A Space Division Multiobjective Evolutionary Algorithm Based on Adaptive Multiple Fitness Functions. International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence 30(3), 2016.
- [9] Rui Wang, Jian Xiong, Hisao Ishibuchi, Guohua Wu, Tao Zhang. On the effect of reference point in MOEA/D for multi-objective optimization. Applied Soft Computing 58(2017): 25-34, 2017.
- [10] Yuping Wang, Chuangyin Dang. Improving Multiobjective Evolutionary Algorithm by Adaptive Fitness and Space Division. In: Wang L., Chen K., Ong Y.S. (eds) Advances in Natural Computation. ICNC 2005. LNCS, vol 3612. Springer, Berlin, Heidelberg, 2005.
- [11] Zhenkun Wang, Qingfu Zhang, Hui Li, Hisao Ishibuchi, Licheng Jiao. On the use of two reference points in decomposition based multiobjective evolutionary algorithms. Swarm and Evolutionary Computation 34(2017): 89-102, 2017.
- [12] Q. Zhang and H. Li. MOEA/D: A multi-objective evolutionary algorithm based on decomposition. IEEE Trans. Evol. Comput., 11(6): 712-731, 2007.
- [13] E. Zitzler, L. Thiele, *Multiobjective optimization using evolutionary algorithms - A comparative case study*, In A.E. Eiben et al. (Eds.): Parallel Problem Solving from Nature, LNCS, Volume 1498, pages 292-301, Springer, Heidelberg, 1998.