Una definición de la Integral de Choquet intervalo-valorada basada en permutaciones admisibles

Daniel Paternain, Laura De Miguel, Gustavo Ochoa, Inmaculada Lizasoain, Humberto Bustince
Departamento de Estadística, Informática y Matemáticas
Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España
{daniel.paternain,laura.demiguel,ochoa,ilizasoain,bustince}@unavarra.es

Radko Mesiar
Department of Mathematics and Descriptive Geometry, Faculty of Civil Engineering,
Slovak University of Technology, Bratislava, Eslovaquia,
mesiar@math.sk

***Abstract*—La agregación o fusión de datos intervalo-valorados no es una tarea trivial. Esto es debido a que para aplicar determinadas funciones de agregación es necesario ordenar totalmente los datos a agregar. Para solucionar el problema del orden, en la literatura podemos encontrar soluciones basadas en el concepto de orden admisible. Tras analizar las ventajas e inconvenientes de esta propuesta, en este trabajo proponemos el concepto de permutación admisible y de integral de Choquet intervalo-valorada basada en permutaciones admisibles. Este nuevo operador nos permite agregar de una manera efectiva un conjunto de intervalos solucionando los problemas encontrados en las propuestas basadas en órdenes admisibles.**

***Index Terms*—Agregación, Fusión, Integral de Choquet, intervalos, permutación admisible.**

I. Introducción

La fusión de información es un paso clave en multitud de aplicaciones del mundo real, dado que en casi todas ellas es necesario combinar o fusionar en algún momento varias fuentes de información en un único valor representativo [2], [3], [11]. Ejemplos de dichas aplicaciones son la toma de decisiones multi-experto y multi-criterio, la fusión de sensores, el procesamiento digital de imágenes, la minería de datos o el aprendizaje automático, entre otros.

Cuando el proceso de fusión de información tiene un alto grado de incertidumbre asociada a los datos, las extensiones de los conjuntos difusos pueden ser muy útiles para manejar dicha incertidumbre [1], [4], [8]. Algunas extensiones que han sido muy utilizadas en la literatura son los conjuntos intervalo-valorados difusos, los conjuntos intuicionistas de Atanassov o los tipo-2. En este trabajo nos centramos en la fusión de información intervalo-valorada, ya que con una complejidad reducida, los intervalos permiten tratar la incertidumbre de manera efectiva. Ejemplos de la utilización de información intervalo-valorada pueden ser la información proveniente de los sensores, que es convertida a un intervalo de confianza teniendo en cuenta la precisión del propio instrumento; o en toma de decisiones, los intervalos pueden ser una herramienta muy útil para los expertos cuando éstos no son capaces de asignar una puntuación exacta a una alternativa/criterio.

Sin embargo, la extensión de algunas funciones de agregación para manejar información intervalo-valorada no es trivial. Concretamente, tenemos en mente funciones como los operadores OWA o la integral de Choquet, donde es necesario ordenar los datos de entrada antes de ser fusionados. El problema surge debido a que el orden natural entre intervalos es un orden parcial y, por tanto, existen elementos incomparables que no pueden ser ordenados.

Para solucionar el problema del orden en las funciones de agregación intervalo-valoradas, en [5] se propuso una solución basada en la construcción de órdenes admisibles a partir de una pareja de funciones. Basándose en el concepto de orden admisible, en [6] se propuso una nueva definición de la integral de Choquet intervalo-valorada en la que los datos se ordenaban mediante la elección de un orden admisible. Sin embargo, aunque el problema del orden estaba solucionado, surge un nuevo problema: la elección del orden admisible más apropiado. Parece razonable pensar que si en una aplicación elegimos un mal orden admisible, los resultados de la fusión de información pueden ser contraproducentes para el resultado final de la aplicación. Se podría pensar que probando muchos órdenes admisibles se soluciona dicho problema, pero debemos tener en cuenta que: (1) podemos definir infinitos órdenes admisibles y (2) muchos órdenes admisibles son equivalentes entre sí, produciendo la misma ordenación de los datos.

Para solucionar el problema de la elección de un orden admisible concreto, en este trabajo proponemos el concepto de permutación admisible. Este concepto nos permite identificar de cuántas maneras diferentes podemos ordenar un conjunto finito de intervalos respetando en todo momento las restricciones impuestas por el orden parcial. Así, si tenemos en cuenta únicamente las permutaciones admisibles de un conjunto de intervalos podemos aislarnos de la elección de un orden admisible concreto. Basándonos en este concepto, en este trabajo proponemos además una nueva aproximación para la integral de Choquet intervalo-valorada que tiene en cuenta todas las formas posibles de ordenar el conjunto de intervalos a ordenar y obtiene el resultado final realizando un promedio de todas ellos.

Este trabajo se organiza de la siguiente manera: en la Sección 2 recordamos los conceptos preliminares necesarios para entender el resto del trabajo. En la Sección 3 recordamos el concepto de orden admisible y de integral de Choquet basada en órdenes admisibles. En la Sección 4 proponemos el concepto de permutación admisible y de integral de Choquet basada en permutaciones admisibles y estudiamos algunas de sus propiedades. Finalmente, comentamos las conclusiones y líneas futuras en la Sección 5.

II. Preliminares

Comenzamos esta sección recordando el concepto de función de agregación en conjuntos parcialmente ordenados.

Definición 1: [12] Sea $(L, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado acotado con un elemento mínimo 0_L y un elemento máximo 1_L. Una función $M : L^n \to L$ es una función de agregación si satisface las siguientes propiedades:

(i) $M(0_L, \ldots, 0_L) = 0_L$ y $M(1_L, \ldots, 1_L) = 1_L$;
(ii) es creciente en cada argumento, es decir, para todo $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in L^n$, $M(x_1, \ldots, x_n) \preceq M(y_1, \ldots, y_n)$ si $x_1 \preceq y_1, \ldots, x_n \preceq y_n$.

Obsérvese que si L es el intervalo unidad junto con el orden habitual de los números reales, entonces obtenemos la definición usual de función de agregación [2], [3], [11].

En este trabajo nos centramos en la agregación de información intervalo-valorada. Por eso, tomamos $L = L([0,1])$ como el conjunto de todos los subintervalos cerrados del intervalo $[0,1]$:

$$L([0,1]) = \{\mathbf{x} = [\underline{x}, \overline{x}] | 0 \leq \underline{x} \leq \overline{x} \leq 1\}.$$

Nótese que $L([0,1])$ es un conjunto parcialmente ordenado con respecto a la relación de orden $\leq_L$ definida de la siguiente manera: para cada $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L([0,1])$,

$$\mathbf{x} \leq_L \mathbf{y} \text{ si y solo si } \underline{x} \leq \underline{y} \text{ y } \overline{x} \leq \overline{y}.$$

De hecho, $(L([0,1]), \leq_L)$ es un retículo completo donde el elemento mínimo es $0_L = [0,0]$ y el máximo es $1_L = [1,1]$ ([10]). En este retículo, el ínfimo y supremo de cada pareja de elementos viene dado, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 &= [\min(\underline{x}_1, \underline{x}_2), \min(\overline{x}_1, \overline{x}_2)] \\ \mathbf{x}_1 \vee \mathbf{x}_2 &= [\max(\underline{x}_1, \underline{x}_2), \max(\overline{x}_1, \overline{x}_2)]. \end{aligned}$$

Ejemplo 1: Los siguientes son ejemplos de funciones de agregación intervalo-valorada:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{arith}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) &= \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underline{x}_i, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i\right]; \\ \mathbf{M}_{min}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) &= \left[\min_{i=1,\ldots,n} \underline{x}_i, \min_{i=1,\ldots,n} \overline{x}_i\right]; \\ \mathbf{M}_{max}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) &= \left[\max_{i=1,\ldots,n} \underline{x}_i, \max_{i=1,\ldots,n} \overline{x}_i\right]. \end{aligned}$$

A. Medidas difusas y la integral de Choquet

Antes de definir el concepto de integral de Choquet, recordamos el concepto de medida difusa (ver [14], [15]).

Definición 2: Sea $X = \{1, \ldots, n\}$. Una medida difusa definida sobre X es una función $m : 2^X \to [0,1]$ tal que

(i) $m(\emptyset) = 0$ y $m(X) = 1$;
(ii) si $E \subset F$, entonces $m(E) \leq m(F)$.

Ejemplo 2:

- La medida difusa más pequeña viene dada por
$$m_*(E) = \begin{cases} 1 & \text{si } E = X; \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$
Obsérvese que para cualquier medida difusa m sobre X se cumple que $m_*(E) \leq m(E)$, para todo $E \subseteq X$.
- La medida difusa más grande viene dada por
$$m^*(E) = \begin{cases} 0 & \text{si } E = \emptyset; \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$
Obsérvese que para cualquier medida difusa m sobre X, se cumple que $m(E) \leq m^*(E)$ para todo $E \subseteq X$.

Definición 3: [9] Sea $m : 2^X \to [0,1]$ una medida difusa. La integral de Choquet discreta de $x_1, \ldots, x_n \in [0,1]$ con respecto a m viene dada por

$$\begin{aligned} C_m(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_{\sigma(i)} (m(\{\sigma(i), \ldots, \sigma(n)\}) - \\ m(\{\sigma(i+1), \ldots, \sigma(n)\})) \end{aligned} \quad (1)$$

donde $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ es una permutación tal que $x_{\sigma(1)} \leq \cdots \leq x_{\sigma(n)}$ y donde tomamos $\{x_{\sigma(n+1)}, x_{\sigma(n)}\} = \emptyset$.

III. El concepto de orden admisible y la integral de Choquet basada en órdenes admisibles

Como hemos visto en la Sección 2, el orden $\leq_L$ definido en $L([0,1])$ es un orden parcial. Esto significa que no siempre es posible comparar (ordenar) dos intervalos cualesquiera. Sin embargo, sabemos que muchas funciones de agregación, como la integral de Choquet, los operadores OWA o la integral de Sugeno, están basadas en la ordenación total de los datos de entrada. De esta manera, si queremos extender dichas funciones para agregar información intervalo-valorada, necesitamos solucionar el problema del orden.

Una primera solución a este problema fue dada en [5] mediante el concepto de orden admisible. Un orden admisible es un orden lineal definido en $L([0,1])$ que refina el orden parcial $\leq_L$.

Definición 4: [5] Sea $(L([0,1]),\preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Decimos que el orden $\preceq$ definido en $L([0,1])$ es un orden admisible si

(i) $\preceq$ es un orden lineal en $L([0,1])$;
(ii) para todo $\mathbf{x},\mathbf{y}\in L([0,1])$ con $\mathbf{x}\leq_L\mathbf{y}$, se tiene $\mathbf{x}\preceq\mathbf{y}$.

Ejemplo 3: Los siguientes son ejemplos de órdenes admisibles:

(i) $\mathbf{x}\preceq_{Lex1}\mathbf{y}$ (orden lexicográfico habitual en $\mathcal{R}^2$) si y solo si $\underline{x}<\underline{y}$ o ($\underline{x}=\underline{y}$ y $\overline{x}\leq\overline{y}$);
(ii) $\mathbf{x}\preceq_{Lex2}\mathbf{y}$ si y solo si $\overline{x}<\overline{y}$ o ($\overline{x}=\overline{y}$ y $\underline{x}\leq\underline{y}$);
(iii) $\mathbf{x}\preceq_{XY}\mathbf{y}$ (orden de Xu-Yager dado en [17]) si y solo si $\underline{x}+\overline{x}<\underline{y}+\overline{y}$ o ($\underline{x}+\overline{x}=\underline{y}+\overline{y}$ y $\overline{y}-\underline{y}\leq\overline{x}-\underline{x}$).

Una de las posibles formas de construcción de órdenes admisibles es mediante la utilización de dos funciones de agregación en $[0,1]$ que satisfacen determinadas propiedades. Sea $K([0,1])=\{(\underline{x},\overline{x})\in[0,1]^2|\underline{x}\leq\overline{x}\}$.

Proposición 1: [5] Sean $A,B:[0,1]^2\to[0,1]$ dos funciones de agregación definidas en $[0,1]$ tales que, para todo $(x,y),(u,v)\in K([0,1])$, las igualdades $A(x,y)=A(u,v)$ y $B(x,y)=B(u,v)$ se cumplen simultáneamente solo si $(x,y)=(u,v)$. Definamos la relación $\preceq_{\mathrm{A,B}}$ en $L([0,1])$ dada por $\mathbf{x}\preceq_{\mathrm{A,B}}\mathbf{y}$ si y solo si

$$A(\underline{x},\overline{x}) \quad < \quad A(\underline{y},\overline{y}) \quad \text{o} \tag{2}$$
$$\big(A(\underline{x},\overline{x})=A(\underline{y},\overline{y}) \quad \text{y} \quad B(\underline{x},\overline{x})\leq B(\underline{y},\overline{y})\big)\,. \tag{3}$$

Entonces, $\preceq_{\mathrm{A,B}}$ es un orden admisible de $L([0,1])$.

A. La integral de Choquet basada en órdenes admisibles

A raíz de la obtención de un método de construcción de órdenes admisibles entre intervalos, en [6] los autores propusieron una nueva definición de operador OWA y de integral de Choquet intervalo-valorados basados en órdenes admisibles. La principal característica de esta nueva aproximación es que los datos de entrada son ordenados en función de un orden admisible fijado previamente. En este sentido, si fijamos los datos a agregar, podemos obtener tantas integrales de Choquet (operadores OWA) diferentes como órdenes admisibles.

Definición 5: Sea $\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_n\in L([0,1])$ y sea $m:2^X\to[0,1]$ una medida difusa. La integral de Choquet respecto al orden admisible $\preceq_{\mathrm{A,B}}$, con notación $\mathbf{C}_m^{\preceq_{\mathrm{A,B}}}$, viene dada por

$$\mathbf{C}_m^{\preceq_{\mathrm{A,B}}}(\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_n)=\sum_{i=1}^n\mathbf{x}_{\sigma_{A,B}(i)}(m(\{\sigma_{A,B}(i),\dots,\\ \sigma_{A,B}(n)\})-m(\{\sigma_{A,B}(i+1),\dots,\sigma_{A,B}(n)\}))$$

donde $\sigma_{A,B}:\{1,\dots,n\}\to\{1,\dots,n\}$ es una permutacion tal que

$$\mathbf{x}_{\sigma_{A,B}(1)}\preceq_{\mathrm{A,B}}\cdots\preceq_{\mathrm{A,B}}\mathbf{x}_{\sigma_{A,B}(n)}$$

y donde tomamos $\{\sigma_{A,B}(n),\sigma_{A,B}(n+1)\}=\emptyset$.

Una de las principales ventajas de esta nueva definición es el hecho de que $\mathbf{C}_m^{\preceq_{\mathrm{A,B}}}$ generaliza la definición usual de integral de Choquet definida en $[0,1]$, ya que

$$\mathbf{C}_m^{\preceq_{\mathrm{A,B}}}([x_1,x_1],\dots,[x_n,x_n])=\\ [C_m(x_1,\dots,x_n),C_m(x_1,\dots,x_n)].$$

Además, si los datos de entrada son comparables con respecto al orden usual $\leq_L$, entonces obtenemos los mismos resultados que si aplicamos la integral de Choquet sobre los extremos inferiores y superiores.

Proposición 2: [6] Si $(\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n),(\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_n)$ son comonótonos, es decir, para todo $i,j\in\{1,\dots,n\}$

$$(\underline{x}_i-\underline{x}_j)(\overline{x}_i-\overline{x}_j)\geq 0$$

entonces se cumple que $\mathbf{C}_m^{\preceq_{\mathrm{A,B}}}(\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_n)=\mathbf{C}_m(\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_n)$ para cualquier pareja admisible de funciones de agregación (A,B).

Sin embargo, aunque el problema se resuelve parcialmente con esta aproximación, también tiene una desventaja: debemos fijar un orden admisible. Recordemos que existen infinitos órdenes admisibles y que, en general, no es sencillo identificar el orden admisible apropiado para cada problema. Por estas razones, la elección del orden admisible es un punto crucial de esta aproximación que intentamos resolver mediante el concepto de permutación admisible.

IV. El concepto de permutación admisible y la integral de Choquet basada en permutaciones admisibles

En esta sección proponemos una nueva aproximación a la integral de Choquet intervalo-valorada que permita resolver el problema de $\mathbf{C}_m^{\preceq_{\mathrm{A,B}}}$. De hecho, nuestra propuesta no se basa en la elección de un orden específicio, sino que trata de tener en cuenta todos los órdenes admisibles posibles. Nótese que aunque exista la posibilidad de definir infinitos órdenes admisibles, cuando ordenamos un conjunto finito de intervalos, el número de permutaciones de dichas entradas es finito. Esto es debido a que muchos órdenes admisibles diferentes producen la misma ordenación de los datos y, por tanto, son equivalentes.

Ejemplo 4: Supongamos el orden admisible $\preceq_{A,B}$ dado por $A(x,y)=0.5x+0.5y$ y $B(x,y)=0.4x+0.6y$. La pareja de funciones (A,B) es admisible y, por tanto, el orden también. Supongamos ahora una segunda pareja de funciones admisibles (A,B') donde $B'(x,y)=0.3x+0.7y$. Bajo estas condiciones, si $\mathbf{x}_1=_{A,B}\mathbf{x}_2$, entonces también ocurre que $\mathbf{x}_1=_{A,B'}\mathbf{x}_2$; si $\mathbf{x}_1\prec_{A,B}\mathbf{x}_2$, debemos distinguir dos casos: (1) Si $A(\underline{x}_1,\overline{x}_1)<A(\underline{x}_2,\overline{x}_2)$, entonces también $\mathbf{x}_1\prec_{A,B'}\mathbf{x}_2$; (2) Si $A(\underline{x}_1,\overline{x}_1)=A(\underline{x}_2,\overline{x}_2)$, entonces por la definición de B' tenemos que $B(\underline{x}_1,\overline{x}_1)<B(\underline{x}_2,\overline{x}_2)$ implica que $B'(\underline{x}_1,\overline{x}_1)<B'(\underline{x}_2,\overline{x}_2)$ y por tanto $\mathbf{x}_1\prec_{A',B'}\mathbf{x}_2$. De esta manera podemos ver que ambos órdenes son equivalentes. De hecho, cualquier otro orden $\preceq_{(A,B')}$ dado por $B'(x,y)=\alpha x+(1-\alpha)y$ con $\alpha<0.5$ es equivalente al orden $\preceq_{A,B}$

Además, es importante mencionar que, dados n intervalos, no todas las $n!$ potenciales formas de ordenar dichos intervalos son admisibles. Recordemos que los órdenes admisibles refinan el orden parcial habitual $\leq_L$. De esta manera, dados $\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_n\in L([0,1])$ y una permutación $\sigma:\{1,\dots,n\}\to\{1,\dots,n\}$, si $\mathbf{x}_i<_L\mathbf{x}_j$, entonces debemos exigir que $\sigma^{-1}(i)<\sigma^{-1}(j)$. Más aún, si $\mathbf{x}_i=\mathbf{x}_j$, entonces para cada k entre $\sigma^{-1}(i)$ y $\sigma^{-1}(j)$, debemos exigir que $\mathbf{x}_i=\mathbf{x}_{\sigma(k)}=\mathbf{x}_j$.

Basándonos en estas dos ideas, a continuación presentamos la definición de permutación admisible de un conjunto de intervalos.

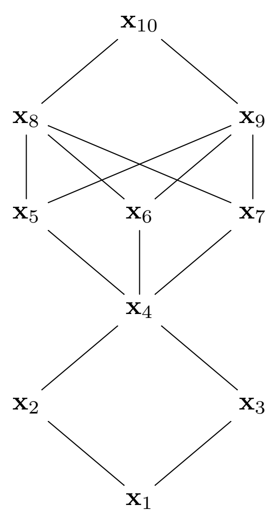
Definición 6: Sean $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in L([0,1])$. Decimos que una permutación $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ de $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ es una permutación admisible respecto al orden parcial $\leq_L$ si

(i) para todo $\mathbf{x}_i <_L \mathbf{x}_j$, tenemos que $\sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(j)$;

(ii) para cada $\mathbf{x}_i$, el conjunto $\{\sigma^{-1}(j) | j \in \{1, \ldots, n\} \text{ with } \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_j\}$ forma un intervalo en $\mathbb{N}$.

Obsérvese que la primera propiedad de la Definición 6 sirve para que no se altere el orden de los intervalos que sean comparables mediante el orden parcial, mientras que la segunda propiedad sirve para que los intervalos iguales sean ordenados de manera consecutiva.

Ejemplo 5: Consideremos un conjunto de 10 intervalos cuyas relaciones de orden vienen dadas en el siguiente diagrama de Hasse:



Para este conjunto de intervalos existe un total de 24 permutaciones admisibles: 2 formas de ordenar $\mathbf{x}_2$ y $\mathbf{x}_3$, 6 formas de ordenar $\mathbf{x}_5$, $\mathbf{x}_6$ y $\mathbf{x}_7$ y otras 2 formas de ordenar $\mathbf{x}_8$ y $\mathbf{x}_9$. Finalemente, $24 = 2 \times 6 \times 2$. Nótese que las restricciones impuestas a las permutaciones admisibles reducen las potenciales $10! = 3628800$ permutaciones de 10 elementos a únicamente 24 permutaciones admisibles.

A. La integral de Choquet basada en permutaciones admisibles

En la sección anterior hemos visto que la propuesta de integral de Choquet intervalo-valorada se basaba en la elección de un orden admisible concreto que permite ordenar completamente el conjunto de intervalos a agregar. La propuesta que hacemos en esta sección es algo diferente ya que, en lugar de fijar un orden concreto, tiene en cuenta todas las posibles formas de ordenar dicho conjunto de intervalos. De hecho, lo que proponemos es una agregación en dos pasos: en el primero, se calcula el conjunto de permutaciones admisibles de los datos; una vez calculados, se aplica la integral de Choquet utilizando dicha permutación de datos y el resultado final se agrega realizando un promedio que utiliza la media aritmética. De esta manera, la integral de Choquet que proponemos tiene en cuenta, de alguna manera, todas las posibles ordenaciones de los datos.

Definición 7: Sean $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in L([0,1])$ y sea $m : 2^n \to [0,1]$ una medida difusa. Sean $\sigma_1, \ldots, \sigma_p : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ el conjunto de las permutaciones admisibles de $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$. La integral de Choquet promedio $\mathbf{C}_m^{arith}$ respecto a m viene dada por

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_m^{arith}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) = \mathbf{M}_{arith}(\, &\mathbf{C}_m^{\sigma_1}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n), \ldots, \\ &\mathbf{C}_m^{\sigma_p}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n))\end{aligned} \tag{4}$$

donde

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_m^{\sigma_j}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_{\sigma_j(i)} (m(\{\sigma_j(i), \ldots, \\ \sigma_j(n)\}) - m(\{\sigma_j(i+1), \ldots, \sigma_j(n)\}))\end{aligned}$$

para todo $j \in \{1, \ldots, p\}$.

Ejemplo 6: Consideremos los siguientes intervalos que deber ser agregados mediante la integral de Choquet: $\mathbf{x}_1 = [0.1, 0.9]$, $\mathbf{x}_2 = [0.3, 0.5]$ y $\mathbf{x}_3 = [0.4, 0.8]$. Sea m una medida difusa dada por $m(\{\emptyset\}) = 0$, $m(\{1\}) = 0.3$, $m(\{2\}) = 0.5$, $m(\{3\}) = 0.4$, $m(\{1,2\}) = m(\{1,3\}) = 0.6$ y $m(\{2,3\}) = 0.8$.

Vamos a calcular la integral de Choquet respecto a todas las permutaciones admisibles. Obsérvese que $\mathbf{x}_1$ no es comparable a $\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ y que $\mathbf{x}_2 <_L \mathbf{x}_3$. Por tanto, existen 3 permutaciones admisibles, representadas en la siguiente matriz donde el elemento (i,j) representa $\sigma_i(j)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora, tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_m^{\sigma_1}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) &= [0.3, 0.7] \\ \mathbf{C}_m^{\sigma_2}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) &= [0.3, 0.7] \\ \mathbf{C}_m^{\sigma_3}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) &= [0.27, 0.71].\end{aligned}$$

Por último, calculamos la media aritmética de todos los valores por cada permutación admisible y tenemos que

$$\mathbf{C}_m^{arith}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = [0.29, 0.703].$$

Para completar el estudio, vamos a analizar algunas de las propiedades más importantes de esta nueva integral de Choquet basada en permutaciones admisibles.

Proposición 3: Son ciertas las siguientes afirmaciones: :

(i) $\mathbf{C}_m^{arith}(\mathbf{x}, \ldots, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x} \in L([0,1])$;

(ii) $\inf\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\} \leq_L \mathbf{C}_m^{arith}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) \leq_L \sup\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ para todo $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in L([0,1])$;

(iii) $\mathbf{C}_m^{arith}([x_1, x_1], \ldots, [x_n, x_n]) = [C_m(x_1, \ldots, x_n), C_m(x_1, \ldots, x_n)]$ para todo $x_1, \ldots, x_n \in L([0,1])$;

(iv) si $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ forman una anticadena, entonces para cualquier medida difusa m, $\mathbf{C}_m^{arith}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) = \mathbf{M}_{arith}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$;

(v) si $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ forman una cadena, entonces $\mathbf{C}_m^{arith}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) = \mathbf{C}_m(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$.

En [7], [16], el concepto de monotonía ha sido sustituido por los conceptos más generales de monotonía débil y monotonía direccional. Utilizando estas generalizaciones de monotonía, el concepto de preagregación ha sido dado en [13]. Aunque la nueva definición de integral de Choquet que hemos definido en este trabajo no satisface la propiedad de monotonía tradicional, sí que satisface un tipo de monotonía direccional.

Proposición 4: La integral de Choquet basada en permutaciones admisibles es una preagregación respecto al vector $\vec{r} = \vec{1}$.

V. Conclusiones

En este trabajo hemos propuesto un nuevo mecanismo de fusión de intervalos basado en la integral de Choquet y en el concepto de permutación admisible. Esta nueva definición permite solucionar algunos problemas encontrados en soluciones anteriores, como la integral de Choquet basada en órdenes admisibles.

Como líneas futuras, nuestra intención es continuar estudiando las propiedades que cumple nuestra nueva definición y su relación con otro tipo de agregaciones intervalo-valoradas. Además, pretendemos extender esta definición a otros retículos y a otro tipo de funciones de agregación, como son los operadores OWA o la integral de Sugeno.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por MINECO, AEI/FEDER,UE bajo el proyecto TIN2016-77356-P y por los proyectos APVV-14-0013 y APVV-17-0066.

References

[1] K. Atanassov. Intuitionistic fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems 20 (1986) 87-96.

[2] G. Beliakov, H. Bustince, T. Calvo. A Practival guide to Averaging Functions. Studies in Fuzziness and Soft Computing 329, Springer, 2016.

[3] G. Beliakov, A. Pradera, T. Calvo. Aggregation Functions: A Guide for Practitioners. Studies in Fuzziness and Soft Computing 221, Springer, 2007.

[4] H. Bustince, Interval-valued fuzzy sets in soft computing. International Journal of Computational Intelligent Systems 3 (2010) 215-222.

[5] H. Bustince, J. Fernandez, A. Kolesárová, R. Mesiar, Generation of linear orders for intervals by means of aggregation functions. Fuzzy Sets and Systems 220 (2013) 69-77.

[6] H. Bustince, M. Galar, B. Bedregal, A. Kolesárová, R. Mesiar, A New Approach to Interval-Valued Choquet Integrals and the Problem of Ordering in Interval-Valued Fuzzy Set Applications. IEEE Transactions on Fuzzy Systems 21 (2013), 1150-1162.

[7] H. Bustince, J. Fernandez, A. Kolesárová, R. Mesiar. Directional monotonicity of fusion functions. European Journal of Operational Research 244 (2015) 300-308.

[8] H. Bustince, E. Barrenechea, M. Pagola, J. Fernandez, Z. Xu, B. Bedregal, J. Montero, H. hagras, F. Herrera, B. De Baets. A Historical Account of Types of Fuzzy Sets and Their Relationships. IEEE Transactions on Fuzzy Systems 24 (2016) 179-194.

[9] G. Choquet, Theory of capacities. Annales de l'Institute Fourier 5 (1954) 131-292.

[10] G. Deschrijver, C. Cornelus, E.E. Kerre. On the representation of intuitionistic fuzzy t-norms and t-conorms. IEEE Transactions on Fuzzy Systems 12 (2004) 45-61.

[11] M. Grabisch, J.-L. Marichal, R. Mesiar, E. Pap, Aggregation Functions. Cambridge University Press, 2009.

[12] M. Komorníková, R. Mesiar. Aggregation functions on bounded partially ordered sets and their classification. Fuzzy Sets and Systems 175 (2011) 48-56.

[13] G. Lucca, J. Sanz, G. P. Dimuro, B. Bedregal, R. Mesiar, A. Kolesárová, H. Bustince. Preaggregation Functions: Construction and an Application. IEEE Transactions on Fuzzy Systems 24 (2016) 260-272.

[14] D. Paternain, H. Bustince, M. Pagola, P. Sussner, A. Kolesárová and R. Mesiar. Capacities and overlap indexes with an application in fuzzy rule-based classification systems. Fuzzy Sets and Systems 305 (2016) 70-94.

[15] V. Torra, Y. Narukawa and M. Sugeno, Eds., Non-Additive Measures, Theory and Applications (Studies in Fuzziness and Soft Computing Series 310), Springer, 2014.

[16] T. Wilkin, G. Beliakov. Weakly Monotonic Averaging Functions. International Journal of Intelligent Systems 30 (2015) 144-169.

[17] Z. S. Xu, R. R. Yager, Some geometric aggregation operators based on intuitionistic fuzzy sets. International Journal of General Systems 35 (2006) 417-433.