Una nueva aproximación al concepto de similitud intervalar teniendo en cuenta la longitud de los intervalos

Humberto Bustince, Javier Fernandez, Laura de Miguel, Jose Antonio Sanz, Mikel Sesma-Sara
Depto. de Estadistica, Informática y Matemáticas
Universidad Pública de Navarra
Pamplona, Spain
{bustince, fcojavier.fernandez,laura.demiguel, joseantonio.sanz, mikel.sesma}@unavarra.es

***Abstract*—En este trabajo proponemos una definición de función de equivalencia restringida intervalo-valorada que determina el grado de similitud de dos intervalos teniendo en cuenta su amplitud y utilizando órdenes admisibles. Utilizamos estas funciones para definir medidas de similitud intervalo-valoradas y discutimos algunas posibles aplicaciones.**

***Index Terms*—Función de equivalencia restringida intervalo-valorada, Función de similitud intervalo-valorada, Orden admisible, Medida de similitud**

I. Introducción

Los conjuntos intervalo-valorados (IVFSs) son cada vez más utilizados debido a su excelente rendimiento en múltiples aplicaciones [1]–[3], [10]. Dado que muchas de estas aplicaciones, en su versión difusa, hacen uso del concepto de medida de similitud [4], [12], las medidas de similitud intervalo-valoradas están atrayendo también un gran interés [11].

El objetivo de este trabajo es construir medidas de similitud intervalo-valoradas que, por una parte, utilicen órdenes totales (y no solo parciales) a la hora de comparar los intervalos involucrados y que, además, tengan en cuenta la amplitud de los intervalos, interpretada como una medida del grado de incertidumbre asociado a los datos. Para lograr este objetivo, consideramos nuevas definiciones de funciones de agregación y funciones de equivalencia restringida intervalo-valoradas que tienen en cuenta tanto órdenes totales como la amplitud de los intervalos.

La estructura del trabajo es la siguiente. En la Sección II presentamos algunos resultados y definiciones preli-minares. En la Sección III presentamos la definición de función de equivalencia restringida intervalo-valorada y en la Sección IV, discutimos la construcción de funciones de agregación intervalo-valoradas que preservan la amplitud. La Sección V se centra en el nuevo concepto de medida de similitud intervalo-valorada basada en la amplitud. Terminamos con algunas conclusiones y referencias.

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el proyecto de investigación TIN2016-77356-P del Gobierno de España.

II. Preliminares

Vamos a trabajar con subintervalos cerrados del intervalo unidad. Por ello, definimos el siguiente conjunto:

$$L([0,1]) = \{[\underline{X}, \overline{X}] \mid 0 \leq \underline{X} \leq \overline{X} \leq 1\} .$$

La amplitud de un intervalo $X \in L([0,1])$ se denota por $w(X)$. Una función intervalar $f : (L([0,1]))^n \to L([0,1])$ se dice que preserva la amplitud si para todo $X_1, \ldots, X_n \in L([0,1])$ tales que $w(X_1) = \ldots = w(X_n)$, se tiene que $w(f(X_1, \ldots, X_n)) = w(X_i)$ para cualquier $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Denotamos por $\leq_L$ una relación de orden arbitraria en $L([0,1])$ con $0_L = [0,0]$ como elemento mínimo y $1_L = [1,1]$ como elemento máximo. Esta relación de orden puede ser total o parcial. Si queremos hablar especficamente de un orden total, lo denotaremos por $\leq_{TL}$.

Ejemplo 1: Ejemplos de relaciones de orden en $L([0,1])$.

a) La relación de orden parcial en $L([0,1])$ inducida por el orden (parcial) usual en $\mathbb{R}^2$ es:
$$[\underline{X}, \overline{X}] \precsim_L [\underline{Y}, \overline{Y}] \text{ si } \underline{X} \leq \underline{Y} \text{ y } \overline{X} \leq \overline{Y}. \quad (1)$$

b) Como ejemplo de orden total en $L([0,1])$ tenemos el de Xu y Yager (véase [14]):
$$[\underline{X}, \overline{X}] \leq_{XY} [\underline{Y}, \overline{Y}] \text{ si } \begin{cases} \underline{X} + \overline{X} < \underline{Y} + \overline{Y} \text{ o} \\ \underline{X} + \overline{X} = \underline{Y} + \overline{Y} \text{ y} \\ \overline{X} - \underline{X} \leq \overline{Y} - \underline{Y}. \end{cases} \quad (2)$$

Definición 1: Un orden admisible en $L([0,1])$ es un orden lineal $\leq_{TL}$ que extiende el orden parcial $\precsim_L$.

En este trabajo, cuando hablamos de un orden lineal entre intervalos, asumimos que es admisible. El siguiente resultado proporciona un método de construcción de órdenes admisibles.

Proposición 1: ([9]) Sean $M_1, M_2 : [0,1]^2 \to [0,1]$ dos funciones de agregación (es decir, funciones crecientes tales que, si todas las entradas son cero, el resultado es cero y, si todas las entradas son uno, el resultado es uno) tales que, para cualesquiera $X, Y \in L([0,1])$, las identidades $M_1(\underline{X}, \overline{X}) = M_1(\underline{Y}, \overline{Y})$ y $M_2(\underline{X}, \overline{X}) = M_2(\underline{Y}, \overline{Y})$ se satisfacen simuláneamente si y solo si $X = Y$. Entonces, el orden $\leq_{M_1,M_2}$ en $L([0,1])$ dado por

$$X \leq_{M_1,M_2} Y \qquad \text{si} \quad \begin{cases} M_1(\underline{X},\overline{X}) < M_1(\underline{Y},\overline{Y}) \text{ o} \\ M_1(\underline{X},\overline{X}) = M_1(\underline{Y},\overline{Y}) \text{ y} \\ M_2(\underline{X},\overline{X}) \leq M_2(\underline{Y},\overline{Y}) \end{cases}$$

es un orden admisible en $L([0,1])$.

Ejemplo 2:

(i) El orden de Xu y Yager es un ejemplo de orden admisible con $M_1(x,y) = \frac{x+y}{2}$ y $M_2(x,y) = y$.

(ii) Los órdenes lexicográficos $\leq_{lex1}$ ($\leq_{lex2}$) también son ejemplos de órdenes admisibles con $M_1(x,y) = x$ ($M_1(x,y) = y$) y $M_2(x,y) = y$ ($M_2(x,y) = x$).

(iii) En general, si, para $\alpha \in [0,1]$ definimos la función de agregación

$$K_\alpha(x,y) = (1-\alpha)x + \alpha y$$

entonces, para $\alpha, \beta \in [0,1]$ con $\alpha \neq \beta$, podemos obtener el orden admisible $\leq_{\alpha,\beta}$ tomando $M_1(x,y) = K_\alpha(x,y)$ y $M_2(x,y) = K_\beta(x,y)$. Véase [9] para más detalles.

Recordemos también la definición de función de equivalencia restringida (REF) [7]

Definición 2: Una función $R : [0,1]^2 \to [0,1]$ es una función de equivalencia restringida (REF) si:

1) $R(x,y) = 0$ si y solo si $\{x,y\} = \{0,1\}$;
2) $R(x,y) = 1$ si y solo si $x = y$;
3) $R(x,y) = R(y,x)$ para todo $x,y \in [0,1]$;
4) Si $x \leq y \leq z$, entonces $R(x,z) \leq R(x,y)$ y $R(x,z) \leq R(y,z)$ para todo $x,y,z \in [0,1]$.

III. Funciones de equivalencia restringida intervalo-valoradas que preservan la amplitud

En esta sección proponemos una nueva definición de REF para datos intervalo-valorados que tiene en cuenta la amplitud de los mismos.

Definición 3: Sea $\leq_L$ un orden en $L([0,1])$. Una función de equivalencia restringida intervalo-valorada (IV REF) con respecto al orden $\leq_L$ es una función $R_{IV} : L([0,1])^2 \to L([0,1])$ tal que:

1) $R_{IV}(X,Y) = 0_L$ si y solo si $\{X,Y\} = \{0_L, 1_L\}$;
2) $R_{IV}(X,X) = [1 - w(X), 1]$ para todo $X \in L([0,1])$;
3) $R_{IV}(X,Y) = R_{IV}(Y,X)$ para todo $X,Y \in L([0,1])$;
4) Si $X,Y,Z \in L([0,1])$ son tales que $X \leq_L Y \leq_L Z$ y $w(X) = w(Y) = w(Z)$, entonces $R_{IV}(X,Z) \leq_L R_{IV}(X,Y)$ y $R_{IV}(X,Z) \leq_L R_{IV}(Y,Z)$.

La principal diferencia de esta definición respecto a su contrapartida difusa radica en el axioma 2. Dado que consideramos que la amplitud del intervalo de pertenencia de un elemento es una medida de la incertidumbre asociada al valor preciso de pertenencia, y que dicho valor preciso es un número dentro del intervalo de pertenencia, de esta forma se evita que el resultado sea menos impreciso que los datos considerados.

Ejemplo 3:

La función $R_{IV} : L([0,1])^2 \to L([0,1])$ dada por:

$$\begin{aligned} R_{IV}(X,Y) &= \Big[\max\big(0, 1 - |K_\alpha(X) - K_\alpha(Y)| \\ &- \frac{1}{2}(w(X) + w(Y))\big), \\ &\max\big(1 - |K_\alpha(X) - K_\alpha(Y)|, \\ &\frac{1}{2}(w(X) + w(Y))\big)\Big] \end{aligned}$$

es, para todo $\alpha \in]0,1]$, un ejemplo de IV REF con respecto a cualquier orden admisible.

A continuación discutimos un método de construcción de estas funciones. Para ello, necesitamos el siguiente lema previo.

Lema 1: Sean $X,Y \in L([0,1])$ intervalos tales que $w(X) = w(Y)$. Entonces

$$X \precsim_L Y \qquad \Leftrightarrow \qquad X \leq_{TL} Y$$

para cualquier orden admisible $\leq_{TL}$.

Prueba. La demostración se sigue al tener en cuenta que dos intervalos cualesquiera de la misma amplitud son siempre comparables por medio del orden parcial $\precsim_L$. Dado que todo orden admisible refina este orden parcial, se tiene el resultado. ■

Teorema 1: Sea $\alpha \in]0,1[$, $M : [0,1]^2 \to [0,1]$ una función de agregación simétrica e idempotente y $R : [0,1]^2 \to [0,1]$ una REF. Entonces, la función $R_{IV} : L([0,1])^2 \to L([0,1])$ dada por

$$\begin{aligned} R_{IV}(X,Y) = \Big[&\max\big(0, R\left(K_\alpha(X)\right., \\ &\left.K_\alpha(Y)\right) - M(w(X), w(Y))\big), \\ &\max\big(R\left(K_\alpha(X), K_\alpha(Y)\right), M(w(X), w(Y))\big)\Big] \end{aligned} \tag{3}$$

es una IV REF con respecto a cualquier orden admisible $\leq_{TL}$ que preserva la amplitud

Prueba. Por comodidad, escribimos $\mathcal{R}$ por $R\left(K_\alpha(X), K_\alpha(Y)\right)$, y $\mathcal{M}$ por $M(w(X), w(Y))$. Entonces, la ecuación (3) se simplifica como:

$$\begin{aligned} R_{IV}(X,Y) &= \big[\max\big(0, \mathcal{R} - \mathcal{M}\big), \max\big(\mathcal{R}, \mathcal{M}\big)\big] \qquad (4) \\ &= \begin{cases} [\mathcal{R} - \mathcal{M}, \mathcal{R}], & \text{si } \mathcal{R} \geq \mathcal{M}, \\ [0, \mathcal{M}], & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

De (4), R_{IV} está bien definido. Además, $R_{IV}(X,Y) = 0_L$ si y solo si $\mathcal{R} = 0$ y $\mathcal{M} = 0$. Pero esto ocurre si y solo si $\{K_\alpha(X), K_\alpha(Y)\} = \{0,1\}$, lo que sucede si y solo si $\{X,Y\} = \{0_L, 1_L\}$. Luego $w(X) = w(Y) = 0$ y tenemos la primera condición de la Definición 3.

La segunda condición de la Definición 3 se sigue al observar que $R\left(K_\alpha(X), K_\alpha(X)\right) = 1$ y $M(w(X), w(X)) = w(X)$.

La simetría de R_{IV} es una consecuencia inmediata de la simetría de R y M.

La monotonía con respecto a cualquier orden admisible es clara a partir de la monotonía de R, el lema 1 y el hecho de que, si $X \leq_{TL} Y \leq_{TL} Z$ y $w(X) = w(Y) = w(Z)$, entonces $K_\alpha(X) \leq K_\alpha(Y) \leq K_\alpha(Z)$.

Finalmente, la preservación de la amplitud R_{IV} se sigue de la Ecuación (4) y de la idempotencia de M ■

Podemos utilizar cualquier REF R y cualquier función de agregación idempotente y simétrica M en la Ecuación (3) para construir funciones de equivalencia restringida intervalo-valoradas que preserven la amplitud. De hecho, es posible simplificar la Ecuación (3) imponiendo restricciones adicionales sobre R y M.

Corolario 1: Sean $\alpha \in]0,1[$ y $M : [0,1]^2 \to [0,1]$ una función de agregación simétrica idempotente tal que

$$M(x,y) \leq \min\big((1-\alpha)x + \alpha y, \alpha x + (1-\alpha)y\big)$$

para cualesquiera $x, y \in [0,1]$. Sea $R : [0,1]^2 \to [0,1]$ una función de equivalencia restringida tal que

$$R(x,y) \geq 1 - |x-y|$$

para todo $x, y \in [0,1]$. Entonces, la función $R_{IV} : L([0,1])^2 \to L([0,1])$ dada por

$$\begin{aligned} R_{IV}(X,Y) = \big[&R\left(K_\alpha(X), K_\alpha(Y)\right) \\ - \quad & M(w(X), w(Y)), R\left(K_\alpha(X), K_\alpha(Y)\right)\big] \end{aligned} \tag{5}$$

es una función de equivalencia restringida intervalo-valorada con respecto a cualquier orden admisible $\leq_{TL}$ y que preserva la amplitud.

Prueba Es necesario ver que

$$R\left(K_\alpha(X), K_\alpha(Y)\right) \geq M(w(X), w(Y))$$

para todo $X, Y \in L([0,1])$, ya que, de este modo, la Ecuación (5) es un caso especial de la Ecuación (3).

Por nuestras hipótesis sobre M y R, es suficiente mostrar que

$$\begin{aligned} & 1 - |K_\alpha(X) - K_\alpha(Y)| \\ \geq \quad & \min\big((1-\alpha)w(X) + \alpha w(Y), \alpha w(X) + (1-\alpha)w(Y)\big). \end{aligned} \tag{6}$$

Supongamos que $K_\alpha(X) \geq K_\alpha(Y)$. Entonces

$$\begin{aligned} & 1 - |K_\alpha(X) - K_\alpha(Y)| \\ = \quad & 1 - (1-\alpha)\underline{X} - \alpha\overline{X} + (1-\alpha)\underline{Y} + \alpha\overline{Y} \end{aligned}$$

y como

$$\begin{aligned} & 1 \geq \overline{X} - \underline{Y} \\ = \quad & (1-\alpha)(\overline{X} - \underline{Y}) + \alpha(\overline{X} - \underline{Y}) \\ = \quad & (1-\alpha)(\overline{X} - \underline{X} + \underline{X} - \underline{Y}) \\ + \quad & \alpha(\overline{X} - \overline{Y} + \overline{Y} - \underline{Y}), \end{aligned}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} 1 \quad & -(1-\alpha)\underline{X} - \alpha\overline{X} + (1-\alpha)\underline{Y} + \alpha\overline{Y} \\ \geq \quad & (1-\alpha)(\overline{X} - \underline{X}) + \alpha(\overline{Y} - \underline{Y}), \end{aligned}$$

luego (6) se satisface.

Supongamos ahora que $K_\alpha(X) < K_\alpha(Y)$. Tenemos que

$$\begin{aligned} & 1 - |K_\alpha(X) - K_\alpha(Y)| \\ = \quad & 1 + (1-\alpha)\underline{X} + \alpha\overline{X} - (1-\alpha)\underline{Y} - \alpha\overline{Y} \end{aligned}$$

y como

$$\begin{aligned} & 1 \geq \overline{Y} - \underline{X} \\ = \quad & (1-\alpha)(\overline{Y} - \underline{X}) + \alpha(\overline{Y} - \underline{X}) \\ = \quad & (1-\alpha)(\overline{Y} - \underline{Y} + \underline{Y} - \underline{X}) \\ + \quad & \alpha(\overline{Y} - \overline{X} + \overline{X} - \underline{X}), \end{aligned}$$

vemos que

$$\begin{aligned} & 1 + (1-\alpha)\underline{X} + \alpha\overline{X} - (1-\alpha)\underline{Y} - \alpha\overline{Y} \\ \geq \quad & (1-\alpha)(\overline{Y} - \underline{Y}) + \alpha(\overline{X} - \underline{X}), \end{aligned}$$

de donde se cumple (6) y tenemos el resultado. ■.

Corolario 2: Consideremos la función de equivalencia restringida intervalo-valorada R_{IV} propuesta en el Corolario 1. Entonces, para todo $X, Y \in L([0,1])$ se tiene que

$$\begin{aligned} & \min(w(X), w(Y)) \leq w(R_{IV}(X,Y)) = M(w(X), w(Y)) \\ \leq \quad & \min\big((1-\alpha)w(X) + \alpha w(Y), \alpha w(X) + (1-\alpha)w(Y)\big). \end{aligned}$$

Prueba. La primera desigualdad se verifica porque toda función de agregación idempotente es siempre mayor o igual que el mínimo. En cuanto a la segunda desigualdad, es una consecuencia de las hipótesis sobre M asumidas en el Corolario 1. ■

El siguiente resultado es directo.

Lema 2: Si $M_1, M_2 : [0,1]^2 \to [0,1]$ son funciones de agregación simétricas idempotentes, entonces la función $M : [0,1]^2 \to [0,1]$ dada por

$$M(x,y) = \min(M_1(x,y), M_2(x,y)),$$

para todo $x, y \in [0,1]$, es una función de agregación simétrica idempotente.

Ejemplo 4: Vamos a construir un ejemplo específico de función de equivalencia restringida intervalo-valorada construida de acuerdo con el Corolario 1. Sea $R^p(x,y) = 1 - |x-y|^p$, con $p > 0$, que es una REF. Es claro que $R^p(x,y) \geq R^1 = 1 - |x-y|$ para todo $x, y \in [0,1]$ si y solo si $p \in [1, \infty[$.

(i) Si tomamos $\alpha = 1/2$ y $M(x,y) = \frac{x+y}{2}$ obtenemos una clase de funciones de equivalencia restringida intervalo valoradas prespecto a cualquier orden admisible:

$$\begin{aligned} R^p_{IV}(X,Y) = & \left[R^p\left(\frac{\underline{X} + \overline{X}}{2}, .\frac{\underline{Y} + \overline{Y}}{2}\right)\right. \\ - \quad & \left.\frac{w(X) + w(Y)}{2}, R^p\left(\frac{\underline{X} + \overline{X}}{2}, \frac{\underline{Y} + \overline{Y}}{2}\right)\right] \end{aligned}$$

para cualquier $p \in [1, \infty[$.

(ii) Si tomamos $M(x,y) = \min(x,y)$, obtenemos:

$$\begin{aligned} & R^{p,\alpha}_{IV}(X,Y) = [R^p\left(K_\alpha(X), K_\alpha(Y)\right) - \min(w(X), w(Y)), \\ & R^p\left(K_\alpha(X), K_\alpha(Y)\right)] \end{aligned}$$

para $p \in [1, \infty[$ y $\alpha \in]0,1[$.

(iii) Sea $\alpha \in [0,1]$. Es fácil observar que

$$\begin{aligned} & \min\big((1-\beta)x + \beta y, \beta x + (1-\beta)y\big) \\ \leq \quad & \min\big((1-\alpha)x + \alpha y, \alpha x + (1-\alpha)y\big) \end{aligned}$$

para todo $\beta \in [0,1]$ tal que

$$\max(\beta, 1-\beta) \geq \max(\alpha, 1-\alpha) .$$

Por tanto, obtenemos una clase más general que la del ítem (ii) si tomamos $\alpha \in]0,1[$ y

$$M(x,y) = \min\big((1-\beta)x + \beta y, \beta x + (1-\beta)y\big)$$

para $\beta \in [\max(\alpha, 1-\alpha), 1]$ (o equivalentemente para $\beta \in [0, \min(\alpha, 1-\alpha)]$):

$$\begin{aligned} & R_{IV}^{p,\alpha,\beta}(X,Y) \\ = \ & \big[R^p\left(K_\alpha(X), K_\alpha(Y)\right) - \min\big((1-\beta)w(X) + \beta w(Y), \\ & \beta w(X) + (1-\beta)w(Y)\big), R^p\left(K_\alpha(X), K_\alpha(Y)\right)\big]. \end{aligned}$$

En particular, para $\beta = 1$ (o equivalentemente para $\beta = 0$) obtenemos la clase descrita en el ítem (ii).

IV. Funciones de agregación intervalo-valoradas que preservan la amplitud

De cara a posibles aplicaciones, introducimos en esta sección un análisis de la posible definición de funciones de agregaciónj intervalo-valoradas que también tengan en cuenta la amplitud de los datos a agregar. Recordamos primero la definición de función de agregación intervalo-valorada con respecto a un orden admisible arbitrario.

Definición 4: Sea $n \geq 2$. Una función de agregación intervalo-valorada (n-dimensional) en $L([0,1])$ con respecto a un orden $\leq_L$ es una aplicación $M_{IV} : (L([0,1]))^n \to L([0,1])$ tal que:

(i) $M_{IV}(0_L, \cdots, 0_L) = 0_L$.
(ii) $M_{IV}(1_L, \cdots, 1_L) = 1_L$.
(iii) M_{IV} es no decreciente respecto a $\leq_L$.

A continuación proponemos un método de construcción de funciones de agregación intervalo-valoradas que preservan la amplitud de los intervalos a agregar.

Para ello, dada una función de agregación $M : [0,1]^n \to [0,1]$, consideramos las dos propiedades siguientes:

(P1) $M(cx_1, \ldots, cx_n) \geq cM(x_1, \ldots, x_n)$ para todo $c \in [0,1]$, $x_1, \ldots, x_n \in [0,1]$.
(P2) $M(x_1, \ldots, x_n) \leq 1 - M(1-x_1, \ldots, 1-x_n)$ para todo $x_1, \ldots, x_n \in [0,1]$.

Teorema 2: Sean $\alpha, \beta \in [0,1]$ con $\beta \neq \alpha$. Sean $M_1, M_2 : [0,1]^n \to [0,1]$ dos funciones de agregación tales que M_1 es estrictamente creciente, $M_1(x_1, \ldots, x_n) \geq M_2(x_1, \ldots, x_n)$ para todo $x_1, \ldots, x_n \in [0,1]$, M_1 o M_2 satisfacen la propiedad (P1) y M_1 o M_2 satisfacen la propiedad (P2). Entonces, $M_{IV} : (L([0,1]))^n \to L([0,1])$ dada por:

$$M_{IV}(X_1, \ldots, X_n) = Y, \quad \text{donde}$$

$$\begin{cases} K_\alpha(Y) = M_1\left(K_\alpha(X_1), \ldots, K_\alpha(X_n)\right), \\ w(Y) = M_2\left(w(X_1), \ldots, w(X_n)\right), \end{cases}$$

para todo $X_1, \ldots, X_n \in L([0,1])$, es una función de agregación intervalo-valorada con respecto a $\leq_{\alpha,\beta}$.

Además, si M_2 es idempotente, entonces M_{IV} preserva la amplitud.

Prueba.

Primero veamos que M_{IV} está bien definida. Tenemos

$$Y = \left[\underline{Y}, \overline{Y}\right] = \left[K_\alpha(Y) - \alpha w(Y), K_\alpha(Y) + (1-\alpha)w(Y)\right].$$

Como $\underline{Y} \leq \overline{Y}$, solo debemos probar que

1) $\underline{Y} \geq 0$: Para $\alpha = 0$ tenemos que $\underline{Y} = M_1(\underline{X_1}, \ldots, \underline{X_n}) \geq 0$ y para $\alpha \in]0,1]$ tenemos que

$$\begin{aligned} K_\alpha(Y) &= M_1\left(K_\alpha(X_1), \ldots, K_\alpha(X_n)\right) \\ &\geq \alpha M_2\left(\frac{K_\alpha(X_1)}{\alpha}, \ldots, \frac{K_\alpha(X_n)}{\alpha}\right) \\ &\geq \alpha M_2\left(w(X_1), \ldots, w(X_n)\right) = \alpha w(Y) \end{aligned}$$

donde la primera desigualdad se sigue de que M_2 satisface la propiedad (P1) y la segunda, de que $K_\alpha(X) = (1-\alpha)\underline{X} + \alpha\overline{X} \geq \alpha(\overline{X} - \underline{X}) = \alpha w(X)$ for all $X \in L([0,1])$.

2) $\overline{Y} \leq 1$: Para $\alpha = 1$ tenemos que $\overline{Y} = M_1(\overline{X_1}, \ldots, \overline{X_n}) \leq 1$ y para $\alpha \in [0,1[$ vemos que

$$\begin{aligned} & K_\alpha(Y) + (1-\alpha)w(Y) \\ = \ & M_1\left(K_\alpha(X_1), \ldots, K_\alpha(X_n)\right) \\ + \ & (1-\alpha)M_2\left(w(X_1), \ldots, w(X_n)\right) \\ \leq \ & M_1\left(K_\alpha(X_1), \ldots, K_\alpha(X_n)\right) \\ + \ & (1-\alpha)M_2\left(\frac{1-K_\alpha(X_1)}{1-\alpha}, \ldots, \frac{1-K_\alpha(X_n)}{1-\alpha}\right) \\ \leq \ & M_1\left(K_\alpha(X_1), \ldots, K_\alpha(X_n)\right) \\ + \ & M_2\left(1-K_\alpha(X_1), \ldots, 1-K_\alpha(X_n)\right) \\ \leq \ & M_1\left(K_\alpha(X_1), \ldots, K_\alpha(X_n)\right) \\ + \ & 1 - M_2\left(K_\alpha(X_1), \ldots, K_\alpha(X_n)\right) = 1 \end{aligned}$$

donde la primera desigualdad se sigue de que $1 - K_\alpha(X) = 1 - (1-\alpha)\underline{X} - \alpha\overline{X} \geq (1-\alpha)(\overline{X} - \underline{X}) = (1-\alpha)w(X)$ for all $X \in L([0,1])$, y la segunda y la tercera, de las hipótesis del Teorema.

Veamos ahora que M_{IV} es una función de agregación intervalo-valorada.

(i) $M_{IV}(0_L, \cdots, 0_L) = Y$ donde $K_\alpha(Y) = M_1(0, \ldots, 0) = 0$ y $w(Y) = M_2(0, \ldots, 0) = 0$, luego $Y = 0_L$.

(ii) $M_{IV}(1_L, \cdots, 1_L) = Y$ donde $K_\alpha(Y) = M_1(1, \ldots, 1) = 1$ y $w(Y) = M_2(0, \ldots, 0) = 0$, luego $Y = 1_L$.

(iii) Sea $X_i \leq_{\alpha,\beta} Y_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Entonces $K_\alpha(X_i) \leq K_\alpha(Y_i)$ para todo $i = 1, \ldots, n$ y hay dos posibilidades:

1) Existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $K_\alpha(X_j) < K_\alpha(Y_j)$. Entonces

$$M_1(K_\alpha(X_1), \ldots, K_\alpha(X_n)) < M_1(K_\alpha(Y_1), \ldots, K_\alpha(Y_n)),$$

ya que M_1 es estrictamente creciente, luego $M_{IV}(X_1, \ldots, X_n) <_{\alpha,\beta} M_{IV}(Y_1, \ldots, Y_n)$.

2) $K_\alpha(X_i) = K_\alpha(Y_i)$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Si $\beta > \alpha$, entonces $w(X_i) \leq w(Y_i)$ para todo $i = 1, \ldots, n$, de donde $M_2(w(X_1), \ldots, w(X_n)) \leq$

$M_2(w(Y_1), \ldots, w(Y_n))$, y por tanto $M_{IV}(X_1, \ldots, X_n) \leq_{\alpha,\beta} M_{IV}(Y_1, \ldots, Y_n)$. Si $\beta < \alpha$, entonces $w(X_i) \geq w(Y_i)$ para todo $i = 1, \ldots, n$, luego $M_2(w(X_1), \ldots, w(X_n)) \geq M_2(w(Y_1), \ldots, w(Y_n))$, y $M_{IV}(X_1, \ldots, X_n) \leq_{\alpha,\beta} M_{IV}(Y_1, \ldots, Y_n)$.

Finalmente, la conservación de la amplitud se sigue fácilmente de la idempotencia de M_2. ■

Ejemplo 5: Una función $M_{IV} : (L([0,1]))^n \to L([0,1])$ definida como en el Teorema 2, es una función de agregación intervalo-valorada que preserva la amplitud (con respecto a $\leq_{\alpha,\beta}$), si, por ejemplo:

1) (i) $M_1(x_1, \ldots, x_n) = M_2(x_1, \ldots, x_n) = \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$ para todo $x_1, \ldots, x_n \in [0,1]$, o
2) (ii) $M_1(x_1, \ldots, x_n) = \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$, $M_2(x_1, \ldots, x_n) = \min\{x_1, \ldots, x_n\}$ para todo $x_1, \ldots, x_n \in [0,1]$.

V. Medidas de similitud intervalo-valoradas que preservan la amplitud

A continuación proponemos una nueva definición de medida de similitud intervalo-valorada que tiene en cuenta la amplitud de los intervalos.

Definición 5: Sea $\leq_L$ un orden en $L([0,1])$ y $M : [0,1]^n \to [0,1]$ una función de agregación. Una medida de similitud intervalo-valorada asociada a M basada en la amplitud los conjuntos intervalo-valorados definidos en un referencia finito U, $IVFS(U)$, y con respecto al orden $\leq_L$ es una función $S_M : IVFS(U) \times IVFS(U) \to L([0,1])$ tal que, para todo $A, B, A', B' \in IVFS(U)$,

[(SM1)] $S_M(A,B) = S(B,A)$;

[(SM2)]

$$S_M(A,A) = \Big[1 - M\big(w(A(u_1)), \ldots, w(A(u_n))\big), 1\Big] ;$$

[(SM3)] $S_M(A,B) = 0_L$ si y solo si $\{A(u_i), B(u_i)\} = \{0_L, 1_L\}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$;

[(SM4)] Si $A \subseteq A' \subseteq B' \subseteq B$ w.r.t. $\leq_L$ y $w(A(u_i)) = w(A'(u_i)) = w(B'(u_i)) = w(B(u_i))$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, entonces $S_M(A,B) \leq_L S_M(A', B')$.

Preentamos ahora un método de construcción de estas similitudes. Recordemos que una función de agregación $M : [0,1]^n \to [0,1]$ es auto-dual con respecto a la negación estándar si

$$M(x_1, \ldots, x_n) = 1 - M(1 - x_1, \ldots, 1 - x_n)$$

si $x_1, \ldots, x_n \in [0,1]$.

Teorema 3:

Sea $M_{IV} : (L([0,1]))^n \to L([0,1])$ una función de agregación intervalo-valorada (respecto a un orden $\leq_L$) tal que $M_{IV}(X_1, \ldots, X_n) = [M_L(\underline{X_1}, \ldots, \underline{X_n}), M_U(\overline{X_1}, \overline{X_n}]$ con M_L, M_U funciones de agregación y M_L auto-dual, y sea $M_{IV}(X_1, \ldots, X_n) = 0_L$ si y solo si $X_1 = \ldots = X_n = 0_L$. Sea $R_{IV} : L([0,1])^2 \to L([0,1])$ una IV REF con respecto al orden $\leq_L$. Entonces, la función $S_{M_L} : IVFS(U) \times IVFS(U) \to L([0,1])$ dada por:

$$S_{M_L}(A,B) = M_{IV}\big(R_{IV}\left(A(u_1), B(u_1)\right), \ldots, R_{IV}\left(A(u_n), B(u_n)\right)\big)$$

para todo $A, B \in IVFS(U)$ es una medida de similitud intervalo-valorada asociada a M basada en la amplitud sobre $IVFS(U)$ con respecto al orden $\leq_L$.

Prueba. (SM2) Tenemos

$$\begin{aligned} S_{M_L}(A,A) &= M_{IV}\big([1 - w(A(u_1)), 1], \ldots, [1 - w(A(u_n)), 1]\big) \\ &= \Big[M_L\big(1 - w(A(u_1)), \ldots, 1 - w(A(u_n))\big), 1\Big] \\ &= \Big[1 - M_L\big(w(A(u_1)), \ldots, w(A(u_n))\big), 1\Big] \end{aligned}$$

(SM1), (SM3) y (SM4) son directos. ■

Ejemplo 6: El siguiente es un ejemplo de IV similitud basada en la amplitud con respecto a la media aritmética y el orden definido por las funciones $K_{0.5}$ y K_1 (de acuerdo con la proposición 1).

$$S_{M_1}(A,B) = \left[1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} \left|\underline{A(u_i)} + \overline{A(u_i)} - \underline{B(u_i)} - \overline{B(u_i)}\right|}{2n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} \min(w(A(u_i)), w(B(u_i)))}{n}, \; 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} \left|\underline{A(u_i)} + \overline{A(u_i)} - \underline{B(u_i)} - \overline{B(u_i)}\right|}{2n}\right]. \tag{7}$$

VI. Conclusiones

En este trabajo hemos presentado nuevas aproximaciones a los conceptos de función de equivalencia restringida y función de similitud en el marco intervalar teniendo en cuenta órdenes admisibles y la amplitud de los intervalos.

Estas nociones son aplicables directamente en todos aquellos problemas donde, o bien se han utilizado conjuntos intervalo-valorados, o bien se han utilizado conjuntos difusos pero existe una gran incertidumbre asociada a la construcción de los valores de pertenencia. En particular, en el futuro tenemos intención de aplicar estas nociones en problemas de de visión en estéreo.

References

[1] E. Barrenechea, H. Bustince, B. De Baets, C. Lopez-Molina, Construction of interval-valued fuzzy relations with application to the generation of fuzzy edge images IEEE Transactions on Fuzzy Systems 19 (5) (2011) 819–830.

[2] E. Barrenechea, J. Fernandez, M. Pagola, F. Chiclana, H. Bustince, Construction of interval-valued fuzzy preference relations from ignorance functions and fuzzy preference relations. Application to decision making Knowledge-Based Systems 58 (2014) 33–44.

[3] P. Burillo, H. Bustince, Construction theorems for intuitionistic fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems, 84 (1996) 271–281.

[4] H. Bustince, E. Barrenechea, M. Pagola, Relationship between restricted dissimilarity functions, restricted equivalence functions and normal E_N-functions: Image thresholding invariant, Pattern Recognition Letters 29(4) (2008) 525–536.

[5] P. Burillo, H. Bustince, Entropy on intuitionistic fuzzy sets and on interval-valued fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems 78 (1996) 305–316.

[6] H. Bustince, E. Barrenechea, M. Pagola, Image thresholding using restricted equivalence functions and maximizing the measure of similarity, Fuzzy Sets and Systems 128(5) (2007) 496–516.

[7] H. Bustince, E. Barrenechea, M. Pagola, Restricted equivalence functions, Fuzzy Sets and Systems 157(17) (2006) 2333–2346.

[8] H. Bustince, E. Barrenechea, M. Pagola, J. Fernández, Z. Xu, B. Bedregal, J. Montero, H. Hagras, F. Herrera, B. De Baets, A historical account of types of fuzzy sets and their relationship, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 24 (1) (2016) 179–194.
[9] H. Bustince, J. Fernandez, , A. Kolesárová, R. Mesiar, Generation of linear orders for intervals by means of aggregation functions, Fuzzy Sets and Systems 220 (2013) 69–77.
[10] H.M. Choi, G.S. Mun, J.Y. Ahn, A medical diagnosis based on interval-valued fuzzy sets, Biomedical Engineering-Applications Basis Communications, 24(4) (2012) 349–354.
[11] A. Heidarzade, A new similarity measure for interval type-2 fuzzy sets: Application in fuzzy risk analysis, International Journal of Applied Decision Sciences, 9 (4) (2016) 400–412.
[12] X. Liu, Entropy, distance measure and similarity measure of fuzzy sets and their relations. Fuzzy Sets Systems 52 (1992) 305–318.
[13] Z. Lu, and J. Ye, Logarithmic similarity measure between interval-valued fuzzy sets and its fault diagnosis method, Information (Switzerland) 9 (2018) art. no. 36.
[14] Z.S. Xu, R.R. Yager, Some geometric aggregation operators based on intuitionistic fuzzy sets, International Journal of General Systems 35 (2006) 417–433.