



Operadores de agregación y comparación para diferenciación de señales discretas

C. Lopez-Molina, S. Iglesias-Rey, H. Bustince
 Dpto. Estadística, Informática y Matemáticas
 Universidad Pública de Navarra
 Pamplona, Spain
 Email: carlos.lopez@unavarra.es

N. Madrid
 Escuela de Ingenierías Industriales
 Universidad de Málaga
 Málaga, España
 Email: nicolas.madrid@uma.es

Abstract—La tecnología digital ha hecho que la mayor parte de los datos se registren en forma de señales discretas. A pesar de las ventajas que esto tiene, la naturaleza de esta información representa desafíos novedosos. En este trabajo analizamos la diferenciación de señales discretas, una tarea básica para el procesamiento automático de las mismas. En concreto, proponemos el uso de operadores de comparación y agregación para la generación de familias de operadores de diferenciación con alta interpretabilidad. Nuestra propuesta es validada en el contexto de procesamiento de imagen, con la finalidad de caracterizar derivadas parciales en señales bidimensionales.

Index Terms—Operadores de agregación; operadores de comparación; diferenciación de señales discretas; filtros de convolución.

I. INTRODUCCIÓN

La era digital ha producido un incremento exponencial en la cantidad de datos recogidos en casi cualquier ámbito de conocimiento. Esto ha provocado cambios en la manera de tratar información, siendo uno de los más importantes el papel del procesamiento de señal [1], [2]. Nótese que el procesamiento de señal trata con datos nativamente representados en forma de señal (audio, imagen, video), y también de datos escalares recogidos en forma de señal (como las series temporales o los espacios-escala). El procesamiento de señal, entendido de una manera amplia, es una rama aplicada del análisis matemático. Sin embargo, la portabilidad de algoritmos entre ambos campos está en ocasiones muy dificultada por la naturaleza discreta de las señales digitales.

En este trabajo nos centramos en el problema de la diferenciación de señales discretas [3]. La importancia de la diferenciación (e integración) en el procesamiento de señal es capital [4]. Ambas operaciones, aunque en especial la primera de ellas, se usan para localizar tanto puntos críticos (p.e. máximos o mínimos locales) como para localizar o *clusterizar* regiones de interés en las señales. Un ejemplo de fácil interpretación es el de las imágenes en escala de grises. En estas imágenes, entendidas como señales discretas bidimensionales, el uso de derivadas parciales es central a casi cualquier procesamiento de medio o alto nivel. Las diferencias parciales permiten analizar la variación local de las imágenes, y suponen la información primaria en aplicaciones que incluyen la segmentación, detección de bordes, la búsqueda de puntos de interés y la regularización adaptativa.

Muchas de las propuestas para diferenciación de señales discretas están basadas en filtros de convolución para primera o segunda derivada. Al inicio de la era digital aparecieron filtros de convolución discretos, generalmente asociados al cómputo de gradientes en imágenes digitales [5], [6], [7]. En los años 80, nuevos trabajos se inspiraron en el análisis matemático para diseñar filtros continuos, que debían ser discretizados para su aplicación. Esta naturaleza continua les permitía, antes de la discretización, presentarse como óptimos ante ciertos criterios de calidad [8], [9]. Estos trabajos incluyen las propuestas de Marr y Hildreth [10] y Canny [11], [12], así como ciertas expansiones posteriores [9], [13].

El estudio de filtros de convolución para el cálculo de diferencias parciales se ha visto frenado en los últimos 20 años. A pesar de que se han presentado trabajos de impacto, estos generalmente se limitan a reescribir los criterios de optimalidad y derivar nuevas propuestas, sin que esto repercuta claramente en una mejora en la aplicabilidad [14], [15], [16]. Si bien es cierto que la aparición de los espacios-escala para el análisis multidimensional de señales ha aportado cierta novedad en la diferenciación de señales discretas [17], [18], apenas ha sido aprovechado para producir mejores análisis diferenciales [19].

En este trabajo analizamos los filtros de convolución para el cálculo de diferencias parciales, con especial atención a la diferenciación parcial de imágenes. En concreto, reformulamos el proceso de convolución para considerar, de manera independiente, (a) la cuantificación de diferencias locales y (b) el modelado del vecindario de interés en torno a cada punto de la señal. Esta reformulación viene inspirada por los filtros bilaterales de Tomasi y Manduchi [20], así como por otras iniciativas de aplicación de operadores de agregación en la caracterización de diferencias parciales en imágenes [21]. Proponemos esta generalización para poder incorporar a este campo diferentes operadores de la Teoría de Conjuntos Difusos, en particular las funciones de disimilitud restringidas y las funciones de agregación.

En la Sección II repasamos algunos conocimientos básicos de aplicación en este trabajo. Las Secciones III y III desgranar la propuesta, que es validada de manera experimental en la Sección V. Para finalizar, la Sección VI lista algunas conclusiones y futuras líneas de trabajo.

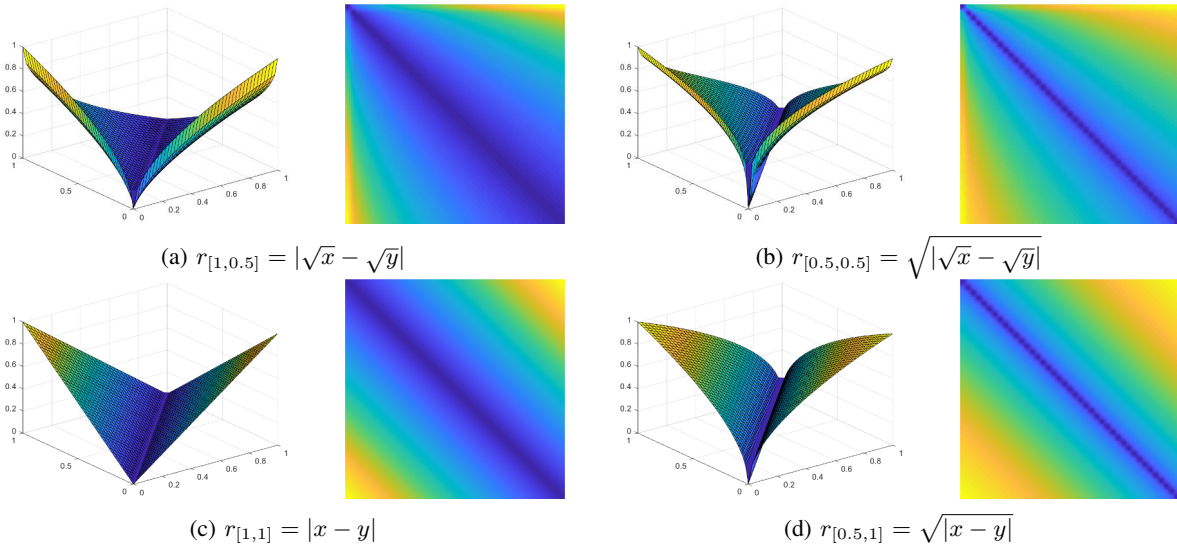


Fig. 1. Funciones de disimilitud restringidas construidas de acuerdo a la Proposición 1.

II. PRELIMINARIES

La teoría de funciones de comparación ha tenido un impacto significativo en la Teoría de Conjuntos Difusos. Esto se debe, probablemente, a la naturaleza subjetiva de las comparaciones humanas, en la cuales pueden aparecer ambigüedades e inconsistencias. En este contexto, la Teoría de Conjuntos Difusos ha sido prolífica, bien fuera centrada en términos de métricas [22] o en términos de medidas de similitud [23]. En este trabajo usamos las Funciones de Disimilitud Restringidas (o, RDFs, por sus siglas inglesas [24]). Estas funciones modelan la diferencia perceptual entre dos elementos en el intervalo $[0, 1]$, y han sido aplicadas en diferentes contextos [25], [26].

Definition 1: [24] Una *función de disimilitud restringida* es una aplicación $r : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ que satisfaga

- (R1) $r(x, y) = r(y, x)$ para todo $x, y \in [0, 1]$;
- (R2) $r(x, y) = 1$ si y sólo si $x = 0$ e $y = 1$ o $x = 1$ e $y = 0$;
- (R3) $r(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$;
- (R4) para todo $x, y, z \in [0, 1]$, si $x \leq y \leq z$, entonces $r(x, y) \leq r(x, z)$ y $r(y, z) \leq r(x, z)$.

Existen diferentes maneras de construir RDFs, si bien la más sencilla es la combinación de automorfismos.

Proposition 1: Sean φ_1 y φ_2 dos automorfismos de $[0, 1]$. La aplicación $r : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ construída tal que

$$r(x, y) = \varphi_1(|\varphi_2(x) - \varphi_2(y)|) \quad (1)$$

es una función de disimilitud restringida (o RDF).

De cara a reducir el alcance de este trabajo, consideraremos únicamente las RDFs construídas de acuerdo a la Proposición 1. Específicamente, nos referiremos como $r_{[\alpha, \beta]}$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, a la RDF tal que $\varphi_1(x) = x^\alpha$ y $\varphi_2(x) = x^\beta$. Es decir, a

$$r_{[\alpha, \beta]}(x, y) = (|x^\beta - y^\beta|)^\alpha. \quad (2)$$

La Fig. 1 muestra algunas RDFs construídas de acuerdo a la Ec. (2). Nótese que $r_{[1,1]}$ es equivalente a la diferencia absoluta entre los argumentos de la función.

III. UN MODELO GENERAL PARA DIFERENCIACIÓN

La noción de *derivada* está ligada a la idea de variación de una función. Por ello, al trabajar con funciones sobre dominios discretos, la diferencia local puede tomarse como un reemplazo fidedigno de la derivada. Sean dos funciones $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{N}^2 \mapsto \mathbb{R}$ tal que la segunda (mediciones) se construya a partir del muestreo de la primera (realidad subyacente). Podría aproximarse la derivada de f tal que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(i, j) &= g(i+1, j) - f(i, j) \text{ y} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(i, j) &= g(i, j+1) - f(i, j). \end{aligned} \quad (3)$$

Sin embargo, la aplicación de esta estrategia suele generar resultados decepcionantes, en buena medida debido a la contaminación de los datos. En entornos reales, el empleo de Ec. (3) es poco fiable, y sus resultados tienen una interpretabilidad muy baja. Un ejemplo de este hecho se ve en la Fig. 2. En esta figura vemos, en la fila superior, dos señales sintéticas, tal que la situada en la columna derecha es una versión contaminada de la que ocupa la columna izquierda. En esta señal coexisten dos *objetos* cada uno de los cuales genera dos puntos de interés (críticos), uno a cada lado del propio objeto. Estos puntos deberían representarse como dos máximos (subidas, al lado izquierdo de cada objeto) y dos mínimos (bajadas, al lado derecho). En la segunda fila de la Fig. 2 vemos la aproximación a $\frac{\partial f}{\partial x}$ realizada por el filtro de Lalignant [15], que corresponde en su versión 1D a la formulación de la Ec. (3). Se observa que el resultado es muy preciso en la señal sintética original, pero también muy poco interpretable en la señal contaminada. Esto se achaca a la alta frecuencia del muestreo para computar la diferencia (dos posiciones contiguas), lo que generalmente se soluciona usando operadores de mayor soporte.

Al usar un filtro de diferenciación la aproximación a las derivadas parciales de f se hace mediante la convolución de

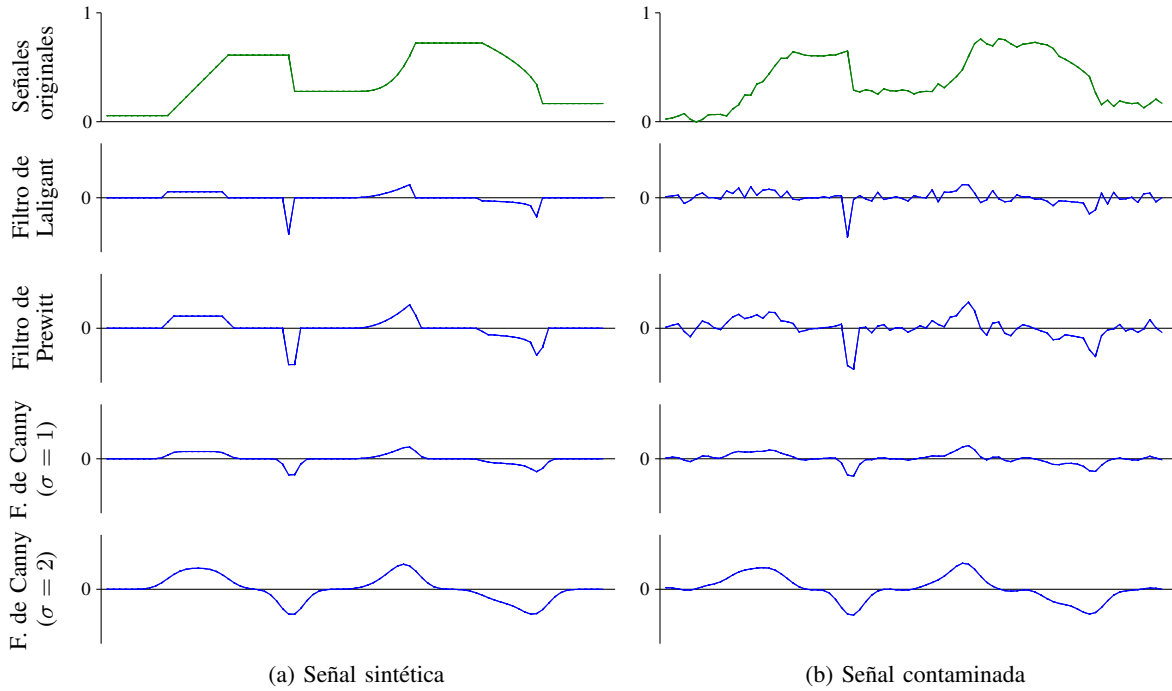


Fig. 2. Estimaciones de la primera derivada de una señal discreta usando diferentes filtros de convolución 1D. La señal contaminada se obtiene añadiendo ruido blanco Gaussiano con desviación estándar 0.02. Los operadores usados son el de Laligant [15], Prewitt [6] and Canny [12], y pueden observarse en la Fig. 3.

la señal g con un filtro κ . Algunos ejemplos son los operadores discretos de Sobel [5] y Prewitt [6], o los operadores basados en señales continuas de Canny [11] (y sus evoluciones [16], [27]) o Shen-Castan [28]. Algunos de estos filtros, en su representación 1D, se incluyen en la Fig. 3.

Una derivada parcial en x en el punto \mathbf{p} se aproxima tal que¹:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}) = g * \kappa(\mathbf{p}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \kappa(\xi) \cdot f(\mathbf{p} + \xi) \cdot d\xi, \quad (4)$$

donde ξ representa el desplazamiento.

La elección de κ , así como los parámetros que éste pudiera tener, ha sido ampliamente discutido en la comunidad científica. En esta discusión toman relevancia las características de las funciones a derivar, las contaminaciones que pueda sufrir, o la finalidad del proceso. De hecho, muchas propuestas son óptimas para el conjunto de restricciones y objetivos propuestos por sus autores, si bien estos difieren unos de otros. Una de las propiedades más aceptada es la antisimetría o imparidad, es decir, que para cualquier ξ en el dominio se cumple que $\kappa(\xi) = -\kappa(-\xi)$. Esta propiedad no siempre se cumple en los filtros de diferenciación, véase el caso del filtro de Laligant [15] en la Fig. 3, pero sí es sostenida en la mayor parte de los casos. Nótese que, en algunos filtros (como el ISEF [28], ver Fig. 3) el filtro no está definido en el origen, suponiéndose un valor 0.

¹En adelante, se considera únicamente la derivada $\frac{\partial f}{\partial x}$, ya que la derivada $\frac{\partial f}{\partial y}$ se computa de manera análoga.

Partiendo de la Ec. (4), y dando por hecha la antisimetría del filtro κ , tenemos que:

$$\begin{aligned} g * \kappa(\mathbf{p}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \kappa(\xi) \cdot g(\mathbf{p} + \xi) \cdot d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \kappa(\xi) g(\mathbf{p} + \xi) d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^0 \kappa(\xi) g(\mathbf{p} + \xi) d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \kappa(\xi) g(\mathbf{p} + \xi) d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \kappa(-\xi) g(\mathbf{p} - \xi) d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \kappa(\xi) g(\mathbf{p} + \xi) d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \kappa(\xi) g(\mathbf{p} - \xi) d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \kappa(\xi) (g(\mathbf{p} + \xi) - g(\mathbf{p} - \xi)) d\xi. \end{aligned} \quad (5)$$

Los dominios de las señales se definen, en el plano teórico, con dominio infinito. Por ejemplo, un filtro Gaussiano es, evidentemente, positivo en $[-\infty, \infty]$, que pasa a ser el rango de las integrales en Ec. (5). Sin embargo, en las aplicaciones prácticas esto no tiene demasiada relevancia, y los filtros se restringen a un cierto soporte discreto a partir del cual se considera que $K(\xi) = 0$. Por tanto, se puede reformular el resultado de la Ec. (5) tal que:

$$g * \kappa(i) = \int_{-t}^t \int_0^t \kappa(\xi) \cdot (g(\mathbf{p} + \xi) - g(\mathbf{p} - \xi)) \cdot d\xi. \quad (6)$$

donde $[-t, t]^2$ es el soporte del filtro κ , generalmente establecido a partir del descenso del valor κ por debajo de un cierto umbral cercano a 0.

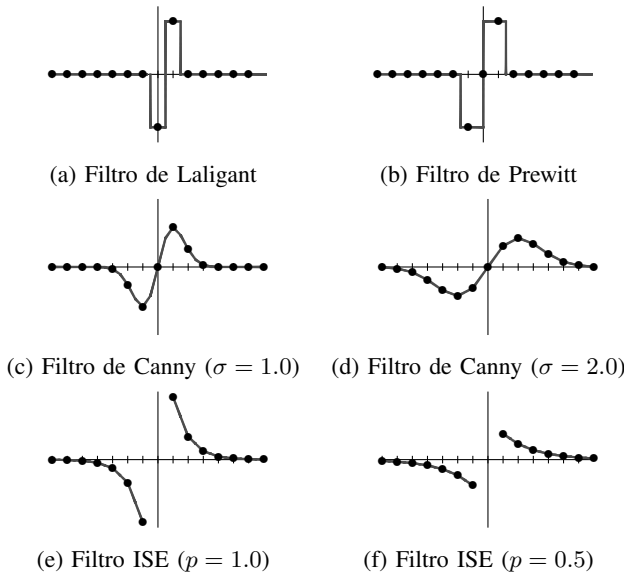


Fig. 3. Filtros de convolución 1D usados para diferenciación. Los puntos representan la versión discreta, mientras que la línea señala la función continua subyacente.

La estimación de las derivadas parciales de una señal g involucra, pues, dos componentes diferentes:

- la cuantificación de las diferencias entre los valores a ambos lados de la posición, representado en la Ec. (6) por el término $(g(x + \xi) - g(x - \xi))$. Nos referimos a este término como *término de intensidad*;
- la cuantificación de la relevancia de cada posición en el entorno, representado en la Ec. (6) por el término $\kappa(\xi)$. Nos referimos a este término como *término espacial*.

Al tener ambos términos identificados, podemos modelarlos de manera independiente. Por ejemplo, en lugar de considerar la diferencia absoluta entre los valores de la señal g , podemos modelar el término de intensidad usando otras medidas. Dado que las señales discretas suelen tener límites bien definidos, podemos considerar que f y g tienen el rango $[0, 1]$. Para el *término de intensidad* de la Ec. (6) consideramos una función de diferencia tal que $\epsilon: [0, 1]^2 \rightarrow [-1, 1]$. Esta función debe encargarse de cuantificar la diferencia percibida entre dos valores, sean $g(\mathbf{p} - \xi)$ y $g(\mathbf{p} + \xi)$. La Ec. (6) resulta en:

$$g * \kappa(\mathbf{p}) = \int_{-k}^k \int_0^k \kappa(\xi) \cdot \epsilon((g(\mathbf{p} + \xi), g(\mathbf{p} - \xi))) \cdot d\xi \quad (7)$$

Así, las derivadas parciales dependen de dos piezas de información: el filtro que modela la relevancia espacial (κ) y la función que modula la disimilitud (ϵ). Cada uno de estos debería poder estudiarse y entrenarse de manera independiente. Además, ambos se combinan de manera local usando un operador conjuntivo (producto) y de manera semi-local usando la suma (media aritmética, en caso de normalización).

En este trabajo nos centramos en el término de intensidad, relacionándolo con la teoría de comparación. En concreto, estudiamos el papel que pueden tener las funciones de disimilitud restringidas para el modelado de las diferencias.

IV. DIFERENCIACIÓN USANDO FUNCIONES DE DISIMILITUD RESTRINGIDAS

Dada la Ec. (7), una pregunta evidente se refiere al conjunto mínimo de propiedades que debe cumplir la función ϵ . Por ejemplo, debería producir valores *altos* cuando sus argumentos sean diferentes, mientras que deberían ser bajos o cercanos a cero cuando los argumentos sean similares. Sería esperable también la antisimetría, ya que las derivadas de una función no deberían verse afectadas por la dirección del análisis (más allá del signo de las mismas). Creemos que una función ϵ debe cumplir las siguientes propiedades:

- (E1) $\epsilon_r(y, z) = -\epsilon_r(z, y)$;
- (E2) $\epsilon_r(y, z) = 0$ si y sólo si $y = z$;
- (E3a) $\epsilon_r(y, z) = 1$ si y sólo si $y = 0$ y $z = 1$;
- (E3b) $\epsilon_r(y, z) = -1$ si y sólo si $y = 1$ y $z = 0$;
- (E4) Para cada $t, y, z \in [0, 1]$, $t \leq y \leq z$, tenemos que $\epsilon_r(t, y) \leq \epsilon_r(t, z)$ y $\epsilon_r(y, z) \leq \epsilon_r(z, t)$.

Estas propiedades garantizan el comportamiento esperado en el término de intensidad. Por ejemplo, (E2) garantiza que la derivada de una función será 0 si y sólo si $g(k + \xi) = g(k - \xi)$ para cada posición $\xi \in [-t, t]^2$.

Tras un análisis detallado, creemos que las RDF suponen una herramienta útil para generar funciones ϵ . En concreto, proponemos usar funciones ϵ construidas tal que:

$$\epsilon_r(y, z) = \frac{z - y}{|z - y|} \cdot r(y, z), \quad (8)$$

donde r es una RDF. Una función ϵ_r , construida como en la Ec. (8), satisface las propiedades (E1)-(E4).

Trabajos anteriores han estudiado las técnicas clásicas de filtrado para incorporar dos términos independientes (y explícitos), especialmente en el campo de procesamiento de imagen. Las técnicas de regularización o diferenciación adaptadas al contenido local de la imagen (*content-aware filtering*), por ejemplo, discriminan el análisis de tonos (el término de intensidad) con el estudio de la posición de cada pixel (el término espacial). La manera en que los términos se aplican y combinan puede, sin embargo, ser diferente. La contribución más relevante en este sentido, así como la más parecida a nuestro objetivo, es el *filtrado bilateral* de Tomasi y Manduchi (*bilateral filtering* [20]). En este trabajo, los autores proponen la combinación de filtros en las dimensiones tonal y espacial para la regularización adaptativa de imágenes. Estos filtros consideran la cercanía tonal y espacial de cada par de píxeles a la hora de regularizar una zona de la imagen. Específicamente, proponen generar una imagen regularizada g^* a partir de una imagen monocal g tal que:

$$g^*(\mathbf{p}) = \frac{1}{k_d} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(\xi) \cdot g(\mathbf{p} + \xi) \cdot h(|g(\mathbf{p}) - g(\mathbf{p} + \xi)|) d\xi \quad (9)$$

donde k_d es un factor de normalización, s es un filtro de paso bajo y h es una función unaria decreciente. En esta formulación, s modula el peso de los elementos en función de su distancia a \mathbf{p} , mientras que h modula el peso de los elementos en función de su diferencia de valor respecto a $g(\mathbf{p})$.



Los filtros bilaterales se han aplicado en diferentes escenarios, si bien se han mantenido casi siempre en el ámbito de la regularización adaptativa. Los objetivos, sin embargo, han variado, desde la regularización sin contexto (en el trabajo original [20]) a la eliminación de ruido o texturas [29]. Algunos autores han relacionado los filtros bilaterales con otras estrategias de regularización adaptativas y análisis de datos, como pueden ser la difusión anisotrópica o el *mean-shift* [30], [31], [32]. Finalmente, en 2017, Wilkin y Beliaikov presentaron una reformulación de los filtros bilaterales [21] usando funciones débilmente monótonas (*weakly monotone functions* [33]).

Nuestra propuesta, aunque es conceptualmente similar a la de Tomasi y Manduchi, tiene una formulación diferente. El cambio más significativo es que el término de intensidad incluye dos posiciones simétricas respecto a \mathbf{p} , mientras que en un filtro bilateral se evalúa la similitud tonal entre los valores respecto de la posición central (ver Ec. (9)). Otra diferencia significativa es que el dominio espacial de los filtros bilaterales es simétrico desde el origen (\mathbf{p}), mientras que en la Ec. (7) κ sólo necesita definirse en la mitad del mismo.

V. VALIDACIÓN EXPERIMENTAL

La propuesta de la Sección IV se basa en la asunción de que la diferencia aritmética no es necesariamente el mejor descriptor de la disimilitud entre dos valores. O, al menos, de que es bueno tener la capacidad de modelar esta disimilitud por medio de una función dedicada. Esta sección trata de comprobar si el aislar el *término de intensidad* puede conllevar mejoras en los resultados prácticos de una aplicación de diferenciación. Para ello, hemos aplicado nuestras ideas al contexto de detección de bordes.

Proponemos un esquema de detección de bordes relativamente estándar, compuesto por cuatro pasos acordes a la estructura de descomposición de Bezdek [34], [35]:

1. Regularizar la imagen con un filtro Gaussiano con $\sigma = 1$;
2. Calcular los gradientes como la combinación de las derivadas parciales, aproximados de acuerdo a la Ec. (7) con los ajustes que se detallan a continuación.
3. Estimar la intensidad de borde como la magnitud del gradiente en cada píxel.
4. Binarizar la imagen usando *non-maxima suppression* [36] e *hysteresis* [11], para la cuál los umbrales se establecen usando la técnica de Medina-Carnicer *et al.* [37].

Este esquema es una aplicación directa de la diferenciación de señales discretas (imágenes). Los ajustes de nuestros filtros son los que siguen:

- ϵ se construye como se ve en la Ec. (8), donde las RDFs son del tipo $r_{[\alpha,\beta]}$ con valores $\alpha, \beta \in \{0.5, 1, 1.5, \dots, 3\}$;
- κ_h y κ_v son equivalentes al lado positivo de un filtro de Canny, i.e

$$\kappa_h(\xi) = \frac{-\xi_x}{\sigma^2} e^{-\frac{\xi_x^2 + \xi_y^2}{2\sigma^2}} \quad \text{and} \quad \kappa_v(\xi) = \frac{-\xi_y}{\sigma^2} e^{-\frac{\xi_x^2 + \xi_y^2}{2\sigma^2}}, \quad (10)$$

con $\sigma = 1$.

		β					
		0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
α	0.5	.56	.63	.65	.64	.63	.61
	1.0	.56	.63	.64	.63	.61	.58
	1.5	.56	.61	.61	.59	.57	.55
	2.0	.56	.59	.58	.55	.53	.50
	2.5	.55	.57	.55	.52	.49	.47
	3.0	.54	.54	.51	.48	.46	.43

(a) Rendimiento medio (medida F) para cada RDF $r_{[\alpha,\beta]}$.

		β					
		0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
α	0.5	4/13	26/-	24/-	16/-	16/-	16/3
	1.0	2/3	11/-	14/-	6/-	8/-	2/2
	1.5	4/3	7/1	2/-	1/1	1/1	3/-
	2.0	5/3	3/-	3/-	1/-	-/-	1/2
	2.5	2/9	4/-	2/2	-/-	2/2	6/12
	3.0	2/19	1/5	3/2	1/9	-/13	1/95

(b) Número de imágenes para las cuales cada RDF $r_{[\alpha,\beta]}$ obtiene el mejor/peor resultados de entre los contendientes.

TABLE I
RESULTADOS CUANTITATIVOS OBTENIDOS EN EL EXPERIMENTO PARA CADA RDF $r_{[\alpha,\beta]}$ EN EL BSDS500 *test set*.

Nótese que, cuando usamos $r_{[1,1]}$, el algoritmo es computacionalmente equivalente al método de Canny. De esta manera, al incluir $(\alpha, \beta) = (1, 1)$ en la comparación, podemos contrastar la importancia de tener un término independiente y adaptable para la cuantificación de las disimilitudes.

En este experimento utilizamos un esquema estándar de cuantificación de resultados basado en la medida F [38], [39] sobre el *dataset de test* del BSDS [40].

En la Tabla I mostramos los resultados obtenidos en los experimentos. Primero, en la Tabla I(a) listamos el rendimiento medio de cada combinación de (α, β) . Luego, en la Tabla I(b) mostramos el número de imágenes para los cuales cada combinación de (α, β) produce el mejor y/o peor resultado (en términos de la medida F).

Los resultados indican que la combinación $(\alpha, \beta) = (1, 1)$ (que recupera el método de Canny) no es necesariamente la mejor opción para el término de intensidad. Otras configuraciones producen resultados que son, al menos, competitivos, especialmente con valores bajos de α y β . Esta conclusión se refiere a los valores medios de rendimiento, pero también a los números de mejores y peores resultados. Son llamativos los casos de $r_{[0.5,1.0]}$ y, por ejemplo, $r_{[0.5,2.5]}$, ya que ambos tienen mejores resultados medios, así como mejores ratios de mejor/peor resultado que $r_{[1,1]}$. Si bien experimentos exhaustivos podrían llevarse a cabo para confirmar nuestras hipótesis, creemos que nuestros resultados, dado el limitado espacio, refuerzan nuestra tesis de que la diferencia absoluta podría no ser siempre la mejor medida de disimilitud entre (en este caso) tonos en una imagen y (de manera general) valores en una función discreta.

VI. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos presentado un modelo para generalizar filtros antisimétricos (impares) para la aproximación de derivadas mediante diferencias discretas. Nuestro modelo propone el uso de términos explícitos para las diferencias de valor (término de intensidad) y posición (término espacial). En el caso de las primeras, hemos presentado una clase de funciones de comparación basadas en RDFs que garantizan una serie de propiedades, añadidas a la alta flexibilidad. La validez del modelo se ha testeado en la diferenciación de imágenes en escala de grises para detección de bordes, encontrando que los resultados de algoritmos clásicos pueden mejorarse al usar las RDFs dentro de nuestra reformulación del modelo. Los resultados son prometedores, aunque deberían ser respaldados por trabajos más exhaustivos. Además, cabe señalar que nuestro modelo propuesto abre la puerta al uso de técnicas como el entrenamiento de funciones en el espacio de intensidades (tonos, en el caso de procesamiento de imagen), que en una formulación clásica del problema no eran elegibles.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Ministerio de Ciencia del Gobierno de España (Proyectos TIN2016-77356-P y TIN15-70266-C2-P-1).

REFERENCES

- [1] J. Astola, E. Dougherty, I. Shmulevich, and I. Tabus, "Genomic signal processing," *Signal Processing*, vol. 83, no. 4, pp. 691–694, 2003.
- [2] T.-S. Chua, X. He, W. Liu, M. Piccardi, Y. Wen, and D. Tao, "Big data meets multimedia analytics," *Signal Processing*, vol. 124, pp. 1–4, 2016.
- [3] L. Florack, *Image structure*. Springer Science & Business Media, 1997, vol. 10.
- [4] D. Marr, *Vision*. MIT Press, 1982.
- [5] I. Sobel and G. Feldman, "A 3x3 isotropic gradient operator for image processing," 1968, presented at a talk at the Stanford Artificial Intelligence Project.
- [6] J. M. S. Prewitt, *Object enhancement and extraction*, ser. Picture Processing and Psychopictorics. Academic Press, 1970, pp. 75–149.
- [7] L. G. Roberts, "Machine perception of three-dimensional solids," Ph.D. dissertation, Massachusetts Institute of Technology, 1963.
- [8] R. M. Haralick, "Digital step edges from zero crossing of second directional derivatives," *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 6, no. 1, pp. 58–68, 1984.
- [9] M. Basu, "Gaussian-based edge-detection methods- A survey," *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics, Part C: Applications and Reviews*, vol. 32, no. 3, pp. 252–260, 2002.
- [10] D. Marr and E. Hildreth, "Theory of edge detection," *Proceedings of the Royal Society of London*, vol. 207, no. 1167, pp. 187–217, 1980.
- [11] J. Canny, "Finding edges and lines in images," Massachusetts Institute of Technology, Tech. Rep., 1983.
- [12] —, "A computational approach to edge detection," *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 8, no. 6, pp. 679–698, 1986.
- [13] G. Wang and B. De Baets, "Edge detection based on the fusion of multiscale anisotropic edge strength measurements," in *Advances in Fuzzy Logic and Technology 2017*. Springer, 2017, pp. 530–536.
- [14] S. Mahmoodi, "Edge detection filter based on Mumford–Shah Green function," *SIAM Journal on Imaging Sciences*, vol. 5, no. 1, pp. 343–365, 2012.
- [15] O. Lalignant and F. Truchetet, "A nonlinear derivative scheme applied to edge detection," *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 32, no. 2, pp. 242–257, 2010.
- [16] W. McIlhagga, "The Canny edge detector revisited," *International Journal of Computer Vision*, vol. 91, pp. 251–261, 2011.
- [17] T. Lindeberg, "Edge detection and ridge detection with automatic scale selection," *International Journal of Computer Vision*, vol. 30, no. 2, pp. 117–156, 1998.
- [18] J. Weickert, *Anisotropic Diffusion in Image Processing*, ser. ECMI Series. Teubner-Verlag, 1998.
- [19] C. Lopez-Molina, J. Montero, H. Bustince, and B. De Baets, "Self-adapting weighted operators for multiscale gradient fusion," *Information Fusion*, vol. 44, pp. 136–146, 2018.
- [20] C. Tomasi and R. Manduchi, "Bilateral filtering for gray and color images," in *Proc. of the IEEE International Conf. on Computer Vision*, 1998, pp. 838–846.
- [21] T. Wilkin and G. Beliakov, "Robust image denoising and smoothing with generalised spatial-tonal averages," in *IEEE International Conf. on Fuzzy Systems*. IEEE, 2017, pp. 1–7.
- [22] V. Gregori, S. Morillas, and A. Sapena, "Examples of fuzzy metrics and applications," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 170, no. 1, pp. 95–111, 2011.
- [23] S. Santini and R. Jain, "Similarity measures," *IEEE Trans. on Pattern Analysis Machine Intelligence*, vol. 21, no. 9, pp. 871–883, 1999.
- [24] H. Bustince, E. Barrenechea, and M. Pagola, "Relationship between restricted dissimilarity functions, restricted equivalence functions and normal EN-functions: Image thresholding invariant," *Pattern Recognition Letters*, vol. 29, no. 4, pp. 525–536, 2008.
- [25] C. Lopez-Molina, B. De Baets, M. Galar, and H. Bustince, "A generalization of the Perona-Malik anisotropic diffusion method using restricted dissimilarity functions," *International Journal of Computational Intelligent Systems*, vol. 6, no. 1, pp. 14–28, 2013.
- [26] C. Marco-Detchart, J. Cerron, L. De Miguel, C. Lopez-Molina, H. Bustince, and M. Galar, "A framework for radial data comparison and its application to fingerprint analysis," *Applied Soft Computing*, vol. 46, pp. 246–259, 2016.
- [27] P.-L. Shui and W.-C. Zhang, "Noise-robust edge detector combining isotropic and anisotropic Gaussian kernels," *Pattern Recognition*, vol. 45, no. 2, pp. 806–820, 2012.
- [28] J. Shen and S. Castan, "An optimal linear operator for step edge detection," *CVGIP: Graphical Models and Image Processing*, vol. 54, no. 2, pp. 112–133, 1992.
- [29] S. Paris, P. Kornprobst, J. Tumblin, and F. Durand, "Bilateral filtering: Theory and applications," *Foundations and Trends in Computer Graphics and Vision*, vol. 4, no. 1, pp. 1–73, 2008.
- [30] M. Elad, "On the origin of the bilateral filter and ways to improve it," *IEEE Trans. on Image Processing*, vol. 11, no. 10, pp. 1141–1151, 2002.
- [31] D. Barash, "A fundamental relationship between bilateral filtering, adaptive smoothing, and the nonlinear diffusion equation," *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 24, pp. 844–847, 2002.
- [32] D. Comaniciu and P. Meer, "Mean shift: a robust approach toward feature space analysis," *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 24, no. 5, pp. 603–619, 2002.
- [33] T. Wilkin and G. Beliakov, "Weakly monotonic averaging functions," *International Journal of Intelligent Systems*, vol. 30, no. 2, pp. 144–169, 2015.
- [34] J. Bezdek, R. Chandrasekhar, and Y. Attikouzel, "A geometric approach to edge detection," *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, vol. 6, no. 1, pp. 52–75, 1998.
- [35] C. Lopez-Molina, "The breakdown structure of edge detection- analysis of individual components and revisit of the overall structure," Ph.D. dissertation, Universidad Publica de Navarra, 2012.
- [36] A. Rosenfeld and M. Thurston, "Edge and curve detection for visual scene analysis," *IEEE Trans. on Computers*, vol. 20, no. 5, pp. 562–569, 1971.
- [37] R. Medina-Carnicer, F. Madrid-Cuevas, A. Carmona-Poyato, and R. Muñoz-Salinas, "On candidates selection for hysteresis thresholds in edge detection," *Pattern Recognition*, vol. 42, no. 7, pp. 1284–1296, 2009.
- [38] D. Martin, C. Fowlkes, and J. Malik, "Learning to detect natural image boundaries using local brightness, color, and texture cues," *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 26, no. 5, pp. 530–549, 2004.
- [39] C. Lopez-Molina, B. De Baets, and H. Bustince, "Quantitative error measures for edge detection," *Pattern Recognition*, vol. 46, no. 4, pp. 1125–1139, 2013.
- [40] P. Arbelaez, M. Maire, C. Fowlkes, and J. Malik, "Contour detection and hierarchical image segmentation," *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 33, pp. 898–916, 2011.