



Un algoritmo de comparación de imágenes basado en funciones de semejanza de matrices

Mikel Sesma-Sara^{*†}, Laura De Miguel^{*†}, Javier Fernandez^{*†},
Eduarne Barrenechea^{*†}, Radko Mesiar^{‡§}, y Humberto Bustince^{*†}

^{*}Departamento de Estadística, Informática y Matemáticas
Universidad Pública de Navarra, 31006 Pamplona, Spain

Email: {mikel.sesma,laura.demiguel,fcojavier.fernandez,eduarne.barrenechea,bustince}@unavarra.es

[†]Institute of Smart Cities, Universidad Pública de Navarra, 31006 Pamplona, Spain

[‡]Department of Mathematics and Descriptive Geometry, Faculty of Civil Engineering,
Slovak University of Technology, Radlinského 11, Bratislava, Slovakia

Email: mesiar@math.sk

[§]Institute for Research and Applications of Fuzzy Modelling,
University of Ostrava, 30. dubna 22, Ostrava 1, Czech Republic

Resumen—En este trabajo presentamos un algoritmo de comparación de imágenes basado en mediciones de similitud entre vecindarios de píxeles a través de las llamadas funciones de semejanza de matrices (o *matrix resemblance functions*, término original). Además, inspirados por los conceptos de funciones de equivalencia restringida y grados de inclusión de Sinha y Dougherty, estudiamos dos métodos de construcción para funciones de semejanza de matrices, que las dotan de una expresión algebraica y permiten así estudiar las propiedades que hacen a esta familia de funciones apropiada para la comparación de imágenes. Concluimos el trabajo con un ejemplo que ilustra una potencial aplicación de este tipo de funciones para detectar cambios y movimiento en vídeo.

Index Terms—Funciones de agregación, funciones de semejanza de matrices, comparación de imágenes.

I. INTRODUCCIÓN

Existen en la literatura diversas propuestas para medir cómo de diferentes son dos imágenes en términos de similitud. La comparación de imágenes es ampliamente utilizada en distintos ámbitos, como son el reconocimiento facial [1], mejora de escenas [2] y detección de fallos o anomalías en series de producción [3], entre otros.

En consecuencia, es posible encontrar numerosas medidas e índices de similitud en la literatura [4], [5]. Una de las diferencias entre el método que se presenta en este trabajo y muchos otros es que se trata de un método basado en la comparación de vecindarios, en lugar de llevar a cabo una comparación píxel a píxel. Otra diferencia notable es que la mayoría de técnicas de comparación son medidas numéricas, i.e., el resultado se reduce a un número, mientras que nuestra propuesta tiene una nueva imagen como resultado. Además de que un número puede no resultar del todo representativo en cuanto a la similitud de dos imágenes, el beneficio de considerar una nueva imagen como resultado es que hace posible extraer información sobre la localización, es decir, se pueden determinar zonas donde las dos imágenes son más similares o menos y medir cómo de similares son en cada una de esas regiones.

En este trabajo discutimos la noción de funciones de semejanza de matrices, que fueron introducidas con una definición axiomática en [6]. Además, estudiamos dos métodos de construcción basados en funciones de equivalencia restringida [7] y grados de inclusión [8], [9], respectivamente. También analizamos las restricciones necesarias para que estas funciones de esta clase sean adecuadas para comparar imágenes, en otras palabras, las restricciones para que estas funciones satisfagan propiedades frecuentemente requeridas a medidas de comparación de imágenes.

El objetivo de este trabajo, además de discutir la noción y las propiedades de las funciones de semejanza de matrices, es presentar un algoritmo de comparación de imágenes basado en esta familia de funciones. El algoritmo consiste en comparar el vecindario de un píxel de la primera imagen con el correspondiente vecindario del píxel de la segunda imagen. El resultado de dicha comparación se usa como valor para el píxel en esa posición de la nueva imagen, la imagen resultado.

Tras la presentación del algoritmo, presentamos un ejemplo que ilustra cómo puede usarse el algoritmo en una aplicación de detección de cambios o movimiento en vídeo.

Este trabajo se organiza de la siguiente manera. En la Sección II, comenzamos recordando varios conceptos preliminares. En la Sección III presentamos la clase de funciones de semejanza de matrices para matrices $m \times n$. En la Sección IV discutimos dos métodos para construir funciones de este tipo basados en funciones de equivalencia restringida y grados de inclusión. En la Sección V estudiamos las propiedades que este tipo de funciones cumple en relación con el problema de la comparación de imágenes. Concluimos este trabajo con un algoritmo de comparación de imagen (Sección VI) y un ejemplo de cómo aplicarlo en un problema de detección de cambios en vídeo en la Sección VII.

II. PRELIMINARES

Sean $m, n \in \mathbb{N}$ y denotamos por $\mathcal{M}_{m \times n}([0, 1])$ al conjunto de matrices $m \times n$ cuyos elementos pertenecen al intervalo

unidad.

Llamamos negación difusa a la siguiente generalización de la negación en lógica clásica.

Definición 1. Se dice que una función $c : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ es una negación difusa si es decreciente, $c(0) = 1$ y $c(1) = 0$. Además, se dice que c es estricta si es continua y estrictamente decreciente. Decimos que una negación estricta c es fuerte si además es involutiva, es decir, $c(c(x)) = x$ para todo $x \in [0, 1]$.

Una función de equivalencia restringida [7] modela la comparación entre dos números en el intervalo unidad.

Definición 2. Sea c una negación fuerte. Una función $REF : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ es una función de equivalencia restringida con respecto a c si

- (REF1) $REF(x, y) = REF(y, x)$ para todos $x, y \in [0, 1]$;
- (REF2) $REF(x, y) = 1$ si y solo si $x = y$;
- (REF3) $REF(x, y) = 0$ si y solo si $\{x, y\} = \{0, 1\}$;
- (REF4) $REF(x, y) = REF(c(x), c(y))$ para todos $x, y \in [0, 1]$;
- (REF5) Para todos $x, y, z \in [0, 1]$, si $x \leq y \leq z$, entonces $REF(x, y) \geq REF(x, z)$ y $REF(y, z) \geq REF(x, z)$.

En la Sección IV presentamos un método de construcción de funciones de semejanza de matrices en términos de grados de inclusión difusos. Para ello, aprovechamos el hecho de que si consideramos un conjunto de píxeles como universo, un conjunto difuso puede ser como una matriz en $\mathcal{M}_{m \times n}([0, 1])$. Denotamos el conjunto formado por todos los conjuntos difusos con universo X como $FS(X)$.

Un grado de inclusión difuso [9], [10], [11] indica cómo de contenido está un conjunto difuso en otro. Existen varias definiciones de esta noción, con diferentes axiomatizaciones [12], [8], [13]. En este trabajo, usamos la introducida por Sinha y Dougherty [8].

Definición 3. Se dice que una función $\sigma : FS(X) \times FS(X) \rightarrow [0, 1]$ es un grado de inclusión en el sentido de Sinha y Dougherty si satisface las siguientes propiedades

- (IG1) $\sigma(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 1$ si y solo si $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$, donde $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$ significa que $\mathcal{A}(x) \leq \mathcal{B}(x)$ para todo $x \in X$;
- (IG2) $\sigma(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$ si y solo si existe x_i tal que $\mathcal{A}(x_i) = 1$ y $\mathcal{B}(x_i) = 0$;
- (IG3) Si $\mathcal{B} \leq \mathcal{C}$, entonces $\sigma(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \leq \sigma(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ para todo $\mathcal{A} \in FS(X)$;
- (IG4) Si $\mathcal{B} \leq \mathcal{C}$, entonces $\sigma(\mathcal{C}, \mathcal{A}) \leq \sigma(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ para todo $\mathcal{A} \in FS(X)$;
- (IG5) $\sigma(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sigma(\pi(\mathcal{A}), \pi(\mathcal{B}))$, siendo π una permutación de los elementos de X y con $\pi(\mathcal{A})(x) = \mathcal{A}(\pi(x))$ y $\pi(\mathcal{B})(x) = \mathcal{B}(\pi(x))$;
- (IG6) $\sigma(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sigma(\mathcal{B}_c, \mathcal{A}_c)$, siendo c una negación fuerte;
- (IG7) $\sigma(\mathcal{B} \vee \mathcal{C}, \mathcal{A}) = \min(\sigma(\mathcal{B}, \mathcal{A}), \sigma(\mathcal{C}, \mathcal{A}))$ para todos $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in FS(X)$;
- (IG8) $\sigma(\mathcal{A}, \mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) = \min(\sigma(\mathcal{A}, \mathcal{B}), \sigma(\mathcal{A}, \mathcal{C}))$ para todos $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in FS(X)$;

$$(IG9) \sigma(\mathcal{A}, \mathcal{B} \vee \mathcal{C}) \geq \max(\sigma(\mathcal{A}, \mathcal{B}), \sigma(\mathcal{A}, \mathcal{C})) \text{ para todos } \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in FS(X).$$

III. LA CLASE DE FUNCIONES DE SEMEJANZA DE MATRICES

Recordemos la definición axiomática del concepto de función de semejanza de matrices, introducida en [6] para matrices cuadradas.

Definición 4 ([6]). Sean $m, n \in \mathbb{N}$. Decimos que una función $\Psi : \mathcal{M}_{m \times n}([0, 1]) \times \mathcal{M}_{m \times n}([0, 1]) \rightarrow [0, 1]$ es una función de semejanza de matrices si cumple las siguientes propiedades:

- (MRF1) $\Psi(A, B) = 1$ si y solo si $A = B$;
- (MRF2) $\Psi(A, B) = 0$ si y solo si $\{a_{ij}, b_{ij}\} = \{0, 1\}$ para algunos $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$;
- (MRF3) $\Psi(A, B) = \Psi(B, A)$ para todas $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}([0, 1])$.

Ejemplo 1. La función

$$\Psi(A, B) = \prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} (1 - (a_{ij} - b_{ij})^2)$$

es una función de semejanza de matrices.

La condición (MRF2) hace que las funciones de semejanza de matrices estén relacionadas con el operador de erosión de la morfología matemática [6].

El siguiente resultado da una manera de generar nuevas funciones de semejanza de matrices a partir de una dada.

Proposición 1. Sean $\phi, \eta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tales que $\phi(0) = \eta(0) = 0$, $\phi(1) = \eta(1) = 1$, $\eta(x) \in (0, 1)$ para todo $x \in (0, 1)$, y sea ϕ inyectiva. Si $\Psi : \mathcal{M}_{m \times n}([0, 1])^2 \rightarrow [0, 1]$ es una función de semejanza de matrices, entonces $\Psi_{\phi, \eta} : \mathcal{M}_{m \times n}([0, 1])^2 \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$\Psi_{\phi, \eta}(A, B) = \eta(\Psi(\phi(A), \phi(B))), \quad (1)$$

donde $\phi(A)_{ij} = \phi(a_{ij})$, también es una función de semejanza de matrices.

La demostración de la proposición anterior se basa en comprobar que la expresión (1) cumple las condiciones (MRF1)-(MRF3).

Corolario 1. Sea $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una función estrictamente creciente tal que $\phi(0) = 0$ y $\phi(1) = 1$, y sea Ψ una función de semejanza de matrices. Entonces, la función $\Psi_{\phi, \phi^{-1}}$ es de semejanza de matrices.

Ejemplo 2. Del Ejemplo 1 y el Corolario 1 se deduce que

$$\Psi(A, B) = \left(\prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} (1 - (a_{ij}^2 - b_{ij}^2)^2) \right)^{\frac{1}{2}}$$

es una función de semejanza de matrices.

Por otro lado, es posible también obtener una función de esta clase mediante una agregación de funciones de semejanza



de matrices (más información sobre funciones de agregación en [14]).

Proposición 2. Sea $k \geq 2$ y sea $F : [0, 1]^k \rightarrow [0, 1]$ sin divisores de cero ni de uno [14]. Si Ψ_1, \dots, Ψ_k son funciones de semejanza de matrices, entonces la función $\Psi = F(\Psi_1, \dots, \Psi_k) : \mathcal{M}_{m \times n}([0, 1])^k \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$\begin{aligned} \Psi(A, B) &= F(\Psi_1, \dots, \Psi_k)(A, B) \\ &= F(\Psi_1(A, B), \dots, \Psi_k(A, B)), \end{aligned}$$

es una función de semejanza de matrices.

En particular, el resultado de calcular la media aritmética de dos funciones de semejanza de matrices es una nueva función de semejanza de matrices.

IV. MÉTODOS DE CONSTRUCCIÓN DE FUNCIONES DE SEMEJANZA DE MATRICES

Para poder exponer los dos métodos de construcción, fijamos una serie de propiedades que una función F puede cumplir. Sean $F : [0, 1]^N \rightarrow [0, 1]$, $\mathbf{x} \in [0, 1]^N$ y π una permutación de N elementos. Denotamos $\mathbf{x}_\pi = (x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(N)})$. Así, podemos fijar las siguientes propiedades.

- (F1) $F(\mathbf{x}) = 1$ si y solo si $\mathbf{x} = (1, \dots, 1)$,
- (F2) $F(\mathbf{x}) = 0$ si y solo si $x_j = 0$ para algún $1 \leq j \leq N$,
- (F3) $F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}_\pi)$ para toda permutación π de $\{1, \dots, N\}$.

Las primeras dos propiedades fueron estudiadas en [15] para funciones de agregación. Este tipo de funciones han sido ampliamente utilizadas en muchos campos, en particular en visión artificial [16], [17].

El siguiente resultado refleja el primer método de construcción, que está basado en el concepto de función de equivalencia restringida.

Teorema 1. Sea β una función que satisfaga (REF1)-(REF3) y $H : [0, 1]^{mn} \rightarrow [0, 1]$ una función que satisfaga (F1) y (F2). Entonces, la función $\Psi : \mathcal{M}_{m \times n}([0, 1])^2 \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$\Psi(A, B) = H_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}(\beta(a_{ij}, b_{ij})) \quad (2)$$

es una función de semejanza de matrices.

Demostración. Sea Ψ como en (2). Veamos que Ψ es una función de semejanza de matrices. Para (MRF1), como H satisface ((F1)), se tiene que

$$H_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}(\beta(a_{ij}, b_{ij})) = 1 \text{ si y solo si } \beta(a_{ij}, b_{ij}) = 1$$

para todos $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$. Ahora, por (REF2), esto equivale a que $a_{ij} = b_{ij}$ para todos $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$.

Probemos (MRF2). Por (F2), tenemos que

$$H_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}(\beta(a_{ij}, b_{ij})) = 0 \text{ si y solo si } \beta(a_{ij}, b_{ij}) = 0,$$

para algunos $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$; que, por (REF3), equivale a $\{a_{ij}, b_{ij}\} = \{0, 1\}$ para algunos $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$.

La propiedad (MRF3) también se cumple, ya que, por (REF1), $\beta(a_{ij}, b_{ij}) = \beta(b_{ij}, a_{ij})$. \square

Llamamos a las funciones de semejanza de matrices construidas de esta forma como generadas por el par (H, β) .

La función de semejanza de matrices del Ejemplo 1 está generada por el par (H, β) , donde H es el producto y $\beta(x, y) = 1 - (x - y)^2$.

El segundo método de construcción está basado en los grados de inclusión en el sentido de Sinha y Dougherty.

Teorema 2. Sea $\sigma : \mathcal{M}_{m \times n}([0, 1])^2 \rightarrow [0, 1]$ que satisfaga (IG1) y (IG2) y sea $M : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ una función satisfaciendo (F1)-(F3). Entonces la función $\Psi : \mathcal{M}_{m \times n}([0, 1])^2 \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$\Psi(A, B) = M(\sigma(A, B), \sigma(B, A)), \quad (3)$$

es una función de semejanza de matrices.

Demostración. Sea Ψ como en (3). Primero, para (MRF1), como M satisface ((F1)), se tiene que $M(\sigma(A, B), \sigma(B, A)) = 1$ si y solo si $\sigma(A, B) = \sigma(B, A) = 1$. Por (IG1), esto equivale a $A \leq B$ y $B \leq A$, que, a su vez, equivale a $A = B$.

(MRF2) se sigue de que $\Psi(A, B) = M(\sigma(A, B), \sigma(B, A)) = 0$ si y solo si $\sigma(A, B) = 0$ or $\sigma(B, A) = 0$, por ((F2)). Y, esto equivale a $(a_{ij} = 1$ y $b_{ij} = 0)$ o $(a_{ij} = 0$ y $b_{ij} = 1)$.

(MRF3) es directo por ((F3)). \square

Llamamos a las funciones de semejanza de matrices construidas por este método como las generadas por el par (M, σ) .

Ejemplo 3. La función dada por

$$\Psi(A, B) = \min \left(\inf_{i,j} \{I_L(a_{ij}, b_{ij})\}, \inf_{i,j} \{I_L(b_{ij}, a_{ij})\} \right),$$

donde I_L denota la implicación de Lukasiewicz, $I_L(x, y) = \min(1, 1 - x + y)$, es una función de semejanza de matrices construida por el segundo método, generada por $\sigma(A, B) = \inf_{i,j} \{I_L(a_{ij}, b_{ij})\}$ y M el mínimo.

V. PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES DE SEMEJANZA DE MATRICES PARA LA COMPARACIÓN DE IMÁGENES

Existen una serie de propiedades que son estándares en medidas para comparar imágenes [4], [5]. En esta sección presentamos las condiciones bajo las cuales las funciones sobre las que versa este trabajo cumplen varias de esas propiedades.

V-A. Igualdad y simetría

Es frecuente que una medida de comparación de imágenes solo pueda dar el máximo resultado posible cuando las dos imágenes a comparar sean la misma. Las funciones de semejanza de matrices cumplen esta condición por el primer axioma.

Otra propiedad habitual es que el orden en que se comparen ambas imágenes no tenga ningún efecto en el resultado. La condición (MRF3) asegura esta propiedad.

V-B. Complementos binarios y en grises

Según [4], una medida de similitud debe dar 0 cuando comparamos una imagen en blanco y negro con su negativa. Las funciones de semejanza de matrices cumplen esta propiedad debido al segundo axioma.

Otra propiedad deseada para esta clase de medidas es que el resultado de comparar dos imágenes cualesquiera y de comparar sus complementos por una negación fuerte sea el mismo. Es decir, se busca que $\Psi(A, B) = \Psi(A_c, B_c)$, con c una negación fuerte y $A_c = (c(a_{ij}))_{i,j=1}^n$ y $B_c = (c(b_{ij}))_{i,j=1}^n$.

En este respecto, tenemos los siguientes dos resultados.

Proposición 3. *Sea Ψ una función de semejanza de matrices generada por el par (H, β) tal que β cumple (REF4). Entonces Ψ satisface $\Psi(A, B) = \Psi(A_c, B_c)$.*

Proposición 4. *Sea Ψ una función de semejanza de matrices generada por el par (M, σ) tal que σ cumple (IG6). Entonces Ψ satisface $\Psi(A, B) = \Psi(A_c, B_c)$.*

Los recíprocos de estos resultados no se cumplen en general.

V-C. Invariancia por permutaciones

También es natural que la comparación de dos imágenes y la comparación de las mismas tras una transformación del dominio (ya sea una refracción, una rotación, etc.) obtengan el mismo resultado.

Consecuentemente, estudiamos las condiciones que tiene que cumplir una función de semejanza de matrices Ψ para que se cumpla $\Psi(A, B) = \Psi(\pi(A), \pi(B))$, para todas $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}([0, 1])$ y toda permutación π del conjunto de índices.

Teorema 3. *Sea Ψ una función de semejanza de matrices generada por el par (H, β) . Entonces Ψ cumple $\Psi(A, B) = \Psi(\pi(A), \pi(B))$, para todas A, B y permutación π si y solo si H satisface (F3).*

Proposición 5. *Sea Ψ una función de semejanza de matrices generada por el par (M, σ) . Si σ cumple (IG5), entonces Ψ cumple $\Psi(A, B) = \Psi(\pi(A), \pi(B))$, para todas A, B y permutación π .*

V-D. Monotonía

Llamamos monotonía a la siguiente condición, que asegura que el resultado de la comparación crece o decrece acorde a la diferencia en luminosidad.

(M) Si $A \leq B \leq C$, entonces $\Psi(A, C) \leq \Psi(A, B)$ y $\Psi(A, C) \leq \Psi(B, C)$.

Los siguientes resultados dan las condiciones bajo las cuales una matriz de semejanza de matrices cumple la condición (M).

Teorema 4. *Sea Ψ una función de semejanza de matrices generada por el par (H, β) con H una función creciente. Si β cumple (REF5), entonces Ψ cumple (M). Además, si H es estrictamente creciente en $(0, 1]^{mn}$, el recíproco también se cumple.*

En particular, una función de semejanza de matrices Ψ , generada por el par (H, β) con β una función de equivalencia restringida y H una función de agregación que cumpla (F1)-(F2), satisface la propiedad (M).

Teorema 5. *Sea Ψ una función de semejanza de matrices generada por el par (M, σ) con M una función creciente. Si σ cumple (IG3) y (IG4), entonces Ψ cumple (M).*

V-E. Invariancia por cambios constantes de luminosidad

Es deseable que el resultado de comparar dos imágenes y las mismas con un cambio constante en la luminosidad coincida. Es decir, buscamos que

$$\Psi(A + \lambda, B + \lambda) = \Psi(A, B), \quad (4)$$

donde λ es la matriz $m \times n$ formada por $\lambda \in [0, 1 - \max(a_{ij}, b_{ij})]$ en todas las posiciones.

Los siguientes son los resultados que indican bajo qué condiciones una función de semejanza de matrices, construida mediante una de las dos construcciones presentadas, cumple la condición (4).

Proposición 6. *Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}([0, 1])$, $\lambda \in [0, 1 - \max(a_{ij}, b_{ij})]$ y sea Ψ una función de semejanza de matrices generada por el par (H, β) con β tal que $\beta(x + \lambda, y + \lambda) = \beta(x, y)$. Entonces Ψ cumple (4).*

Proposición 7. *Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}([0, 1])$, $\lambda \in [0, 1 - \max(a_{ij}, b_{ij})]$ y sea Ψ una función de semejanza de matrices generada por el par (M, σ) con σ tal que $\sigma(A + \lambda, B + \lambda) = \sigma(A, B)$. Entonces Ψ cumple (4).*

VI. ALGORITMO DE COMPARACIÓN DE IMÁGENES

En esta sección presentamos un algoritmo para comparar imágenes en escala de grises que se basa en medir la similitud entre los vecindarios correspondientes a píxeles de las dos imágenes (matrices $m \times n$).

Una de las ventajas de este método es que, mientras que el resultado de comparar dos vecindarios con una función de semejanza de matrices es un número, el resultado de comparar dos imágenes es una tercera que permite delimitar las zonas donde las imágenes se parecen más o menos, las zonas donde las dos imágenes son igual de parecidas o igual de distintas. En consecuencia, uno de los últimos pasos de nuestro algoritmo es segmentar la imagen resultante para obtener las diferentes regiones de similitud.

En la siguiente sección ilustramos la forma de utilizar este algoritmo para detectar cambios u objetos en movimiento en vídeo. Para este tipo de aplicación, donde se pretende separar el objeto en movimiento del fondo, utilizamos un algoritmo de umbralización como técnica para segmentar la imagen al final del algoritmo. Las técnicas de umbralización [18] consisten en dar con un umbral en las intensidades de la imagen que separan el objeto del fondo: los píxeles con una intensidad mayor a dicho umbral se clasifican como objeto y los restantes como fondo, o viceversa. La ventaja de utilizar este tipo de técnica para la segmentación es su bajo coste computacional.



El algoritmo que presentamos, Algorithm 1, recibe dos imágenes del mismo tamaño en escala de grises y devuelve una nueva imagen, la imagen de comparación. Una vez obtenemos esta nueva imagen, procedemos a segmentar la imagen con el algoritmo de umbralización de Otsu [19].

Algorithm 1 Algoritmo de comparación de imágenes

Input: Dos imágenes (del mismo tamaño) a comparar: I_1 y I_2

Output: La imagen de comparación C y el umbral t

- 1: **for** cada píxel en I_1 **do**
 - 2: Determinar su vecindario en I_1 y el correspondiente en I_2
 - 3: Usar una función de semejanza de matrices para comparar los vecindarios
 - 4: Fijar el valor del píxel de C en esa posición con el resultado dado por la función de semejanza de matrices
 - 5: **end for**
 - 6: Aplicar el algoritmo de Otsu a C para obtener el umbral t
-

VII. DETECCIÓN DE CAMBIOS Y MOVIMIENTO EN VÍDEO

En esta sección mostramos cómo puede ser utilizado el algoritmo de la sección anterior para detectar objetos en movimiento en un vídeo. El método consiste en comparar cada fotograma de un vídeo con un fotograma en el que el objeto a detectar no aparece (o no se mueve). Como ejemplo ilustrativo, en este trabajo utilizamos de fotograma de referencia el primero del vídeo. De esta forma, comparando cada fotograma con el señalado, logramos tantas imágenes de comparación como fotogramas tiene el vídeo. Es decir, obtenemos un nuevo vídeo en el que el objeto en movimiento es separado del fondo.

Nótese que es posible que en algún (incluso en muchos) fotogramas de un vídeo, el objeto a detectar no aparezca y no haya movimiento alguno. En estos casos, el algoritmo de Otsu nos dará un umbral muy cercano a 255 (máximo), que no será significativo. Por esta razón, en este ejemplo modificamos el algoritmo para solo tener en cuenta los umbrales que indican que ha habido un cambio significativo en la imagen. Consideramos que ha habido un cambio significativo cuando el umbral que obtenemos segmenta la imagen en dos zonas que contienen al menos el 20% de las posibles intensidades. Es decir, si el umbral $t \geq 204$, consideramos que no ha habido cambios significativos y no segmentamos la imagen. Hay que tener en cuenta que escogemos este parámetro con fines ilustrativos, en una aplicación real requiere ser optimizado.

Utilizamos como ejemplo un fragmento de vídeo de la categoría básica de una base de datos de detección de cambios¹, que se describe en [20]. Al tratarse de vídeos a color, al extraer los fotogramas los transformamos a escala de grises y la función de semejanza de matrices que utilizamos para este ejemplo es la generada por el par (H, β) , con $H = \min$ y $\beta(x, y) = 1 - |x - y|$.

¹www.changedetection.net

El vídeo de este ejemplo proviene de una cámara fija en un escenario exterior que graba a viandantes en la calle. En la primera fila de la Figura 1 enseñamos cuatro fotogramas del vídeo original en las que se vislumbran dos personas. La segunda fila muestra los resultados de comparar cada fotograma con el fotograma de referencia (Figura 2), donde no hay ningún viandante. En la tercera fila observamos el resultado de aplicar el algoritmo de Otsu para segmentar la imagen y separar las personas en movimiento del fondo. La cuarta fila muestra la segmentación ideal, etiquetada por humanos, que podemos encontrar en la base de datos.

Recalamos que el objetivo de este trabajo es presentar un algoritmo para comparar imágenes que se basa en el concepto de función de semejanza de matrices. El ejemplo de detección de cambios en vídeo es meramente ilustrativo, de ahí que no evaluemos numéricamente los resultados ni comparemos el método con otros en la literatura.



Figura 2. Primer fotograma del vídeo, fotograma de referencia para llevar a cabo la comparación.

VIII. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos estudiado la clase de funciones de semejanza de matrices (*matrix resemblance functions*). Hemos definido el concepto y hemos discutido varios métodos de construcción, primero estudiando la forma de generar estas funciones partiendo de otras de las mismas características y luego apoyándonos en los conceptos de funciones de equivalencia restringida y de grado de inclusión. Además, hemos mostrado varias propiedades de esta clase de funciones que justifican su uso en un algoritmo de comparación de imagen. En la última parte del trabajo, hemos expuesto dicho algoritmo y hemos ilustrado mediante un ejemplo una posible aplicación para detectar movimiento en vídeo.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado por el servicio de investigación de la Universidad Pública de Navarra y los proyectos APVV-14-0013 y TIN2016-77356-P (AEI/FEDER, UE).

REFERENCIAS

- [1] R. Moreton and J. Morley, "Investigation into the use of photoanthropometry in facial image comparison," *Forensic Science International*, vol. 212, no. 1, pp. 231 – 237, 2011.
- [2] M. R. Stevens and J. R. Beveridge, "Image comparison techniques in the context of scene refinement," in *Pattern Recognition, 2000. Proceedings. 15th International Conference on*, vol. 1. IEEE, 2000, pp. 685–688.
- [3] H. Rau and C.-H. Wu, "Automatic optical inspection for detecting defects on printed circuit board inner layers," *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, vol. 25, no. 9, pp. 940–946, 2005.

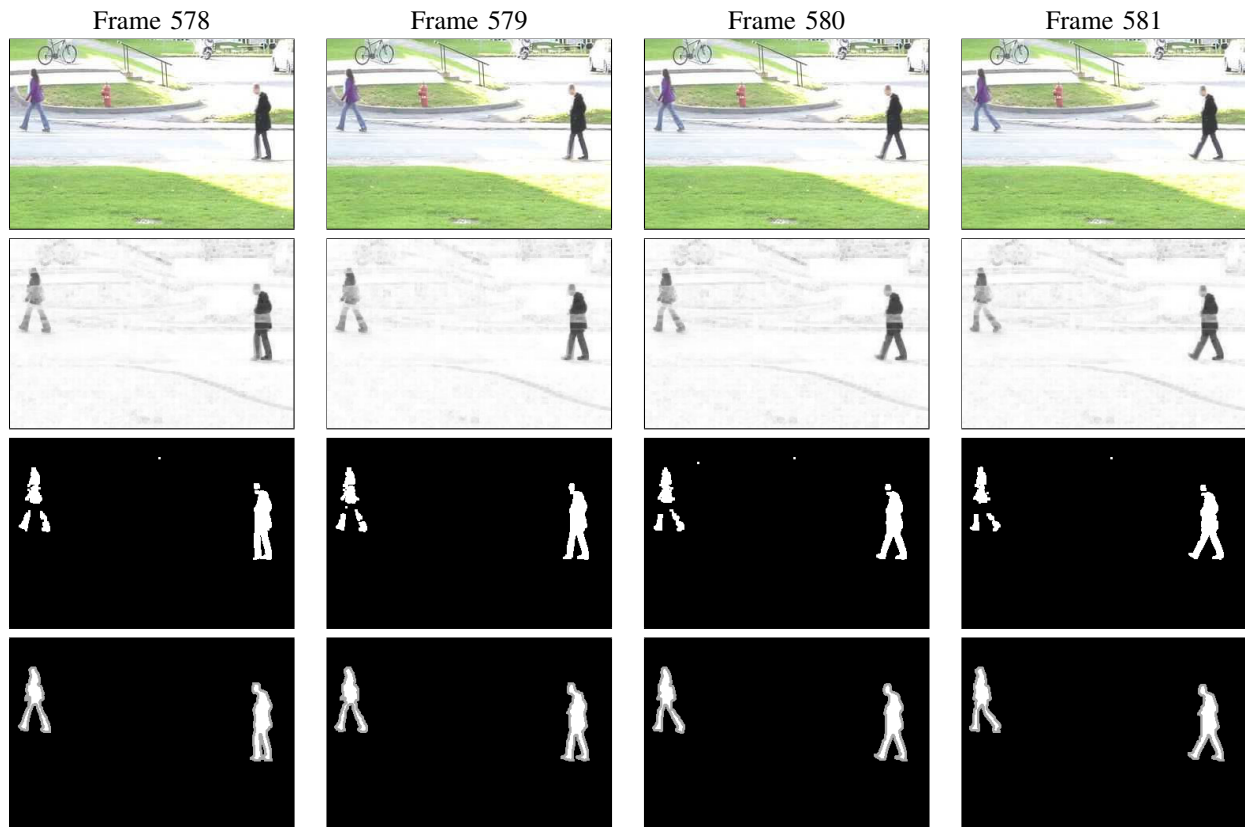


Figura 1. *Primera fila:* Fotogramas originales del vídeo. *Segunda fila:* Resultados de comparar los fotogramas del vídeo con el fotograma de referencia. *Tercera fila:* Resultado de aplicar el algoritmo de umbralización de Otsu. *Cuarta fila:* Imágenes de referencia etiquetadas por humanos.

- [4] H. Bustince, M. Pagola, and E. Barrenechea, "Construction of fuzzy indices from fuzzy DI-subsethood measures: Application to the global comparison of images," *Information Sciences*, vol. 177, no. 3, pp. 906 – 929, 2007.
- [5] D. V. der Weken, M. Nachtegael, and E. E. Kerre, "Using similarity measures and homogeneity for the comparison of images," *Image and Vision Computing*, vol. 22, no. 9, pp. 695 – 702, 2004.
- [6] M. Sesma-Sara, L. De Miguel, M. Pagola, A. Burusco, R. Mesiar, and H. Bustince, "New measures for comparing matrices and their application to image processing," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 61, pp. 498 – 520, 2018.
- [7] H. Bustince, E. Barrenechea, and M. Pagola, "Restricted equivalence functions," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 157, no. 17, pp. 2333 – 2346, 2006.
- [8] D. Sinha and E. R. Dougherty, "Fuzzification of set inclusion: Theory and applications," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 55, no. 1, pp. 15 – 42, 1993.
- [9] H. Bustince, "Indicator of inclusion grade for interval-valued fuzzy sets. Application to approximate reasoning based on interval-valued fuzzy sets," *International Journal of Approximate Reasoning*, vol. 23, no. 3, pp. 137 – 209, 2000.
- [10] H. Bustince, E. Barrenechea, M. Pagola, and F. Soria, "Weak fuzzy S-subsethood measures: Overlap Index," *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, vol. 14, no. 05, pp. 537–560, 2006.
- [11] H. Bustince, V. Mohedano, E. Barrenechea, and M. Pagola, "Definition and construction of fuzzy DI-subsethood measures," *Information Sciences*, vol. 176, no. 21, pp. 3190 – 3231, 2006.
- [12] L. M. Kitainik, *Fuzzy Inclusions and Fuzzy Dichotomous Decision Procedures*. Dordrecht: Springer Netherlands, 1987, pp. 154 – 170.
- [13] V. R. Young, "Fuzzy subsethood," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 77, no. 3, pp. 371 – 384, 1996.
- [14] G. Beliakov, H. Bustince, and T. Calvo, *A Practical Guide to Averaging Functions*, ser. Studies in Fuzziness and Soft Computing. Springer International Publishing, 2016.
- [15] H. Bustince, J. Montero, E. Barrenechea, and M. Pagola, "Semiautoduality in a restricted family of aggregation operators," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 158, no. 12, pp. 1360 – 1377, 2007.
- [16] G. Beliakov, H. Bustince, and D. Paternain, "Image reduction using means on discrete product lattices," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 21, no. 3, pp. 1070–1083, 2012.
- [17] D. Paternain, J. Fernández, H. Bustince, R. Mesiar, and G. Beliakov, "Construction of image reduction operators using averaging aggregation functions," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 261, pp. 87–111, 2015.
- [18] A. Jurio, H. Bustince, M. Pagola, A. Pradera, and R. R. Yager, "Some properties of overlap and grouping functions and their application to image thresholding," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 229, pp. 69–90, 2013.
- [19] N. Otsu, "A threshold selection method from gray-level histograms," *IEEE transactions on systems, man, and cybernetics*, vol. 9, no. 1, pp. 62–66, 1979.
- [20] N. Goyette, P.-M. Jodoin, F. Porikli, J. Konrad, and P. Ishwar, "Change-detection. net: A new change detection benchmark dataset," in *Computer Vision and Pattern Recognition Workshops (CVPRW)*, 2012 IEEE Computer Society Conference on. IEEE, 2012, pp. 1–8.