



# Condiciones de monotonía direccional: interpretación geométrica

1<sup>st</sup> Laura De Miguel

*Departamento de Estadística, Informática y Matemáticas*  
*Universidad Pública de Navarra*  
Pamplona, Spain  
laura.demiguel@unavarra.es

2<sup>nd</sup> Mikel Sesma-Sara

*Departamento de Estadística, Informática y Matemáticas*  
*Universidad Pública de Navarra*  
Pamplona, Spain  
mikel.sesma@unavarra.es

3<sup>rd</sup> Antonio Roldán

*Departamento de Didáctica de la Matemática*  
*Universidad de Granada*  
Granada, Spain  
aroldan@ugr.es

4<sup>th</sup> Julio Lafuente,

*Departamento de Estadística, Informática y Matemáticas*  
*Universidad Pública de Navarra*  
Pamplona, Spain  
lafuente@unavarra.es

5<sup>th</sup> Radko Mesiar

*Department of Mathematics and Descriptive Geometry*  
*Slovak University of Technology in Bratislava*  
Bratislava, Slovak Republic  
mesiar@math.sk

6<sup>th</sup> Humberto Bustince

*Departamento de Estadística, Informática y Matemáticas*  
*Universidad Pública de Navarra*  
Pamplona, Spain  
bustince@unavarra.es

**Abstract**—En los últimos años ha habido un gran interés en estudiar condiciones de monotonía menos restrictivas para construir nuevas familias de funciones de fusión de datos. Varias de estas condiciones son la monotonía débil, la monotonía direccional, la monotonía direccional ordenada, y la monotonía direccional ordenada reforzada. En este trabajo presentamos algunos resultados sobre las monotonías anteriores desde el punto de vista de la geometría en dos dimensiones.

**Index Terms**—Funciones de agregación, condiciones de monotonía, geometría bidimensional

## I. INTRODUCCIÓN

La cantidad de aparatos inteligentes y sensores que nos rodea ha crecido exponencialmente en los últimos años lo que conlleva que cada vez tenemos mayor volumen de datos de todo tipo y naturaleza. Debido al prácticamente inmanejable volumen de datos, la necesidad de encontrar operadores apropiados para fusionar los datos de acuerdo a la aplicación considerada es más importante cada día.

Desde sus inicios, las funciones de agregación han jugado un papel crucial en varias y diversas aplicaciones [1]–[4]. Además, dependiendo del tipo de propiedades que se impongan a las funciones de agregación (véase [5] para más información), distintas clases de funciones han sido definidas en la literatura: t-normas/t-conormas [6], uninormas [7] o funciones de solapamiento (*overlap functions*) [8], entre otras.

Este trabajo ha sido financiado por el Servicio de Investigación de la Universidad Pública de Navarra y por el proyecto TIN2016-77356-P del MINECO, AEI/FEDER, UE y por el proyecto APVV-14-0013.

La condición de monotonía impuesta a las funciones de agregación juega un papel muy importante en aplicaciones como la toma de decisión donde el aumento de un valor (que significa que un criterio o una alternativa es mejor) no debe nunca implicar un descenso de la puntuación final o utilidad. Sin embargo, en otro tipo de aplicaciones, en especial en áreas donde es frecuente la aparición de *outliers* o datos afectados por diversos ruidos, la monotonía impuesta en cada argumento es un inconveniente en vez de una ventaja. Esto demuestra, que para algunos casos particulares de aplicación, la condición de monotonía que satisfacen las funciones de agregación, es decir, el crecimiento en cada argumento de la función puede ser demasiado restrictiva y a veces no es necesario que las funciones cumplan una condición tan fuerte para dar unos buenos resultados.

Teniendo en cuenta todas las consideraciones anteriores sobre las funciones de agregación, en la literatura reciente, encontramos diversos esfuerzos de definir y estudiar diversas condiciones de monotonía menos restrictivas. La monotonía débil [9], la monotonía direccional [10], la monotonía direccional ordenada [11] y la monotonía direccional ordenada reforzada son algunos ejemplos de nuevas condiciones de monotonía que generan nuevas clases de operadores de fusión de datos. Estas nuevas nociones de monotonía han sido aplicados en diversas aplicaciones como la clasificación o procesamiento de imagen. Por ejemplo, funciones de pre-agregación [12], que solo satisfacen monotonías direccionales han demostrado mejorar los resultados en algunos problemas de clasificación [13], mientras que las monotonías or-

denadas direccionales han demostrado mejorar los resultados en detección de bordes [11], [14] y extracción de características [15].

Todos los trabajos en los que se introducen las distintas nociones de monotonía trabajan estos conceptos desde un punto de vista formal dentro del análisis matemático. En este trabajo, con el propósito de conseguir una mejor comprensión de las distintas condiciones, así como sus diferencias nos centramos en la interpretación geométrica de las distintas condiciones de monotonía introducidas en la literatura reciente [9]–[11], [16]. Para ello, nos centramos en el caso de las funciones 2-dimensionales, cuyo conjunto dominio es el  $[0, 1]^2$  (representable en el plano). Las ventajas de esta aproximación son claras, ya que nos permite descubrir gráficamente el comportamiento de cada noción de monotonía descrita en los trabajos anteriores.

El artículo está organizado como sigue. En la Sección II, recordamos las diferentes nociones de monotonía (restringidas al caso 2-dimensional) a la vez que fijamos algunas notaciones. En la Sección III, estudiamos la interpretación geométrica de las distintas nociones centrándonos en la monotonía direccional ordenada y monotonía direccional ordenada reforzada, probando algunos resultados sobre el comportamiento de estas funciones en el caso 2-dimensional. En la Sección IV, acabamos con algunas conclusiones y trabajo a futuro.

## II. CONDICIONES DE MONOTONÍA

En este trabajo nos centramos en la representación geométrica de algunas nociones de monotonía definidas en la literatura reciente. Por claridad y sencillez de los resultados nos restringimos al caso 2-dimensional, pero es importante resaltar que las definiciones originales, que podemos encontrar en los trabajos [9]–[11], [16] están introducidas para el caso  $n$ -dimensional.

Consideramos vectores  $\vec{r} = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$  y puntos en el plano  $x = (x_1, x_2) \in [0, 1]^2$  ordenados según el orden parcial heredado de  $\mathbb{R}^2$  que viene dado por  $x = (x_1, x_2) \leq y = (y_1, y_2)$  si y solo si  $x_1 \leq x_2$  y  $y_1 \leq y_2$ . Sea  $S = \{\sigma_1 = (1, 2), \sigma_2 = (2, 1)\}$  el conjunto de permutaciones en dos dimensiones. Dados los elementos  $x \in [0, 1]^2$  y  $\vec{r} \in \mathbb{R}^2$ , el elemento  $x_{\sigma_i}$  representa el punto en el plano ordenado según la permutación  $x_{\sigma_i} = (x_{\sigma_i(1)}, x_{\sigma_i(2)})$  mientras que  $\vec{r}_{\sigma_i}$  representa el vector ordenado  $\vec{r}_{\sigma_i} = (r_{\sigma_i(1)}, r_{\sigma_i(2)})$ .

Las funciones de agregación son una clase de funciones de fusión a las que se les impone la condición de monotonía con respecto a cada argumento así como condiciones frontera en el 0 y en el 1. La definición de las funciones de agregación 2-dimensionales es la siguiente.

*Definición 2.1:* ([17], [18]) Una función  $A : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  se llama una función de agregación si satisface la siguientes propiedades:

- $A(0, 0) = 0$
- $A(1, 1) = 1$
- $A(x_1, x_2) \leq A(y_1, y_2)$  para todo par de puntos  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in [0, 1]^2$  tales que  $x_1 \leq y_1$  y  $x_2 \leq y_2$ .

Aunque las agregaciones han demostrado ser muy útiles en diversas aplicaciones, algunos operadores muy conocidos, como las medias Lehmer o la moda no cumplen las monotonía exigida a las funciones de agregación. Es por ello, que estudios recientes han intentado estudiar funciones de fusión con condiciones menos restrictivas para poder estudiar clases de funciones de fusión más generales. Algunas de estas condiciones menos restrictivas son la monotonía direccional, la monotonía direccional ordenada y la monotonía direccional ordenada reforzada. A continuación recordamos estas condiciones de monotonía para el caso de funciones 2-dimensionales.

*Definición 2.2:* ([9]): Una función  $F : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  se dice débilmente creciente si la siguiente desigualdad se satisface

$$F(x_1 + c, x_2 + c) \geq F(x_1, x_2)$$

para todo  $(x_1, x_2) \in [0, 1]^2$  y  $c \in [0, 1]$  tal que  $(x_1, x_2) + (c, c) \in [0, 1]^2$ .

*Definición 2.3* ([10]): Sea  $\vec{r} = (r_1, r_2)$  un vector real 2-dimensional distinto del nulo. Una función  $F : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  se dice  $\vec{r}$ -creciente si para todo punto  $(x_1, x_2) \in [0, 1]^2$  y para todo  $c > 0$  tales que  $(x_1 + cr_1, x_2 + cr_2) \in [0, 1]^2$  se cumple la siguiente condición

$$F(x_1 + cr_1, x_2 + cr_2) \geq F(x_1, x_2).$$

*Definición 2.4* ([11]): Sea  $\vec{r} = (r_1, r_2)$  un vector real 2-dimensional distinto del nulo. Una función  $F : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  se dice  $\vec{r}$ -creciente Ordenada Direccional (OD) si para todo  $(x_1, x_2) \in [0, 1]^2$ , y para cada permutación  $\sigma \in S$  tal que  $x_{\sigma(1)} \geq x_{\sigma(2)}$  y para cualquier  $c > 0$  que cumple

$$1 \geq x_{\sigma(1)} + cr_1 \geq x_{\sigma(2)} + cr_2 \geq 0, \quad (1)$$

se cumple que

$$F(x_1 + cr_{\sigma^{-1}(1)}, x_2 + cr_{\sigma^{-1}(2)}) \geq F(x_1, x_2).$$

*Definición 2.5* ([16]): Sea  $\vec{r} = (r_1, r_2)$  un vector real 2-dimensional distinto del nulo. Una función  $F : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  se dice  $\vec{r}$ -creciente ordenada direccional reforzada (SOD, del inglés *Strengthened Ordered Directional*) si para todo  $(x_1, x_2) \in [0, 1]^2$ , y para cada permutación  $\sigma \in S$  tal que  $x_{\sigma(1)} \geq x_{\sigma(2)}$  y para cualquier  $c > 0$  que cumple  $(x_{\sigma(1)} + cr_1, x_{\sigma(2)} + cr_2) \in [0, 1]^2$ , se satisface la siguiente inecuación

$$F(x_1 + cr_{\sigma^{-1}(1)}, x_2 + cr_{\sigma^{-1}(2)}) \geq F(x_1, x_2),$$

Si una función  $F$  es  $\vec{r}$ -creciente SOD, entonces  $F$  es también  $\vec{r}$ -creciente OD. El contrario no se cumple en general. Sin embargo, si el vector  $\vec{r}$  satisface  $r_1 \geq r_2$ , entonces ambas definiciones son equivalentes.

Nótese que por sencillez solo nos hemos referido a las condiciones de crecimiento, pero condiciones similares pueden ser introducidas para el decrecimiento de las funciones.

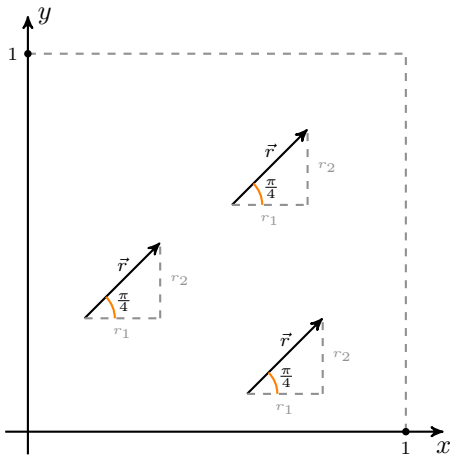


Fig. 1. Ejemplo de la dirección de una función débilmente creciente.

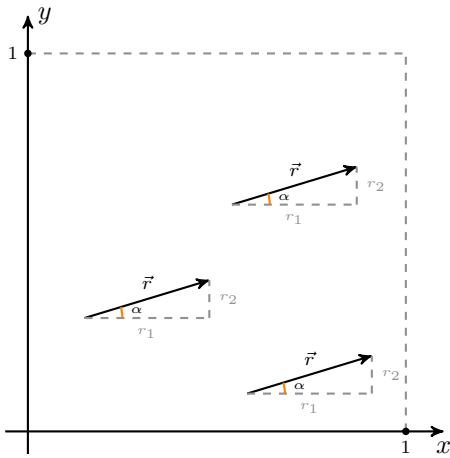


Fig. 2. Ejemplo de dirección de una función  $\vec{r}$ -creciente.

### III. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LAS CONDICIONES DE MONOTONÍA EN DOS DIMENSIONES

Una función débilmente creciente puede entenderse como una función que en cada punto del plano crece en la dirección  $(1,1)$ , es decir, crece a través de la recta que pasa por este punto en la dirección del vector  $(1,1)$  (véase Fig. 1). De manera similar, un función  $\vec{r} = (r_1, r_2)$ -creciente puede entenderse como una función que en cada punto del plano crece en la dirección  $(r_1, r_2)$ , es decir, crece a través de la recta que pasa por ese punto en la dirección del vector  $(r_1, r_2)$  (véase Fig. 2).

Tanto en el caso de las funciones débilmente crecientes como en el de las funciones  $\vec{r}$ -crecientes para un vector fijo  $\vec{r}$ , la dirección de la recta sobre la que crece está prefijada y es igual para todos los puntos del dominio. Por el contrario, la mayor diferencia entre las funciones anteriores y las funciones  $\vec{r}$ -crecientes OD y SOD se debe a que la dirección varía de una región a otra. En particular, si  $(x_1, x_2) \in [0, 1]^2$  y  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  es la permutación que cumple  $x_{\sigma(1)} \geq x_{\sigma(2)}$ , entonces la reordenación de las componentes del vector  $\vec{r}_{\sigma^{-1}}$  en las

Definiciones 2.4 y 2.5 significa que la primera componente del vector,  $r_1$ , afecta al mayor valor de  $x$ , mientras que  $r_2$  afecta al menor de los valores de  $x$ . Esto significa que diferentes direcciones son consideradas dependiendo de la permutación que ordene las componentes del punto  $x$ . Formalicemos esta idea.

Dado que estamos trabajando únicamente en el caso 2-dimensional, dado un punto  $x = (x_1, x_2) \in [0, 1]^2$  se satisface que  $x_1 \leq x_2$  o  $x_2 \leq x_1$ . Esto significa que podemos diferenciar dos regiones de direcciones distintas.

Denotemos  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  a los subespacios

$$\Omega_1 = \{(x_1, x_2) \in [0, 1]^2 \mid x_1 \geq x_2\} \quad (2)$$

and

$$\Omega_2 = \{(x_1, x_2) \in [0, 1]^2 \mid x_1 \leq x_2\}. \quad (3)$$

Así mismo, denotamos por  $\Delta$  a la diagonal del espacio, que está formada por todos los puntos del plano que pertenecen a los dos espacios, es decir

$$\Delta = \Omega_1 \cap \Omega_2 = \{(x_1, x_2) \in [0, 1]^2 \mid x_1 = x_2\}.$$

**Proposición 3.1:** Sea  $\vec{r} = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$  un vector 2-dimensional distinto del nulo. La función  $F: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  es  $\vec{r}$ -creciente SOD si y solo si

- para todo  $(x_1, x_2) \in \Omega_1$ ,  $F$  es  $(r_1, r_2)$ -creciente en  $(x_1, x_2)$ ;
- para todo  $(x_1, x_2) \in \Omega_2$ ,  $F$  es  $(r_2, r_1)$ -creciente en  $(x_1, x_2)$ .

Además, también se conocen los ángulos (con respecto al eje horizontal positivo) de las direcciones de crecimiento.

**Proposición 3.2:** Sea  $F: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  una función  $\vec{r}$ -creciente SOD para un vector fijo  $\vec{r} = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$  no nulo. Se cumple que

- para todo  $(x_1, x_2) \in \Omega_1$ , el ángulo de la recta (con respecto al eje horizontal positivo) a través de la cuál la función  $F$  crece en el punto  $(x_1, x_2)$  es el siguiente:
  - si  $r_1 \geq 0$ , entonces  $\alpha = \arctan(\frac{r_2}{r_1})$  (véase nota a pie de página <sup>1</sup>).
  - si  $r_1 < 0$ , entonces  $\alpha = \pi + \arctan(\frac{r_2}{r_1})$ .
- para todo  $(x_1, x_2) \in \Omega_2$ , el ángulo de la recta (con respecto al eje horizontal positivo) a través de la cuál la función  $F$  crece en el punto  $(x_1, x_2)$  es el siguiente:
  - si  $r_2 \geq 0$ , entonces  $\beta = \arctan(\frac{r_1}{r_2})$ ;
  - si  $r_2 < 0$ , entonces  $\beta = \pi + \arctan(\frac{r_1}{r_2})$ .

Además, es fácil comprobar que se cumple  $\beta + \alpha = \frac{\pi}{2}$ .

**Demostración:** Sea  $(x_1, x_2) \in \Omega_1$ . Esto significa que  $x_1 \geq x_2$  y, por lo tanto, la permutación identidad  $\sigma_1$ , dada por  $\sigma_1(1) = 1$  y  $\sigma_1(2) = 2$ , satisface que  $x_{\sigma_1(1)} \geq x_{\sigma_1(2)}$ . Entonces, la dirección de crecimiento en el punto  $x$  es  $\vec{r} = (r_1, r_2)$  y, por lo tanto, el ángulo con respecto al eje horizontal positivo es  $\alpha = \arctan(\frac{r_2}{r_1})$  para todo vector  $\vec{r}$  tal que  $r_1 \geq 0$  y  $\alpha = \pi + \arctan(\frac{r_2}{r_1})$  para todo vector  $\vec{r}$  tal que  $r_1 < 0$ . De manera análoga, sea  $(x_1, x_2) \in \Omega_2$ . Esto

<sup>1</sup>Por convenio consideramos  $\arctan \frac{a}{0} = \text{sign}(a) \frac{\pi}{2}$ .

significa que  $x_2 \geq x_1$  y, por lo tanto, la permutación  $\sigma_2$ , dada por  $\sigma_2(1) = 2$  y  $\sigma_2(2) = 1$ , satisface que  $x_{\sigma_2(1)} \geq x_{\sigma_2(2)}$ . Entonces, la dirección de crecimiento en el punto  $x$  es  $\vec{r} = (r_{\sigma_2^{-1}(1)}, r_{\sigma_2^{-1}(2)}) = (r_2, r_1)$  y, por lo tanto, el ángulo con respecto al eje horizontal positivo es  $\beta = \arctan(\frac{r_1}{r_2})$  para todo vector  $\vec{r}$  tal que  $r_2 \geq 0$  y  $\beta = \pi + \arctan(\frac{r_1}{r_2})$  para todo vector  $\vec{r}$  tal que  $r_2 < 0$ .

La igualdad  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$  se cumple por el hecho de que para  $a \neq 0$ , se cumple  $\arctan(\frac{1}{a}) = \text{sign}(a)\frac{\pi}{2} - \arctan(a)$ . Nótese que algunas veces, el valor de la suma real es  $\frac{5\pi}{2}$ , pero este es el mismo ángulo que  $\frac{\pi}{2}$ . ■

*Nota 1:* Nótese que debido a que los elementos de la diagonal  $\Delta$  pertenecen tanto a  $\Omega_1$  como a  $\Omega_2$  ambas direcciones de crecimiento son impuestas.

Resultados similares pueden ser formulados para el caso de las funciones  $\vec{r}$ -crecientes OD en los que se impone el crecimiento solo al segmento formado de puntos de la recta que pertenecen al mismo conjunto  $\Omega_i$  que el punto inicial  $x$ .

*Corolario 3.3:* Sea  $\vec{0} \neq \vec{r} \in \mathbb{R}^2$ . Una función  $F: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  es  $\vec{r}$ -creciente OD si y solo si

- para todo  $(x_1, x_2) \in \Omega_1$ ,  $F$  es  $(r_1, r_2)$ -creciente en  $(x_1, x_2)$  restringido al subconjunto  $\Omega_1$ ;
- para todo  $(x_1, x_2) \in \Omega_2$ ,  $F$  es  $(r_2, r_1)$ -creciente en  $(x_1, x_2)$  restringido al subconjunto  $\Omega_2$ .

Además, los ángulos de las rectas de crecimiento son los mismos que el caso de las funciones  $\vec{r}$ -crecientes SOD.

En el trabajo [16] puede encontrarse el siguiente resultado sobre la monotonía  $\vec{r}$ -creciente SOD.

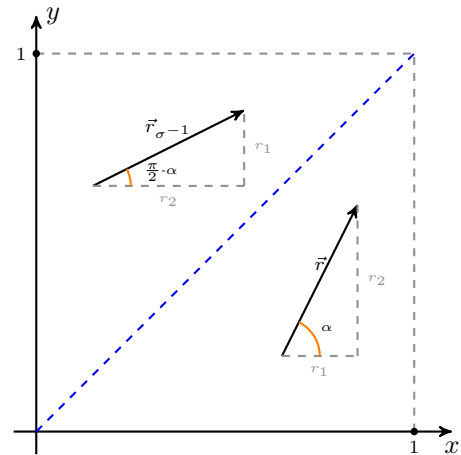
*Teorema 3.4:* (Teorema 6.5 de [16]) Sean  $\vec{0} \neq \vec{r}, \vec{s} \in \mathbb{R}^n$  y  $a, b \in \mathbb{R}^+$ . Supongamos que  $x = (x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$ ,  $c > 0$  y  $\sigma$  es una permutación que ordena los elementos de  $x$ . Si  $x_{\sigma(1)} \geq \dots \geq x_{\sigma(n)}$  y  $x_\sigma + c(a\vec{r} + b\vec{s}) \in [0, 1]^n$ , entonces o  $x_\sigma + ca\vec{r} \in [0, 1]^n$  o  $x_\sigma + cb\vec{s} \in [0, 1]^n$ . Por lo tanto, si una función es  $\vec{r}$ - y  $\vec{s}$ -creciente SOD, entonces es  $(a\vec{r} + b\vec{s})$ -creciente SOD.

Nótese que lo mismo puede probarse para funciones OD crecientes [11]. Estudiemos ahora el caso particular de los elementos de la diagonal. Recordemos, que como se ha mencionado anteriormente en la Nota 1, los elementos  $\bar{x} = (x, x) \in \Delta$  satisfacen que  $\bar{x} \in \Omega_1$  y  $\bar{x} \in \Omega_2$ , simultáneamente. Esto significa que los elementos de la diagonal en las funciones  $\vec{r}$ -crecientes SOD crecen en dos direcciones distintas.

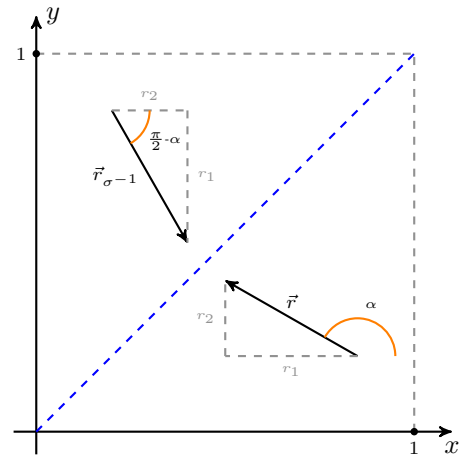
*Corolario 3.5:* Sea  $\vec{0} \neq \vec{r} = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$  y sea  $F$  una función  $\vec{r}$ -creciente SOD. Para cada elemento de la diagonal  $\bar{x} \in \Delta$ , se tiene que  $F$  es  $(r_1, r_2)$ - y  $(r_2, r_1)$ -creciente SOD en  $\bar{x}$ .

Sea  $F$  una función  $\vec{r} = (r_1, r_2)$ -creciente SOD para un vector  $\vec{r}$  satisfaciendo  $r_1 \neq -r_2$ . Por el Corolario 3.5, se tiene que  $F$  es una función  $(r_1, r_2)$ - y  $(r_2, r_1)$ -creciente en  $\bar{x}$ , para todo elemento  $\bar{x} \in \Delta$ . Entonces, debido al Teorema 3.4,  $F$  es creciente en  $\bar{x}$  a través de cualquier dirección entre  $(r_1, r_2)$  y  $(r_2, r_1)$  (véase Fig. 4(a)).

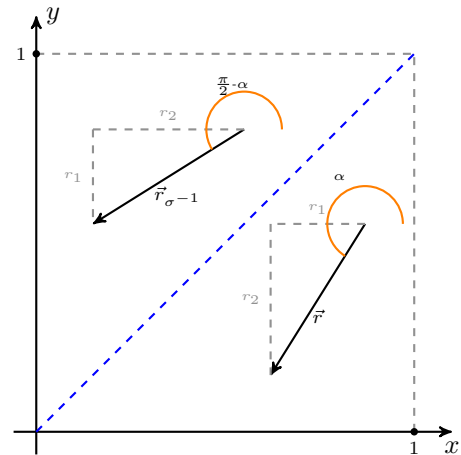
Dos casos extremos de direcciones son los vectores  $\vec{r} = (-r, r)$  cuyo ángulo es  $\alpha = \frac{3\pi}{4}$  y  $\vec{r} = (r, -r)$  cuyo ángulo es  $\alpha = \frac{7\pi}{8}$  (o  $-\frac{\pi}{4}$ ).



a) Vector  $\vec{r}$  con  $r_1 > 0$  y  $r_2 > 0$ .



b) Vector  $\vec{r}$  con  $r_1 < 0$  y  $r_2 > 0$ .



c) Vector  $\vec{r}$  con  $r_1 < 0$  y  $r_2 < 0$ .

Fig. 3. Ejemplos de algunas direcciones  $(r_1, r_2)$  para funciones crecientes OD y SOD: caso a)  $r_1 > 0$  y  $r_2 > 0$ ; b)  $r_1 > 0$  y  $r_2 < 0$  y c)  $r_1 < 0$  y  $r_2 < 0$ .



**Proposición 3.6:** Sea  $r > 0$  y  $F$  una función  $(r, -r)$ -creciente SOD. Para todo  $(x_1, x_2) \in [0, 1]^2$ , se cumple que  $F(x_m, x_m) \leq F(x_1, x_2)$ , donde  $x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}$ .

**Demostración:** Sea  $F$  una función  $(r, -r)$ -creciente SOD,  $(x_1, x_2) \in [0, 1]^2$  y  $x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}$ . Como consecuencia del Corolario 3.5,  $F$  es  $(r, -r)$  y  $(-r, r)$ -creciente en  $\bar{x}_m = (x_m, x_m) \in \Delta$ . Distinguimos dos posibles casos dependiendo del punto  $x = (x_1, x_2)$ .

- Caso 1: Sea  $(x_1, x_2) \in \Omega_1$ . Dado  $c = \frac{x_1 - x_2}{2r} \geq 0$ , se cumple que  $(x_m, x_m) + c(r, -r) = (x_1, x_2)$  y, por lo tanto,  $F(x_m, x_m) \leq F(x_1, x_2)$ .
- Caso 2: Sea  $(x_1, x_2) \in \Omega_2$ . Dado  $c = \frac{x_2 - x_1}{2r} \geq 0$ , se cumple que  $(x_m, x_m) + c(-r, r) = (x_1, x_2)$  y, por lo tanto,  $F(x_m, x_m) \leq F(x_1, x_2)$ .

Como consecuencia de la Proposición anterior se puede concluir que si una función es  $(r, -r)$ -increasing SOD, para algún  $r > 0$ , se cumple que  $F(\bar{x}) \leq F(y_1, y_2)$  para todo punto satisfaciendo  $y_1 + y_2 = 2x$ , es decir, el valor en el punto de la diagonal es mínimo con respecto a todos los demás puntos de la recta que pasa por el punto con dirección  $(-r, r)$  (véanse líneas verdes en la Fig. 4(b)).

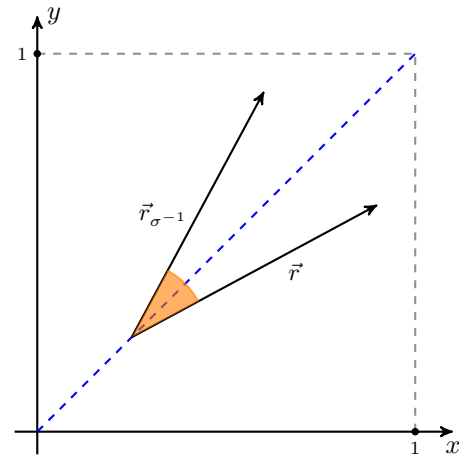
**Proposición 3.7:** Sea  $r > 0$  y  $F$  una función  $(-r, r)$ -creciente SOD. Para todo  $(x_1, x_2) \in [0, 1]^2$ , se cumple que  $F(x_m, x_m) = F(x_1, x_2)$ , donde  $x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}$ .

**Demostración:** Sea  $F$  una función  $(-r, r)$ -creciente SOD,  $(x_1, x_2) \in [0, 1]^2$  y  $x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}$ . Como consecuencia del Corolario 3.5,  $F$  es  $(-r, r)$  y  $(r, -r)$ -creciente en  $\bar{x}_m = (x_m, x_m) \in \Delta$ . Distinguimos dos posibles casos dependiendo del punto  $x = (x_1, x_2)$ .

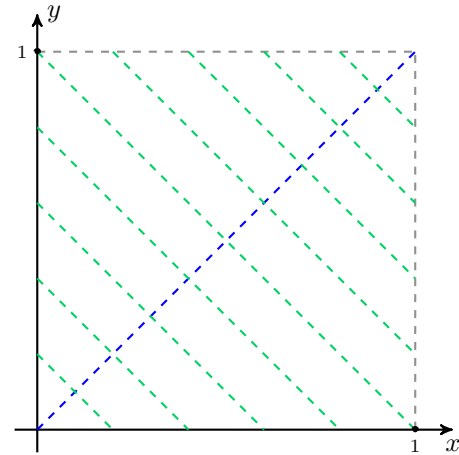
- Caso 1: Sea  $(x_1, x_2) \in \Omega_1$ . Dado  $c = \frac{x_1 - x_2}{2r} \geq 0$ , se cumple  $(x_1, x_2) + c(-r, r) = (x_m, x_m)$ . Como  $F$  es  $(-r, r)$ -creciente en  $(x_1, x_2)$ , se tiene que  $F(x_1, x_2) \leq F(x_m, x_m)$ . De manera similar, se tiene que  $(x_m, x_m) + c(r, -r) = (x_1, x_2)$ . Como  $F$  es también  $(r, -r)$ -creciente en  $(x_m, x_m)$ , se cumple que  $F(x_m, x_m) \leq F(x_1, x_2)$ . Por lo tanto,  $F(x_1, x_2) = F(x_m, x_m)$ .
- Caso 2: Sea  $(x_1, x_2) \in \Omega_2$ . Dado  $c = \frac{x_2 - x_1}{2r} \geq 0$ , se cumple que  $(x_1, x_2) + c(r, -r) = (x_m, x_m)$ . Como  $F$  es  $(r, -r)$ -creciente en  $(x_1, x_2)$  (nótese que en  $\Omega_2$ ,  $\sigma_2(1) = 2$  y  $\sigma_2(2) = 1$ ), y se tiene que  $F(x_1, x_2) \leq F(x_m, x_m)$ . De manera similar, se tiene que  $(x_m, x_m) + c(-r, r) = (x_1, x_2)$ . Como  $F$  es también  $(-r, r)$ -creciente en  $(x_m, x_m)$ , se cumple que  $F(x_m, x_m) \leq F(x_1, x_2)$ . Por lo tanto,  $F(x_1, x_2) = F(x_m, x_m)$ .

#### IV. CONCLUSIONES

En la literatura reciente encontramos diversas nociones de monotonía menos restrictivas que la monotonía en cada variable que se impone a la funciones de agregación. En este trabajo, hemos analizado la interpretación geométrica de estas monotonías. Se ha estudiado la diferencia entre monotonía direccional ordenada y monotonía direccional ordenada reforzada, viendo que la principal diferencia es que



a) Direcciones de crecimiento en los puntos de la diagonal de una función  $\vec{r}$ -creciente SOD.



b) Líneas paralelas con dirección  $(-r, r)$ .

Fig. 4. Representación gráfica del comportamiento de las funciones  $\vec{r} = (r_1, r_2)$ -creciente SOD con  $r_1 = -r_2$ .

la monotonía direccional ordenada restringe sus condiciones de monotonía al subespacio  $\Omega$  en el que se encuentra. El análisis geométrico llevado a cabo para el caso 2-dimensional, también nos ha permitido deducir algunas consecuencias del comportamiento de las funciones direccionalmente ordenadas reforzadas cuando el vector de las direcciones  $\vec{r} = (r_1, r_2)$  satisface que  $r_1 = -r_2$ .

Como trabajo a futuro, destaca la posibilidad de realizar un estudio más general de la interpretación geométrica para el caso  $n$ -dimensional. En este caso, se perdería la posibilidad de dibujar el dominio en el plano, pero existe una mayor cantidad de permutaciones posibles, que darían un mayor número de regiones donde las direcciones varían.

#### REFERENCIAS

[1] G. Beliakov, S. James, and D. G. Nimmo, "Using aggregation functions to model human judgements of species diversity," *Information Sciences*, vol. 306, pp. 21–33, 2015.

[2] U. Bentkowska, "Aggregation of diverse types of fuzzy orders for decision making problems," *Information Sciences*, vol. 424, pp. 317–336, 2018.



- [3] D. Paternain, H. Bustince, M. Pagola, P. Sussner, A. Kolesárová, and R. Mesiar, “Capacities and overlap indexes with an application in fuzzy rule-based classification systems,” *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 305, pp. 70–94, 2016.
- [4] J. L. García-Lapresta and R. A. M. Pereira, “The dual decomposition of aggregation functions and its application in welfare economics,” *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 281, pp. 188–197, 2015.
- [5] M. Grabisch, J.-L. Marichal, R. Mesiar, and E. Pap, “Aggregation functions: Construction methods, conjunctive, disjunctive and mixed classes,” *Information Sciences*, vol. 181, no. 1, pp. 23–43, 2011.
- [6] E. P. Klement, R. Mesiar, and E. Pap, *Triangular Norms*. Springer, Dordrecht, 2000.
- [7] J. Fodor and B. D. Baets, *Studies in Fuzziness and Soft Computing, vol 215*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2007, ch. Uninorm Basics, pp. 49–64.
- [8] H. Bustince, J. Fernandez, R. Mesiar, J. Montero, and R. Orduna, “Overlap functions,” *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, vol. 72, no. 3-4, pp. 1488–1499, 2010.
- [9] T. Wilkin and G. Beliakov, “Weakly monotonic averaging functions,” *International Journal of Intelligent Systems*, vol. 30, no. 2, pp. 144–169, 2015.
- [10] H. Bustince, J. Fernandez, A. Kolesárová, and R. Mesiar, “Directional monotonicity of fusion functions,” *European Journal of Operational Research*, vol. 244, no. 1, pp. 300–308, 2015.
- [11] H. Bustince, E. Barrenechea, M. Sesma-Sara, J. Lafuente, G. Dimuro, R. Mesiar, and A. Kolesárová, “Ordered directionally monotone functions. Justification and application,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems (In Press)*.
- [12] G. Lucca, J. A. Sanz, G. P. Dimuro, B. Bedregal, R. Mesiar, A. Kolesárová, and H. Bustince, “Preaggregation functions: Construction and an application,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 24, no. 2, pp. 260–272, 2016.
- [13] G. Lucca, J. A. Sanz, G. P. Dimuro, B. Bedregal, H. Bustince, and R. Mesiar, “CF-integrals: a new family of pre-aggregation functions with application to fuzzy rule-based classification systems,” *Information Sciences*, vol. 435, pp. 94–110, 2017.
- [14] M. Sesma-Sara, H. Bustince, E. Barrenechea, J. Lafuente, A. Kolesárová, and R. Mesiar, “Edge detection based on ordered directionally monotone functions,” in *Advances in Fuzzy Logic and Technology 2017*. Springer, 2017, pp. 301–307.
- [15] C. Marco-Detchart, C. Lopez-Molina, J. Fernandez, M. Pagola, and H. Bustince, *Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems. Theory and Foundations. IPMU 2018*. Springer, 2018, ch. Image Feature Extraction Using OD-Monotone Functions.
- [16] M. Sesma-Sara, J. Lafuente, A. F. Roldán-López-de-Hierro, R. Mesiar, and H. Bustince, “Strengthened ordered directionally monotone functions. Links between the different notions of monotonicity,” *Submitted to Fuzzy Sets and Systems*.
- [17] M. Grabisch, J. Marichal, R. Mesiar, and E. Pap, *Aggregation functions*. Cambridge University Press, 2009.
- [18] G. Beliakov, H. Bustince, and T. Calvo, *A Practical Guide to Averaging Functions*, ser. Studies in Fuzziness and Soft Computing. Springer International Publishing, 2016.