# Modus Ponens generalizado para $(U, N)$-implicaciones

Margarita Mas, Daniel Ruiz-Aguilera, Joan Torrens
*Soft Computing, Procesamiento de Imágenes y Agregación (SCOPIA)*
*Departament de Ciències Matemàtiques i Informàtica*
*Universitat de les Illes Balears. 07122 Palma, España.*
*Institut d'Investigació Sanitària de les Illes Balears (IdISBa). 07010 Palma, España.*
mmg448@uib.es, daniel.ruiz@uib.es, jts224@uib.es

***Resumen*—El Modus Ponens resulta ser una propiedad esencial en los procesos de inferencia que se llevan a cabo tanto en el razonamiento aproximado como en el control borroso. De este modo es necesario que la conjunción y la implicación borrosa utilizadas en dichos procesos de inferencia verifiquen la desigualdad inherente a la propiedad del Modus Ponens. Habitualmente la conjunción borrosa se modeliza mediante una t-norma aunque, cada vez más, se sustituye la t-norma por una uninorma conjuntiva. En este trabajo se estudia cuándo las $(U, N)$-implicaciones verifican el Modus Ponens respecto de una uninorma conjuntiva $U$ en general, de forma similar a cómo se hizo para $RU$-implicaciones en [21], [22]. En la inecuación funcional derivada del Modus Ponens se ven involucradas dos uninormas diferentes y una negación borrosa dando lugar a diversas posibilidades. De esta manera, en esta comunicación se presenta solo un primer paso en este estudio ya que, dependiendo de las clases a las que pertenecen dichas uninormas, aparecen numerosos casos a estudiar.**

***Index Terms*—Función de implicación borrosa, $(U, N)$-implicación, Modus Ponens, t-norma, uninorma, negación natural asociada.**

## I. Introducción

Las funciones de implicación borrosas se utilizan habitualmente en el razonamiento aproximado y en el control borroso para modelizar los condicionales borrosos y también para realizar inferencias. Cuando se considera la regla composicional de inferencia de Zadeh, el Modus Ponens resulta ser esencial en el proceso. Al trasladar dicha regla de inferencia al ámbito borroso se obtiene la desigualdad funcional:

$$T(x, I(x, y)) \leq y \quad \text{para todos} \quad x, y \in [0, 1], \qquad (1)$$

donde $T$ es una t-norma continua e $I$ es una función de implicación borrosa.

Debido a la importancia del Modus Ponens, diversos investigadores han ido realizando un estudio exhaustivo de aquellas t-normas $T$ y funciones de implicación borrosas $I$ que verifican la ecuación (1) a lo largo de los años (véase por ejemplo [2], [4], [17], [20], [30]–[33]). Los principales resultados en este campo se han dado para implicaciones derivadas de t-normas y t-conormas. Así, las implicaciones residuadas y las $(S, N)$-implicaciones se analizaron en detalle en [2], [30], [31], mientras que las QL y D-implicaciones se investigaron en [32]. Una recopilación de estos resultados y una completación de los mismos se puede hallar en la sección 7.4 del libro [4].

Sin embargo, existen otros tipos de implicaciones a considerar (véase [3], [4], [24]). Entre estos otros tipos podemos destacar las implicaciones derivadas de funciones de agregación más generales que las t-normas y las t-conormas. En particular, las implicaciones derivadas de uninormas se han estudiado de manera exhaustiva (véase por ejemplo [1], [5], [9], [18], [26]–[28]). De hecho, el Modus Ponens ha sido analizado recientemente para dos tipos concretos de implicaciones derivadas de uninormas: las $RU$-implicaciones y las $(U, N)$-implicaciones (véase [17]).

Aunque las uninormas se introdujeron inicialmente en el ámbito de las funciones de agregación (véase [11], [34]), se han estudiado también como operadores lógicos debido al hecho de que son siempre conjuntivas o disyuntivas. Dada su estructura, las uninormas se pueden ver claramente como generalizaciones de las t-normas y t-conormas simultáneamente y, en este sentido, se ha comprobado ya su utilidad en muchos campos como son los sistemas expertos borrosos (véase [10]), las redes neuronales (véase [6]) y la lógica borrosa en general (véase [25] y las referencias allí citadas). En particular, las uninormas conjuntivas se utilizan cada vez más como conjunciones borrosas y, en este sentido, sustituir en el Modus Ponens la t-norma $T$ por una uninorma conjuntiva $U$ resulta natural.

Siguiendo en esta línea, el caso de sustituir la t-norma $T$ por una uninorma conjuntiva $U$, dando lugar al llamado $U$-Modus Ponens (o también $U$-condicionalidad), ha sido recientemente propuesto por los autores en [21], [22]. En estos trabajos se demuestra que la implicación considerada en el $U$-Modus Ponens tiene que verificar determinadas propiedades que son características de algunos tipos de implicaciones derivadas de uninormas: las $RU$-implicaciones y las $(U, N)$-implicaciones. En este sentido, el presente trabajo puede ser visto como una continuación de los artículos mencionados [21], [22] ya que, en estos artículos se investigó el $U$-Modus Ponens para el caso de las $RU$-implicaciones, mientras que en la presente comunicación hacemos lo mismo para el caso de las $(U, N)$-implicaciones.

El trabajo está organizado de la siguiente manera: tras la introducción, dedicamos la sección 2 a recordar algunos preliminares para lograr que el trabajo sea lo más autocontenido posible. La sección 3 está dedicada al Modus Ponens respecto de una uninorma $U$, incluyendo algunos resultados generales para $(U,N)$-implicaciones. Se demuestra en particular que la uninorma disyuntiva $U'$ utilizada para construir la $(U,N)$-implicación solo puede pertenecer a unas pocas clases de uninormas de entre las más usuales, a saber, las representables, las idempotentes y las continuas en $]0,1[^2$. Se realiza un estudio exhaustivo para el caso de uninormas representables mientras que, para los otros dos casos, se dan simplemente diversos ejemplos. Finalmente, el trabajo concluye con la sección 4 dedicada a establecer algunas conclusiones y trabajo futuro.

## II. Preliminares

Supondremos que el lector está familiarizado con los resultados básicos sobre t-normas, t-conormas y negaciones (para más detalles véase [14]). Supondremos también conocidos los resultados básicos sobre implicaciones (véase [4], [20]). A continuación recordaremos solo algunos conceptos sobre uninormas que utilizaremos a lo largo del trabajo. En cualquier caso, más detalles sobre uninormas y sus clases más estudiadas pueden hallarse en el reciente artículo recopilatorio [16].

*Definición 1:* Una *uninorma* es una aplicación $U : [0,1]^2 \to [0,1]$ asociativa, conmutativa, creciente en cada variable y tal que existe un elemento $e \in [0,1]$, llamado *elemento neutro*, tal que $U(e,x) = x$ para todo $x \in [0,1]$.

Evidentemente, una uninorma con elemento neutro $e = 1$ es una t-norma y una uninorma con elemento neutro $e = 0$ es una t-conorma. Para cualquier otro valor $e \in ]0,1[$, la operación se comporta como una t-norma en $[0,e]^2$, como una t-conorma en $[e,1]^2$ y toma valores entre el mínimo y el máximo en el conjunto $A(e)$ dado por

$$A(e) = [0,e[ \times ]e,1] \cup ]e,1] \times [0,e[.$$

Denotaremos de forma habitual una uninorma con elemento neutro $e$ y t-norma y t-conorma subyacente, $T$ y $S$ respectivamente, por $U \equiv \langle T,e,S \rangle$. Cualquier uninorma verifica que $U(0,1) \in \{0,1\}$ y cuando $U(1,0) = 0$ se dice que la uninorma $U$ es *conjuntiva*, mientras que cuando $U(1,0) = 1$ se dice que $U$ es *disyuntiva*. Recordemos aquí la estructura de tres de las clases más usadas de uninormas conjuntivas.

*Teorema 2:* ( [11]) Sea $U : [0,1]^2 \to [0,1]$ una uninorma con elemento neutro $e \in ]0,1[$.

(a) Si $U(0,1) = 0$, entonces la sección $x \mapsto U(x,1)$ es continua excepto en $x = e$ si y solo si $U$ viene dada por $U(x,y) =$

$$\begin{cases} eT\left(\frac{x}{e}, \frac{y}{e}\right) & \text{si } (x,y) \in [0,e]^2, \\ e + (1-e)S\left(\frac{x-e}{1-e}, \frac{y-e}{1-e}\right) & \text{si } (x,y) \in [e,1]^2, \\ \text{mín}(x,y) & \text{si } (x,y) \in A(e), \end{cases}$$

donde $T$ es una t-norma y $S$ es una t-conorma.

(b) Si $U(0,1) = 1$, entonces la sección $x \mapsto U(x,0)$ es continua excepto en $x = e$ si y solo si $U$ viene dada por la estructura anterior cambiando el mínimo por el máximo en $A(e)$.

Denotaremos por $\mathcal{U}_{\text{mín}}$ al conjunto de uninormas de la forma dada en (a) y por $\mathcal{U}_{\text{máx}}$ al conjunto de uninormas de la forma dada en (b). Asimismo, una uninorma de $\mathcal{U}_{\text{mín}}$ con t-norma subyacente $T$, t-conorma subyacente $S$ y elemento neutro $e$ la denotaremos por $U \equiv \langle T,e,S \rangle_{\text{mín}}$ y, de forma similar, a una uninorma de $\mathcal{U}_{\text{máx}}$ la denotaremos por $U \equiv \langle T,e,S \rangle_{\text{máx}}$.

Las uninormas idempotentes fueron analizadas primero en [7] y posteriormente caracterizadas en [8] para el caso de tener alguna continuidad lateral, y en [15] para el caso general. El resultado definitivo fue establecido en [29] como sigue.

*Teorema 3:* ( [29]) $U$ es una uninorma idempotente con elemento neutro $e \in [0,1]$ si y solo si existe una función decreciente $g : [0,1] \to [0,1]$, simétrica respecto de la identidad, con $g(e) = e$ y tal que $U(x,y) =$

$$\begin{cases} \text{mín}(x,y) & \text{si } y < g(x) \text{ o } (y = g(x) \text{ y } x < g^2(x)), \\ \text{máx}(x,y) & \text{si } y > g(x) \text{ o } (y = g(x) \text{ y } x > g^2(x)), \\ x \text{ o } y & \text{si } y = g(x) \text{ y } x = g^2(x), \end{cases}$$

siendo conmutativa en los puntos $(x,y)$ tales que $y = g(x)$ con $x = g^2(x)$.

Una uninorma idempotente $U$ con elemento neutro $e$ y función asociada $g$, la denotaremos por $U \equiv \langle g,e \rangle_{\text{ide}}$ y la clase de todas las uninormas idempotentes la denotaremos por $\mathcal{U}_{\text{ide}}$. Obviamente, para esta clase de uninormas, la t-norma subyacente es siempre la t-norma mínimo y la t-conorma subyacente es siempre la t-conorma máximo.

*Definición 4:* Diremos que una uninorma $U$ con elemento neutro $e \in ]0,1[$ es *representable* si existe una función estrictamente creciente $h : [0,1] \to [-\infty,+\infty]$ (llamada *generador aditivo* de $U$, que es único salvo una constante multiplicativa $k > 0$), con $h(0) = -\infty$, $h(e) = 0$ y $h(1) = +\infty$, tal que $U$ viene dada por

$$U(x,y) = h^{-1}(h(x) + h(y))$$

para todo $(x,y) \in [0,1]^2 \setminus \{(0,1),(1,0)\}$ y $U(0,1) = U(1,0) = 0$ o $U(0,1) = U(1,0) = 1$.

Una uninorma representable con elemento neutro $e \in ]0,1[$ y generador aditivo $h$ la denotaremos por $U \equiv \langle e,h \rangle_{\text{rep}}$ y denotaremos la clase de todas las uninormas representables por $\mathcal{U}_{\text{rep}}$. Claramente, esta clase está contenida en la clase de uninormas continuas en $]0,1[^2$ que fue caracterizada en [12] (véase [16] para la versión actual y para más detalles).

*Teorema 5:* ( [16]) Sea $U$ una uninorma continua en $]0,1[^2$ con elemento neutro $e \in ]0,1[$. Se verifica uno de los dos casos siguientes:

(a) Existen $u \in [0,e[$, $\lambda \in [0,u]$, dos t-normas continuas $T_1$ y $T_2$ y una uninorma representable $R$ tales que $U$ viene dada por $U(x,y)=$

$$\begin{cases} \lambda T_1\left(\frac{x}{\lambda},\frac{y}{\lambda}\right) & \text{si } x,y\in[0,\lambda],\\ \lambda+(u-\lambda)T_2\left(\frac{x-\lambda}{u-\lambda},\frac{y-\lambda}{u-\lambda}\right) & \text{si } x,y\in[\lambda,u],\\ u+(1-u)R\left(\frac{x-u}{1-u},\frac{y-u}{1-u}\right) & \text{si } x,y\in\,]u,1[,\\ 1 & \text{si } \min(x,y)\in\,]\lambda,1]\\ & \text{ y } \max(x,y)=1,\\ \lambda \text{ o } 1 & \text{si } (x,y)=(\lambda,1)\\ & \text{ o } (x,y)=(1,\lambda),\\ \min(x,y) & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases} \tag{2}$$

(b) Existen $v\in\,]e,1]$, $\omega\in[v,1]$, dos t-conormas continuas $S_1$ y $S_2$ y una uninorma representable $R$ tales que $U$ viene dada por $U(x,y)=$

$$\begin{cases} vR\left(\frac{x}{v},\frac{y}{v}\right) & \text{si } x,y\in\,]0,v[,\\ v+(\omega-v)S_1\left(\frac{x-v}{\omega-v},\frac{y-v}{\omega-v}\right) & \text{si } x,y\in[v,\omega],\\ \omega+(1-\omega)S_2\left(\frac{x-\omega}{1-\omega},\frac{y-\omega}{1-\omega}\right) & \text{si } x,y\in[\omega,1],\\ 0 & \text{si } \max(x,y)\in[0,\omega[\\ & \text{ y } \min(x,y)=0,\\ \omega \text{ o } 0 & \text{si } (x,y)=(0,\omega)\\ & \text{ o } (x,y)=(\omega,0),\\ \max(x,y) & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases} \tag{3}$$

Denotaremos por $\mathcal{U}_{\cos}$[1] la clase de todas las uninormas continuas en $]0,1[^2$. La subclase formada por todas aquellas de la forma (2) la denotaremos por $\mathcal{U}_{\cos,\min}$ y una uninorma concreta de esta clase la denotaremos por $U\equiv\langle T_1,\lambda,T_2,u,(R,e)\rangle_{\cos,\min}$. Análogamente, la subclase formada por las uninormas de la forma (3) será denotada por $\mathcal{U}_{\cos,\max}$ y una uninorma concreta de esta clase la denotaremos por $U\equiv\langle(R,e),v,S_1,\omega,S_2\rangle_{\cos,\max}$.

*Definición 6:* Una operación binaria $I:[0,1]^2\to[0,1]$ es una *función de implicación borrosa*, o una *implicación borrosa*, si satisface:

(I1) $I(x,z)\geq I(y,z)$ cuando $x\leq y$, para todo $z\in[0,1]$.
(I2) $I(x,y)\leq I(x,z)$ cuando $y\leq z$, para todo $x\in[0,1]$.
(I3) $I(0,0)=I(1,1)=1$ e $I(1,0)=0$.

Nótese que, de la definición, se desprende que $I(0,x)=1$ e $I(x,1)=1$ para todo $x\in[0,1]$ mientras que los valores simétricos $I(x,0)$ e $I(1,x)$ no se derivan de la definición.

*Definición 7:* Sea $I$ una implicación borrosa. La función $N_I$ definida por $N_I(x)=I(x,0)$ para todo $x\in[0,1]$, se llama la *negación natural* de $I$ y es siempre una negación borrosa.

Por otra parte, existen diversas clases de funciones de implicación derivadas de uninormas. Recordamos aquí el caso de las $(U,N)$-implicaciones.

[1]Aquí el subíndice "cos" corresponde a las iniciales de: "*c*ontinuous *o*pen *s*quare".

*Definición 8:* Sea $U$ una uninorma y $N$ una negación borrosa. El $(U,N)$-*operador* derivado de $U$ y $N$ es la operación binaria definida por

$$I_{U,N}(x,y)=U(N(x),y) \text{ para todos } x,y\in[0,1].$$

Es conocido que, con esta definición, $I_{U,N}$ es una función de implicación borrosa si y solo si $U$ es disyuntiva y entonces se conoce con el nombre de $(U,N)$-*implicación*. Algunas propiedades de las $(U,N)$-implicaciones han sido estudiadas para diversos tipos de uninormas entre las que destacan las ya recordadas en estos preliminares, pero también otras como las uninormas *localmente internas* o *compensatorias* y las uninormas con operadores subyacentes continuos (para más detalles véase [4], [5], [17], [19], [28]). Recientemente, el Modus Ponens respecto de una t-norma $T$ se ha estudiado en detalle en [17] para implicaciones derivadas de uninormas.

## III. $U$-Modus Ponens para $(U,N)$-implicaciones

En esta sección queremos estudiar el Modus Ponens respecto de una uninorma $U$, o simplemente el $U$-Modus Ponens, para la clase de las $(U,N)$-implicaciones. Empezamos estableciendo de manera formal la definición del $U$-Modus Ponens.

*Definición 9:* Sea $I$ una implicación borrosa y $U$ una uninorma. Diremos que $I$ verifica el *Modus Ponens* respecto de $U$ (o simplemente el $U$-Modus Ponens), o también que $I$ es un $U$-*condicional* si

$$U(x,I(x,y))\leq y \quad \text{para todos } x,y\in[0,1]. \tag{4}$$

Nuestra intención es estudiar la desigualdad anterior en el caso en que la implicación $I$ sea una $(U,N)$-implicación. Es ya conocido (véase [21]) que si $I$ y $U$ verifican la inecuación (4), $U$ tiene que ser necesariamente conjuntiva. Por lo tanto, en todo lo que sigue, consideraremos que $U$ es una uninorma conjuntiva, $U'$ es una uninorma disyuntiva y $N$ una negación borrosa a partir de las cuales derivamos la $(U,N)$-implicación $I_{U',N}$. Damos primero algunas propiedades necesarias para que se verifique el $U$-Modus Ponens.

*Proposición 10:* Sea $U$ una uninorma conjuntiva con elemento neutro $e\in]0,1[$ y $U'$ una uninorma disyuntiva con elemento neutro $e'\in]0,1[$. Sea $N$ una negación borrosa y sea $I_{U',N}$ la correspondiente $(U,N)$-implicación. Si $I_{U',N}$ verifica el $U$-Modus Ponens respecto de $U$, se verifican las siguientes propiedades:

i) $U'(N(e),y)\leq y$ para todo $y\in[0,1]$. En particular, se tiene que cumplir $N(e)\leq e'$.
ii) $U'(N(x),y)\leq e$ para todos $x,y$ tales que $e\leq y<x$. En particular, se tiene que cumplir $U'(0,y)<e$ para todo $y$ tal que $e\leq y<1$.
iii) $U(x,N(x))\leq e'$ para todo $x\in[0,1]$. En particular, si $N$ tiene $e_N$ como punto fijo, entonces $U(e_N,e_N)\leq e'$.
iv) La negación borrosa $N$ verifica $N(x)<1$ para todo $x>0$.

La proposición anterior muestra algunas condiciones necesarias sobre las uninormas $U$, $U'$ y sobre la negación $N$ para que la correspondiente $I_{U',N}$ verifique el $U$-Modus Ponens. A partir de ahora, nos restringiremos al caso en que la uninorma $U'$ es localmente interna en la frontera, esto es, $U'$ verifica $U'(0, y) \in \{0, y\}$ para todo $y > e'$ (véase [13], [16]). Notemos sin embargo que esta condición no es en absoluto restrictiva ya que todas las clases habituales de uninormas son localmente internas en la frontera. Eso incluye, no solo las clases recordadas en los preliminares, sino también las localmente internas y las uninormas con operadores subyacentes continuos (véase [16]).

El siguiente resultado actualiza la proposición anterior en el caso en que la uninorma $U'$ sea localmente interna en la frontera.

*Proposición 11:* Sea $U$ una uninorma conjuntiva con elemento neutro $e \in ]0, 1[$ y $U'$ una uninorma disyuntiva, localmente interna en la frontera, con elemento neutro $e' \in ]0, 1[$. Sea $N$ una negación continua y sea $I_{U',N}$ la correspondiente $(U, N)$-implicación. Si $I_{U',N}$ verifica el $U$-Modus Ponens respecto de $U$ entonces:

- Se tiene que cumplir $U'(0, y) = 0$ para todo $y < 1$.
- La negación natural asociada a $I_{U',N}$ tiene que ser la negación drástica $N_D$ dada por $N_D(x) = 0$ para todo $x > 0$.
- $U'$ no puede ser de $\mathcal{U}_{\text{máx}}$.
- Si $U'$ es de $\mathcal{U}_{\text{cos,máx}}$, digamos $U' \equiv \langle (R, e'), v, S_1, \omega, S_2 \rangle_{\text{cos,máx}}$, entonces se tiene que cumplir $\omega = 1$.
- Si $U'$ es idempotente, digamos $U' \equiv \langle g', e' \rangle_{\text{ide}}$, entonces se tiene que cumplir $g'(0) = 1$.

*Nota 12:* A partir de la proposición anterior tenemos que la uninorma disyuntiva $U'$ usada en la construcción de $I_{U',N}$ no puede ser cualquiera. Sin embargo, notemos que aún quedan otras posibilidades de entre las clases de uninormas consideradas en los preliminares. Concretamente, $U'$ puede ser de cualesquiera de las siguientes clases:

- uninormas representables, o
- uninormas idempotentes con $g'(0) = 1$, o
- uninormas de $\mathcal{U}_{\text{cos,máx}}$ con $\omega = 1$, o
- uninormas de $\mathcal{U}_{\text{cos,mín}}$ con $\lambda = 0$ ($\lambda = 0$ es necesario para asegurar que la uninorma $U'$ sea disyuntiva).

Antes de tratar con cada una de estas clases de forma separada presentamos en esta sección algunos resultados generales adicionales.

Obviamente la $(U, N)$-implicación $I_{U',N}$ depende completamente no solo de la uninorma $U'$, sino también de la negación $N$ usada en su construcción. Recordemos que ya hemos visto que la negación $N$ no puede tomar el valor 1 en puntos $x > 0$ si queremos que se verifique el $U$-Modus Ponens. Por el contrario, $N$ puede tomar el valor 0 en subintervalos no triviales como indica la siguiente proposición.

*Proposición 13:* Sea $U'$ una uninorma disyuntiva en alguna de las clases descritas en la nota 12. Si $N = N_D$ es la negación borrosa drástica, entonces $I_{U',N}$ viene dada por la menor implicación borrosa posible

$$I_{U',N}(x, y) = I_0(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \text{ o } y = 1, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso,} \end{cases}$$

que verifica siempre el $U$-Modus Ponens respecto de cualquier uninorma conjuntiva $U$.

En lo que queda de sección vamos a considerar solo el caso en que la negación $N$ sea al menos continua, que es en realidad el caso más habitual[2]. En esta situación, vemos que también se puede descartar la clase de uninormas de $\mathcal{U}_{\text{cos,máx}}$.

*Proposición 14:* Sea $U$ una uninorma conjuntiva con elemento neutro $e \in ]0, 1[$ y $U'$ una uninorma disyuntiva con elemento neutro $e' \in ]0, 1[$. Sea $N$ una negación continua y sea $I_{U',N}$ la correspondiente $(U, N)$-implicación. Si $I_{U',N}$ verifica el $U$-Modus Ponens respecto de $U$ entonces $U'$ no puede ser de $\mathcal{U}_{\text{cos,máx}}$.

Recordemos que cuando la negación borrosa considerada $N$ es continua ha de tener un punto fijo que denotaremos por $e_N$. En este caso tenemos hasta tres valores clave en nuestro estudio. A saber, los elementos neutros de $U, U'$ y el punto fijo de $N$, es decir, $e, e'$ y $e_N$ respectivamente. La siguiente proposición establece la relación de orden posible entre los mismos según los casos.

*Proposición 15:* Sea $U$ una uninorma conjuntiva con elemento neutro $e \in ]0, 1[$ y $U'$ una uninorma disyuntiva con elemento neutro $e' \in ]0, 1[$. Sea $N$ una negación continua con punto fijo $e_N$ y sea $I_{U',N}$ la correspondiente $(U, N)$-implicación. Si $I_{U',N}$ verifica el $U$-Modus Ponens respecto de $U$ entonces,

- Si $e' < e_N$, necesariamente se tiene que cumplir $e' < e_N < e$, y
- Si $e' = e_N$, necesariamente se tiene que cumplir $e' = e_N \leq e$.

Notemos que el caso $e' > e_N$ no está incluido en la proposición anterior. Ello es debido a que en dicho caso, no hay restricciones iniciales para la posición de $e$ con respecto a los valores $e' > e_N$.

El siguiente paso en nuestra investigación será realizar un estudio del $U$-Modus Ponens para $(U, N)$-implicaciones derivadas de uninormas de cada una de las clases posibles teniendo en cuenta los resultados anteriores. Esto es, un caso para $(U, N)$-implicaciones derivadas de uninormas representables disyuntivas $U'$, otro para las derivadas de uninormas $U'$ de $\mathcal{U}_{\text{cos,mín}}$ con $\lambda = 0$ y otro para las derivadas de uninormas idempotentes $U'$ con $g'(0) = 1$.

### III-A. *Caso en el que $U'$ es una uninorma representable*

Vamos a tratar en esta sección con uninormas disyuntivas representables del tipo $U' \equiv \langle e', h' \rangle_{\text{rep}}$. En este caso la correspondiente $(U, N)$-implicación derivada de $U'$ y la negación $N$ viene dada por

$$I_{U',N}(x, y) = h'^{-1}(h'(N(x)) + h'(y))$$

para todos $x, y \in [0, 1]$, con el convenio $+\infty - \infty = +\infty$. Recordemos también que, a partir de una uninorma representable disyuntiva $U' \equiv \langle e', h' \rangle_{\text{rep}}$, se obtiene la negación

[2]Recordemos que las negaciones continuas son las más utilizadas en lógica borrosa y que contienen, en particular, a las negaciones fuertes (aquellas que son involutivas) y también a las estrictas (aquellas que son estrictamente decrecientes y continuas).

fuerte $N_{h'}(x) = h'^{-1}(-h'(x))$ para todo $x \in [0,1]$, que es usualmente conocida como la negación fuerte *asociada a* $U'$.

Teniendo en cuenta estas consideraciones, se pueden obtener en este caso los siguientes resultados parciales.

*Proposición 16:* Sea $U$ una uninorma conjuntiva con elemento neutro $e \in ]0,1[$, $U' \equiv \langle e', h' \rangle_{\text{rep}}$ disyuntiva, $N$ una negación borrosa e $I_{U',N}$ la correspondiente $(U,N)$-implicación. Si $U \leq U'$ y $N \leq N_{h'}$ entonces $I_{U',N}$ verifica el $U$-Modus Ponens respecto de $U$.

En el caso en que la negación considerada $N$ coincida con la negación fuerte asociada $N_{h'}$, la condición $U \leq U'$ se convierte en necesaria y suficiente como se ve en el siguiente resultado.

*Proposición 17:* Sea $U$ una uninorma conjuntiva con elemento neutro $e \in ]0,1[$, $U' \equiv \langle e', h' \rangle_{\text{rep}}$ disyuntiva, $N = N_{h'}$ la negación fuerte asociada a $U'$ e $I_{U',N}$ la correspondiente $(U,N)$-implicación. Entonces $I_{U',N}$ verifica el $U$-Modus Ponens respecto de $U$ si y solo si $U \leq U'$.

Damos a continuación algunos ejemplos de $(U,N)$-implicaciones, basadas en uninormas disyuntivas representables, que verifican el $U$-Modus Ponens.

*Ejemplo 18:* A partir de resultados anteriores podemos presentar los siguientes ejemplos de $(U,N)$-implicaciones que verifican el $U$-Modus Ponens.

i) Sea $U' \equiv \langle e', h' \rangle_{\text{rep}}$ una uninorma representable disyuntiva con elemento neutro $e' \in ]0,1[$ y $N = N_{h'}$ la negación fuerte *asociada a* $U'$. En estos casos, es sabido que la t-norma $T_{U'}$ y la t-conorma $S_{U'}$ subyacentes son estrictas. Consideremos entonces las uninormas de $\mathcal{U}_{\text{mín}}$ dadas por
$$U_0 \equiv \langle T_{U'}, e', S_{U'} \rangle_{\text{mín}} \quad \text{y} \quad U_1 \equiv \langle \text{mín}, e', S_U \rangle_{\text{mín}},$$
donde $S_U$ es cualquier t-conorma. Entonces resulta claro que $U_0 \leq U'$ pero en cambio $U_1 \not\leq U'$. De esta manera, a partir de la proposición 17, tenemos que $I_{U',N}$ verifica el $U$-Modus Ponens respecto de $U_0$ pero no lo verifica respecto de $U_1$.

ii) Tomemos en este caso la uninorma dada por $U'(x,y) =$
$$\begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \in \{(1,0),(0,1)\}, \\ \frac{xy}{(1-x)(1-y)+xy} & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$
Se sabe que $U'$ es una uninorma disyuntiva representable con elemento neutro $e' = \frac{1}{2}$ y generador aditivo $h'(x) = \log\left(\frac{x}{1-x}\right)$ (ver [11]). Más aún, su negación asociada es la negación clásica $N_c(x) = 1 - x$. De este modo, si tomamos la uninorma de $\mathcal{U}_{\text{mín}}$ dada por $U(x,y) =$
$$\begin{cases} 2xy & \text{si } x,y \leq 1/2, \\ 2x + 2y - 2xy - 1 & \text{si } x,y \geq 1/2, \\ \text{mín}(x,y) & \text{en cualquier otro caso,} \end{cases}$$
podemos ver fácilmente que $U \leq U'$ y, considerando cualquier negación borrosa $N$ tal que $N \leq N_c$, la correspondiente $(U,N)$-implicación $I_{U',N}$ verifica el $U$-Modus Ponens respecto de $U$ (aplicando simplemente la proposición 16).

Precisamente, debido a las restricciones de espacio, en las secciones siguientes nos limitaremos a dar sendos ejemplos de $(U,N)$-implicaciones verificando el $U$-Modus Ponens, basadas en uninormas disyuntivas pertenecientes a la clase correspondiente. Dejaremos en cambio el estudio exhaustivo de estos casos para un trabajo futuro.

### *III-B. Caso en el que $U'$ es una uninorma de $\mathcal{U}_{\cos,\text{mín}}$ con $\lambda = 0$*

Damos en este caso el siguiente ejemplo que demuestra la existencia de numerosas $(U,N)$-implicaciones verificando el $U$-Modus Ponens basadas en uninormas disyuntivas de $\mathcal{U}_{\cos,\text{mín}}$ con $\lambda = 0$.

*Ejemplo 19:* Consideremos $U'$ una uninorma disyuntiva de $\mathcal{U}_{\cos,\text{mín}}$ con $\lambda = 0$, digamos $U' \equiv \langle 0, T, u, (R, e') \rangle_{\cos,\text{mín}}$. Consideremos cualquier uninorma $U$ de $\mathcal{U}_{\text{mín}}$ con elemento neutro $e = u$ cualquier negación borrosa continua $N$ con punto fijo $e_N = u$ y tal que $N(x) < 1$ para todo $x > 0$. Entonces, la $(U,N)$-implicación derivada de $U'$ y de $N$ verifica siempre el $U$-Modus Ponens respecto de $U$.

### *III-C. Caso en el que $U'$ es una uninorma idempotente con $g(0) = 1$*

El siguiente ejemplo muestra que existen numerosas $(U,N)$-implicaciones que verifican el $U$-Modus Ponens, en este caso basadas en uninormas idempotentes disyuntivas con $g(0) = 1$.

*Ejemplo 20:* Consideremos una negación fuerte $N$ con punto fijo $e \in ]0,1[$ y sean $U$ y $U'$ las uninormas idempotentes dadas respectivamente por:
$$U(x,y) = \begin{cases} \text{mín}(x,y) & \text{si } y \leq N(x), \\ \text{máx}(x,y) & \text{si } y > N(x), \end{cases}$$
y
$$U'(x,y) = \begin{cases} \text{mín}(x,y) & \text{si } y < N(x), \\ \text{máx}(x,y) & \text{si } y \geq N(x). \end{cases}$$
Claramente tenemos que $U$ es conjuntiva, $U'$ es disyuntiva y la $(U,N)$-implicación derivada de $U'$ y $N$ verifica el $U$-Modus Ponens respecto de $U$.

## IV. Conclusiones y trabajo futuro

El Modus Ponens es la regla borrosa básica comúnmente utilizada en el razonamiento aproximado y el control borroso para manejar inferencias borrosas. De este modo, es lógico requerir a la conjunción y a la implicación borrosas que se vayan a usar en los procesos de inferencia, que verifiquen la inecuación funcional asociada al Modus Ponens. Habitualmente, se usa una t-norma para modelizar la conjunción borrosa pero, cada vez más, se utiliza también una uninorma conjuntiva en su lugar, lo que nos lleva a considerar el llamado $U$-Modus Ponens.

Dicha propiedad ya ha sido estudiada para implicaciones residuadas derivadas de uninormas ($RU$-implicaciones) en [21], [22]. Siguiendo en la misma línea, en este trabajo hemos iniciado el estudio para $(U,N)$-implicaciones, es decir para implicaciones derivadas de uninormas disyuntivas y negaciones borrosas. Hemos visto que, de entre las clases de uninormas disyuntivas más habituales, solo existen soluciones en los casos de $(U, N)$-implicaciones derivadas de uninormas representables, de uninormas en $\mathcal{U}_{\cos,\text{mín}}$ con $\lambda = 0$ y de uninormas idempotentes con $g(0) = 1$. Hemos dado ejemplos en cada uno de los tres casos, aunque, mientras que el caso relativo a uninormas representables ha sido resuelto con detalle, un estudio exhaustivo de los otros dos casos se ha dejado para un trabajo futuro.

Queremos especificar que como trabajo futuro, además del ya mencionado, pretendemos extender nuestro estudio a otros tipos de implicaciones como son las $h$ y $(h, e)$-implicaciones recientemente introducidas en [23]. Finalmente, es nuestra intención desarrollar también un estudio similar de una generalización mediante uninormas de la regla de inferencia del Modus Tollens.

*Agradecimientos:* Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por el proyecto TIN2016- 75404-P AEI/FEDER, UE.

## Referencias


[1] I. Aguiló, J. Suñer, J. Torrens, "A characterization of residual implications derived from left-continuous uninorms," Information Sciences, 180, 3992–4005, 2010.

[2] C. Alsina, E. Trillas, "When $(S, N)$-implications are $(T, T_1)$-conditional functions?," Fuzzy Sets and Systems, 134, 305–310, 2003.

[3] M. Baczyński, G. Beliakov, H. Bustince Sola, A Pradera, Eds., Advances in Fuzzy Implication Functions, in Studies in Fuzziness and Soft Computing, vol. 300, Springer, Berlin Heidelberg, 2013.

[4] M. Baczyński, B. Jayaram, Fuzzy Implications. Studies in Fuzziness and Soft Computing, vol. 231. Springer, Berlin Heidelberg, 2008.

[5] M. Baczyński, B. Jayaram, "(U,N)-implications and their characterizations," Fuzzy Sets and Systems, 160, 2049–2062, 2009.

[6] J.M. Benítez, J.L. Castro, I. Requena, "Are artificial neural networks black boxes?," IEEE Transactions on Neural Networks 8, 1156–1163, 1997.

[7] E. Czogala, J. Drewniak, "Associative monotonic operations in fuzzy set theory," Fuzzy Sets and Systems 12, 249–269, 1984.

[8] B. De Baets, "Idempotent uninorms," European Journal of Operational Research 118, 631–642, 1999.

[9] B. De Baets, J. C. Fodor, "Residual operators of uninorms," Soft Computing 3, 89–100, 1999.

[10] B. De Baets, J. Fodor, "Van Melle's combining function in MYCIN is a representable uninorm: an alternative proof," Fuzzy Sets and Systems 104, 133-136, 1999.

[11] J. C. Fodor, R. R. Yager, A. Rybalov, "Structure of Uninorms," International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-based Systems, 5, 411–427, 1997.

[12] S. Hu, Z. Li, "The structure of continuous uni-norms," Fuzzy Sets and Systems 124, 43–52, 2001.

[13] G. Li, H.W. Liu, "On properties of uninorms locally internal on the boundary," Fuzzy Sets and Systems 332, 116–128, 2018.

[14] E.P. Klement, R. Mesiar, E. Pap. Triangular norms. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

[15] J. Martín, G. Mayor, J. Torrens, "On locally internal monotonic operators," Fuzzy Sets and Systems 137, 27–42, 2003.

[16] M. Mas, S. Massanet, D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, "A survey on the existing classes of uninorms," Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 29, 1021–1037, 2015.

[17] M. Mas, M. Monserrat, D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, "$RU$ and $(U, N)$-implications satisfying Modus Ponens," International Journal of Approximate Reasoning, 73, 123–137, 2016.

[18] M. Mas, M. Monserrat, J. Torrens, "Two types of implications derived from uninorms," Fuzzy Sets and Systems, 158, 2612–2626, 2007.

[19] M. Mas, M. Monserrat, J. Torrens, "A characterization of $(U, N), RU, QL$ and $D$-implications derived from uninorms satisfying the law of importation," Fuzzy Sets and Systems 161, 1369–1387, 2010.

[20] M. Mas, M. Monserrat, J. Torrens, E. Trillas, "A survey on fuzzy implication functions," IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 15(6), 1107–1121, 2007.

[21] M. Mas, D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, "On a generalization of the Modus Ponens: $U$-conditionality," in Proceedings of IPMU-2016, Part I, CCIS 610, J.P. Carvalho et al. Eds. 2016, pp. 1–12.

[22] M. Mas, D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, "On some classes of $RU$-implications satisfying $U$-Modus Ponens," in Aggregation functions in theory and in practice. In the series: Advances in Intelligent Systems and Computing, 581, V. Torra, R. Mesiar and B. De Baets, Eds. 2018, pp. 71–82.

[23] S. Massanet, J. Torrens, "On a new class of fuzzy implications: h-implications and generalizations," Information Science 181, 2111–2127, 2011.

[24] S. Massanet, J. Torrens, "An overview of construction methods of fuzzy implications," in [3], pp. 1–30, 2013.

[25] G. Metcalfe, F. Montagna, "Substructural Fuzzy Logics," The Journal of Symbolic Logic 72, 834–864, 2007.

[26] D. Ruiz, J. Torrens, "Residual implications and co-implications from idempotent uninorms," Kybernetika 40, 21–38, 2004.

[27] D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, "Distributivity of residual implications over conjunctive and disjunctive uninorms," Fuzzy Sets and Systems, 158, 23–37, 2007.

[28] D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, "S- and R-implications from uninorms continuous in $]0, 1[^2$ and their distributivity over uninorms," Fuzzy Sets and Systems, 160, 832–852, 2009.

[29] D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, B. De Baets, J. Fodor, "Some remarks on the characterization of idempotent uninorms," in Computational Intelligence for Knowledge-Based Systems Design. Lecture Notes in Computer Science, vol. 6178, E. Hllermeier, R. Kruse, F. Hoffmann, Eds. Springer, Berlin, Heidelberg, 2010, pp. 425–434.

[30] E. Trillas, C. Alsina, A. Pradera, "On MPT-implication functions for fuzzy logic," Revista de la Real Academia de Ciencias. Serie A. Matemáticas (RACSAM) 98(1), 259–271, 2004.

[31] E. Trillas, C. Alsina, E. Renedo, A. Pradera, "On contra-symmetry and MPT-conditionality in fuzzy logic," International Journal of Intelligent Systems, 20, 313–326, 2005.

[32] E. Trillas, C. Campo, S. Cubillo, "When QM-operators are implication functions and conditional fuzzy relations," International Journal of Intelligent Systems, 15, 647–655, 2000.

[33] E. Trillas, L. Valverde, "On Modus Ponens in fuzzy logic," in 15th International Symposium on Multiple-Valued Logic, pp. 294–301. Kingston, Canada, 1985.

[34] R. R. Yager, A. Rybalov, "Uninorm aggregation operators," Fuzzy Sets and Systems, 80, 111–120, 1996.