

**XIX Congreso Español  
sobre Tecnologías  
y Lógica Fuzzy  
(XIX ESTYLF)**

ESTYLF 4:  
ADQUISICIÓN  
Y REPRESENTACIÓN  
DEL CONOCIMIENTO







# Estudio sobre la evolución de la relación entre objetos y atributos en una sucesión de contextos L-Fuzzy

Cristina Alcalde

Departamento de Matemática Aplicada  
Universidad del País Vasco - UPV/EHU  
Plaza de Europa 1, 20018 San Sebastian  
Email: c.alcalde@ehu.es

Ana Burusco

Departamento de Estadística, Informática y Matemáticas  
Instituto de Smart Cities  
Universidad Pública de Navarra  
Campus de Arrosadía, 31006 Pamplona  
Email: burusco@unavarra.es

**Resumen**—En este trabajo avanzamos en el estudio de la evolución de la relación entre los objetos y los atributos en una sucesión de contextos L-Fuzzy. En concreto, analizamos el grado de crecimiento de las tendencias que se estudian mediante las matrices *Trend* y *Persistent*. Para hacerlo, daremos unas nuevas definiciones de niveles *Trend* y *Persistent* con el fin de priorizar los conceptos formales que se obtienen de las matrices *Trend* y *Persistent*. Estos niveles *Trend* y *Persistent* nos permitirán también comparar los distintos objetos y atributos analizando cuáles han sido los que más han evolucionado positivamente a lo largo del tiempo.

Finalmente, ilustraremos nuestros resultados con un ejemplo.

## I. INTRODUCCIÓN

El Análisis de Conceptos L-Fuzzy ([2], [7], [10], [11], [15], [19], [24]) es una herramienta matemática para el análisis y la representación del conocimiento conceptual. Esta teoría utiliza los conceptos L-fuzzy para extraer información de un contexto L-fuzzy. Recordemos que un contexto L-fuzzy es una tupla  $(L, X, Y, R)$ , donde  $L$  es un retículo completo,  $X$  e  $Y$  son conjuntos de objetos y atributos, y  $R \in L^{X \times Y}$  es una relación L-fuzzy entre los objetos y los atributos. Podemos entender el Análisis de Conceptos L-fuzzy como una extensión del Análisis de Conceptos Formales de Wille ([18], [29]).

En algunos casos, podemos tener varias relaciones entre el conjunto de objetos  $X$  y el de atributos  $Y$ . Representaremos estas situaciones mediante una secuencia de contextos L-fuzzy. Si esta secuencia representa la evolución en el tiempo de un contexto L-fuzzy, intentaremos predecir las tendencias futuras a partir del comportamiento pasado.

En Inteligencia Artificial hay una gran necesidad de representar conocimiento temporal y de modelizar el cambio en el tiempo. En este sentido, este trabajo es un paso más en el estudio de los fenómenos temporales. En concreto, el objetivo del presente trabajo es estudiar en qué medida las relaciones entre los objetos y los atributos mejoran con el paso del tiempo.

Existen trabajos en la literatura que analizan la evolución temporal en un contexto formal, por ejemplo, [27], [30], [31].

En particular, en [30], [31], Wolff introduce un Sistema de Tiempo Conceptual para definir el Análisis de Conceptos Temporales. En este Sistema de Tiempo Conceptual, el estado y la fase se definen como retículos de conceptos que representan el significado de los estados con respecto a la elegida descripción del tiempo. Además, otros autores definen tendencias de evolución en [27], [28], utilizando temporal matching en el caso del Análisis de Conceptos Formales.

La existencia de contextos Triádicos [21] nos da la posibilidad de utilizar relaciones ternarias para representar el tiempo. Sin embargo, esta aproximación es demasiado exigente para nuestro objetivo y, por esta razón, está sólo desarrollada para contextos formales.

El Análisis de Tendencias se refiere habitualmente a técnicas para extraer patrones de comportamiento en estadística. En este trabajo, trabajamos con un nuevo método para contextos L-fuzzy con datos cuantitativos. Este método permitirá establecer tendencias que pueden usarse como base para la toma de decisión. En concreto, profundizaremos en el estudio de las tendencias en la relación entre los objetos y atributos incorporando un nuevo elemento al estudio que representa el grado de evolución de dicha relación cuando es positiva.

Aplicaremos nuestros resultados a un ejemplo que muestra las ventas mensuales de artículos deportivos en determinados establecimientos a lo largo del tiempo.

El trabajo se organiza como sigue: La Sección 2 proporciona un resumen sobre los principales aspectos del Análisis de conceptos L-fuzzy y las sucesiones de contextos L-fuzzy. La sección 3 establece un estudio general sobre tendencias temporales en una sucesión de contextos L-fuzzy definiendo conceptos formales *Trend* y *Persistent* así como niveles de tendencias positivas que nos sirvan para establecer distintas priorizaciones en nuestras predicciones. Mostramos un ejemplo donde aplicamos los resultados en Sección 4. Finalmente, las conclusiones y trabajo futuro se exponen en la Sección 5.

## II. PRELIMINARES

 II-A. Análisis de conceptos  $L$ -fuzzy

En trabajos previos ([10], [11]), hemos definido los contextos  $L$ -fuzzy  $(L, X, Y, R)$ , donde  $L$  es un retículo completo,  $R \in L^{X \times Y}$  es una relación  $L$ -fuzzy entre los objetos de  $X$  y los atributos de  $Y$ . Esta definición es una extensión de los contextos formales de Wille ([18], [29]) que permite trabajar con relaciones entre los objetos y atributos que toman valores en un retículo  $L$ , en lugar de valores binarios.

Para trabajar con estos contextos  $L$ -fuzzy, hemos definido los operadores derivación 1 y 2 por medio de las expresiones:

Para todo  $A \in L^X$ , para todo  $B \in L^Y$

$$A_1(y) = \inf_{x \in X} \{I(A(x), R(x, y))\}$$

$$B_2(x) = \inf_{y \in Y} \{I(B(y), R(x, y))\}$$

con  $I$  un operador de implicación fuzzy definido en el retículo  $(L, \leq)$ . En este trabajo, utilizaremos operadores de implicación residuados y el retículo  $L = [0, 1]$ .

Otros autores han utilizado también estos operadores residuados para definir los operadores derivación ([9], [25], [26]).

La información almacenada en el contexto se visualiza por medio de los conceptos  $L$ -fuzzy, que representan a un grupo de objetos que comparten, ellos y sólo ellos, un grupo de atributos. Estos pares  $(M, M_1) \in L^X \times L^Y$ , donde  $M \in \text{fix}(\varphi)$  es el conjunto de puntos fijos del operador  $\varphi$ , que se define a partir de los operadores derivación 1 y 2 como  $\varphi(M) = (M_1)_2 = M_{12}$ . La primera y la segunda componentes del concepto  $L$ -fuzzy se llaman extensión e intensidad, respectivamente.

Utilizando la relación de orden usual en fuzzy sets, podemos definir el conjunto  $\mathcal{L} = \{(M, M_1) / M \in \text{fix}(\varphi)\}$  con la relación de orden  $\preceq$  dada por:  $(M, M_1), (N, N_1) \in \mathcal{L}$ ,  $(M, M_1) \preceq (N, N_1)$  si  $M \leq N$  (o  $N_1 \leq M_1$ ).

Se demuestra que  $(\mathcal{L}, \preceq)$  es un retículo completo al que llamaremos ([10], [11]) el retículo de conceptos  $L$ -fuzzy.

Además, dados  $A \in L^X$  (o  $B \in L^Y$ ), podemos obtener los conceptos  $L$ -fuzzy asociados aplicando los operadores derivación dos veces. Si utilizamos implicaciones residuadas, como en este trabajo, el concepto  $L$ -fuzzy asociado es  $(A_{12}, A_1)$  (o  $(B_2, B_{21})$ ).

Otros resultados importantes sobre esta teoría, que extiende el Análisis de Conceptos Formales al caso difuso, se pueden encontrar en [6], [8], [9], [12]. Extensiones del Análisis de Conceptos Formales al caso intervalo-valorado están en [13], [3], [16], [17] y a fuzzy property-oriented conceptos en [20], [23].

 II-B. Sucesiones de contextos  $L$ -fuzzy

Un primer estudio de sucesiones de contextos  $L$ -fuzzy cuando  $L = [0, 1]$  se hizo en [5] y [14]. Comenzaremos recordando la definición principal:

**Definición 1.** Una sucesión de contextos  $L$ -fuzzy es una sucesión de tuplas  $(L, X, Y, R_i)$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , con  $L$  retículo completo,  $X$  e  $Y$  conjuntos de objetos y atributos

respectivamente y  $R_i \in L^{X \times Y}$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ , una familia de relaciones  $L$ -fuzzy entre  $X$  e  $Y$ .

En [1] desarrollamos un estudio general de estas sucesiones de contextos  $L$ -fuzzy utilizando los operadores OWA  $n$ -arios de Lizasoain y Moreno ([22]). Estos operadores son una generalización de los operadores OWA de Yager ([32], [33]).

En ese trabajo y con el fin de extraer la información almacenada en la sucesión de contextos  $L$ -fuzzy, definimos relaciones agregadas utilizando los vectores totalmente ordenados definidos por Lizasoain y Moreno ([22]).

Posteriormente, en [5] hicimos un estudio preliminar en  $[0, 1]$  y en [4] extendimos y profundizamos los resultados para cualquier retículo completo  $L$ . En este caso, tenemos que tener en cuenta que excepto para una cadena completa, los elementos del retículo  $L$  no son necesariamente comparables.

## III. TENDENCIAS TEMPORALES

En [4] analizamos tendencias temporales para identificar la evolución con el tiempo de la sucesión de contextos  $L$ -fuzzy  $(L, X, Y, R_i)$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , cuando  $L$  es un retículo completo. Nuestro interés era el estudio de la evolución de la relación entre los objetos (o atributos) respecto de uno o varios atributos (u objetos).

En este trabajo, utilizábamos operadores de implicación residuados en el cálculo de los conceptos  $L$ -fuzzy asociados a ciertos objetos o atributos.

Comenzaremos mostrando en el siguiente apartado los principales resultados del trabajo.

## III-A. Objetos y atributos Trend y Persistent

La mejor manera de estudiar la evolución en el tiempo de un objeto o un atributo es el estudio de sus conceptos  $L$ -fuzzy asociados en los diferentes contextos  $L$ -fuzzy de la sucesión. Esta es la idea de las siguientes definiciones y resultados que dábamos en [4]:

**Definición 2.** Consideremos  $x_0 \in X, y_0 \in Y$ . Sean  $(A_{i\{x_0\}}, B_{i\{x_0\}})$  y  $(A_{i\{y_0\}}, B_{i\{y_0\}})$  los conceptos  $L$ -fuzzy asociados a  $\{x_0\}$  e  $\{y_0\}$  en la sucesión de contextos  $L$ -fuzzy  $(L, X, Y, R_i)$  con  $i \leq n$ .

Entonces, podemos definir:

- (i)  $Trend(x_0) = \{y \in Y / B_{i\{x_0\}}(y) \leq B_{i+1\{x_0\}}(y), \forall i < n\}$  es el conjunto de atributos cuyos grados de pertenencia en las diferentes intensiones de los conceptos  $L$ -fuzzy  $(A_{i\{x_0\}}, B_{i\{x_0\}})$  son no decrecientes.
- (ii)  $Trend(y_0) = \{x \in X / A_{i\{y_0\}}(x) \leq A_{i+1\{y_0\}}(x), \forall i < n\}$  es el conjunto de objetos cuyos grados de pertenencia en las diferentes extensiones de los conceptos  $L$ -fuzzy  $(A_{i\{y_0\}}, B_{i\{y_0\}})$  son no decrecientes.

Podemos decir que son los atributos cada vez más relacionados con el objeto  $x_0$  y los objetos cada vez más relacionados con el atributo  $y_0$ .

Esta es una definición muy exigente pero permite establecer tendencias con un alto grado de cumplimiento.



Además, se puede probar el siguiente resultado:

**Proposición 1.** Consideremos  $x \in X, y \in Y$ .

$$y \in Trend(x) \iff x \in Trend(y)$$

Podemos extender esta definición al caso de más de un objeto o un atributo:

**Definición 3.** Para cada  $Z, T \neq \emptyset, Z \subseteq X$  y  $T \subseteq Y$ , definimos  $Trend(Z)$  y  $Trend(T)$  como:

- (i)  $Trend(Z) = \{y \in Y / B_{i\{x\}}(y) \leq B_{i+1\{x\}}(y),$   
para todo  $i < n$ , para todo  $x \in Z\}$
- (ii)  $Trend(T) = \{x \in X / A_{i\{y\}}(x) \leq A_{i+1\{y\}}(x),$   
para todo  $i < n$ , para todo  $y \in T\}$

En este caso, se puede probar también el siguiente resultado:

**Proposición 2.** Para todo  $Z, T \neq \emptyset, Z \subseteq X$  y  $T \subseteq Y$  :

- (i) Si  $Trend(Z) = T$ , entonces  $Z \subseteq Trend(T)$
- (ii) Si  $Trend(T) = Z$ , entonces  $T \subseteq Trend(Z)$

Como caso particular, tenemos los conjuntos  $Trend(X)$  y  $Trend(Y)$  donde se cumple:

$$Trend(X) = Y \iff Trend(Y) = X.$$

Como la definición de  $Trend$  es muy exigente, en [4] definimos objetos y atributos  $Persistent$  para relajar este nivel de exigencia.

**Definición 4.** Dados  $x_0 \in X, y_0 \in Y$ . Sean  $(A_{i\{x_0\}}, B_{i\{x_0\}})$  y  $(A_{i\{y_0\}}, B_{i\{y_0\}})$  los conceptos  $L$ -fuzzy asociados a los crisp singletons  $\{x_0\}$  e  $\{y_0\}$ , en la sucesión de contextos  $L$ -fuzzy  $(L, X, Y, R_i)$  con  $i \leq n$  :

- (i)  $Persistent(x_0) = \{y \in Y / B_{i\{x_0\}}(y) \geq B_{1\{x_0\}}(y),$   
para todo  $i, 1 < i \leq n\}$

es el conjunto de atributos cuyos grados de pertenencia en las intensiones fuzzy de los conceptos  $L$ -fuzzy  $(A_{i\{x_0\}}, B_{i\{x_0\}})$  son mayores o iguales que los valores correspondientes en el concepto  $L$ -fuzzy  $(A_{1\{x_0\}}, B_{1\{x_0\}})$ .

- (ii)  $Persistent(y_0) = \{x \in X / A_{i\{y_0\}}(x) \geq A_{1\{y_0\}}(x),$   
para todo  $i, 1 < i \leq n\}$

es el conjunto de objetos cuyos grados de pertenencia en las extensiones fuzzy de los conceptos  $L$ -fuzzy  $(A_{i\{y_0\}}, B_{i\{y_0\}})$  son mayores o iguales que los valores correspondientes del concepto  $L$ -fuzzy  $(A_{1\{y_0\}}, B_{1\{y_0\}})$ .

Fijado  $j \leq n$ , se puede dar una definición alternativa de  $Persistent(x_0)$  y  $Persistent(y_0)$  como sigue:

Para todo  $i, j < i \leq n$ ,

$$Persistent_j(x_0) = \{y \in Y / B_{i\{x_0\}}(y) \geq B_{j\{x_0\}}(y)\}$$

$$Persistent_j(y_0) = \{x \in X / A_{i\{y_0\}}(x) \geq A_{j\{y_0\}}(x)\}$$

Con esta definición, resultados similares a los de las proposiciones 1 y 2 se verifican:

**Proposición 3.** Consideremos  $x \in X, y \in Y$ .

$$y \in Persistent(x) \iff x \in Persistent(y)$$

Podemos también extender esta definición al caso de más de un objeto o atributo:

**Definición 5.** Para todo  $Z, T \neq \emptyset, Z \subseteq X$  y  $T \subseteq Y$ , definimos  $Persistent(Z)$  y  $Persistent(T)$  como:

- (i)  $Persistent(Z) = \{y \in Y / B_{i\{x\}}(y) \geq B_{1\{x\}}(y),$   
para todo  $i < n$ , para todo  $x \in Z\}$
- (ii)  $Persistent(T) = \{x \in X / A_{i\{y\}}(x) \geq A_{1\{y\}}(x),$   
para todo  $i < n$ , para todo  $y \in T\}$

**Proposición 4.** For all  $Z, T \neq \emptyset, Z \subseteq X$  y  $T \subseteq Y$  :

- (i) Si  $Persistent(Z) = T$ , entonces  $Z \subseteq Persistent(T)$
- (ii) Si  $Persistent(T) = Z$ , entonces  $T \subseteq Persistent(Z)$

Las definiciones  $Trend$  y  $Persistent$  establecen pares de objetos y atributos que pueden ser usados para un análisis más completo de la evolución de la sucesión de contextos  $L$ -fuzzy  $(L, X, Y, R_i), i \in \{1, \dots, n\}$ .

Siguiendo esta idea y la Definición 2, las tendencias de la sucesión de contextos  $L$ -fuzzy que hemos estudiado se pueden completar con la construcción de matrices  $Trend$  y  $Persistent$ .

**Definición 6.** La Matriz  $Trend TM \subseteq X \times Y$  se define como:

$$TM(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in Trend(x) (\text{equiv. } x \in Trend(y)) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por la Proposición 1, para obtener la matriz  $Trend$  es sólo necesario el cálculo de  $Trend(x)$ , para todo  $x \in X$  o análogamente  $Trend(y)$ , para todo  $y \in Y$ .

Podemos considerar ahora el contexto formal  $(X, Y, TM)$  y obtener sus conceptos formales para tener una visión general de las tendencias entre los objetos  $X$  y los atributos  $Y$ .

**Definición 7.** Sea el contexto formal  $(X, Y, TM)$  con  $X$  conjunto de objetos,  $Y$  conjunto de atributos y  $TM \subseteq X \times Y$ . Llamaremos a los conceptos de  $(X, Y, TM)$  conceptos formales  $Trend$ .

Es también posible realizar un estudio paralelo utilizando la definición de  $Persistent$ :

**Definición 8.** La matriz  $PM \subseteq X \times Y$  tal que

$$PM(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in Persistent(x) (x \in Persistent(y)) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

se llama Matriz  $Persistent$ .

Podemos ahora considerar  $(X, Y, PM)$  y calcular sus conceptos formales para obtener información sobre las tendencias entre los objetos de  $X$  y los atributos de  $Y$ .

**Definición 9.** Sea el contexto formal  $(X, Y, PM)$ . Los conceptos formales de  $(X, Y, PM)$  se llamarán conceptos formales  $Persistent$ .

Además, como la definición de  $Persistent$  es menos exigente que la de  $Trend$ , se puede probar de forma sencilla

que  $TM \subseteq PM$ .

Mediante estos resultados utilizando las matrices *Trend* y *Persistent* estudiamos objetos y atributos que mejoran su relación con el tiempo, pero no analizamos cuánto supone esa mejora. Este tema será el que abordaremos en el siguiente apartado.

### III-B. Nivel *Trend* y *Persistent*

Con el fin de medir el grado de evolución positiva de las relaciones entre los objetos y los atributos, vamos a definir su nivel de tendencia. Para hacerlo trabajaremos con  $L = [0, 1]$ .

Dados  $x_0 \in X, y_0 \in Y$ . Sean  $(A_{i\{x_0\}}, B_{i\{x_0\}})$  y  $(A_{i\{y_0\}}, B_{i\{y_0\}})$  los conceptos *L*-fuzzy asociados a los crisp singletons  $\{x_0\}$  e  $\{y_0\}$ , en la sucesión de contextos *L*-fuzzy  $(L, X, Y, R_i)$  con  $i \leq n$ :

**Definición 10.** Para cada  $x_0 \in X, y \in Y$ , el nivel *Trend* del objeto  $x_0$  para el atributo  $y$  se define como:

$$TrendLevel(x_0)_y = \begin{cases} B_{n\{x_0\}}(y) - B_{1\{x_0\}}(y) & \text{si } y \in Trend(x_0) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Análogamente, podemos definir para cada  $y_0 \in Y, x \in X$  el nivel *Trend* del atributo  $y_0$  para el objeto  $x$ :

$$TrendLevel(y_0)_x = \begin{cases} A_{n\{y_0\}}(x) - A_{1\{y_0\}}(x) & \text{si } x \in Trend(y_0) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

También podemos dar las definiciones para Niveles *Persistent*:

**Definición 11.** Para cada  $x_0 \in X, y \in Y$ , el nivel *Persistent* del objeto  $x_0$  para el atributo  $y$  se define como:

$$PerLevel(x_0)_y = \begin{cases} B_{n\{x_0\}}(y) - B_{1\{x_0\}}(y) & \text{si } y \in Persistent(x_0) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Análogamente, podemos definir para cada  $y_0 \in Y, x \in X$  el nivel *Persistent* del atributo  $y_0$  para el objeto  $x$ :

$$PerLevel(y_0)_x = \begin{cases} A_{n\{y_0\}}(x) - A_{1\{y_0\}}(x) & \text{si } x \in Persistent(y_0) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Es fácil comprobar que se cumple el siguiente resultado:

**Proposición 5.** Para todo  $x \in X, y \in Y$ ,

$$TrendLevel(x)_y = TrendLevel(y)_x$$

$$PerLevel(x)_y = PerLevel(y)_x$$

*Demostración.* Si consideramos los crisp singletons  $\{x\}$  e  $\{y\}$  y utilizamos una implicación residuada,  $B_{i\{x\}}(y) = R_i(x, y) = A_{i\{y\}}(x)$ , para todo  $i \leq n$ . Como además  $y \in Trend(x)$  si y sólo si  $x \in Trend(y)$ , y análogamente para la definición de *Persistent*, la proposición se verifica.  $\square$

Podemos establecer relaciones que nos almacenen estos valores:

**Definición 12.** Las matrices *TrendLevelM*, *PerLevelM*  $\in L^{X \times Y}$  se definen como:

$$TrendLevelM(x, y) = TrendLevel(x)_y = TrendLevel(y)_x$$

$$PerLevelM(x, y) = PerLevel(x)_y = PerLevel(y)_x$$

Aunque en la definición dada hemos tomado como intervalo temporal el que va desde el instante inicial al final, sería posible también trabajar con otros intervalos:

**Definición 13.** Dados  $1 \leq j \leq k \leq n$ , para cada  $x_0 \in X, y \in Y$ , el nivel *Trend* y *Persistent* del objeto  $x_0$  para el atributo  $y$  en el intervalo  $[j, k]$  se define como:

$$TrendLevel_{j,k}(x_0)_y = \begin{cases} B_{k\{x_0\}}(y) - B_{j\{x_0\}}(y) & \text{si } y \in Trend_{j,k}(x_0) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$PerLevel_{j,k}(x_0)_y = \begin{cases} B_{k\{x_0\}}(y) - B_{j\{x_0\}}(y) & \text{si } y \in Persistent_{j,k}(x_0) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde  $y \in Trend_{j,k}(x_0)$  si  $y \in Trend(x_0)$  en el intervalo  $[j, k]$  e  $y \in Persistent_{j,k}(x_0)$  si  $y \in Persistent(x_0)$  en el intervalo  $[j, k]$ .

Análogamente, dados  $1 \leq j \leq k \leq n$ , podemos definir para cada  $y_0 \in Y, x \in X$  el nivel *Trend* y *Persistent* del atributo  $y_0$  para el objeto  $x$  en el intervalo  $[j, k]$ :

$$TrendLevel_{j,k}(y_0)_x = \begin{cases} A_{k\{y_0\}}(x) - A_{j\{y_0\}}(x) & \text{si } x \in Trend_{j,k}(y_0) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$PerLevel_{j,k}(y_0)_x = \begin{cases} A_{k\{y_0\}}(x) - A_{j\{y_0\}}(x) & \text{si } x \in Persistent_{j,k}(y_0) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde  $y \in Trend_{j,k}(x_0)$  si  $y \in Trend(x_0)$  en el intervalo  $[j, k]$  e  $y \in Persistent_{j,k}(x_0)$  si  $y \in Persistent(x_0)$  en el intervalo  $[j, k]$ .

A continuación, podemos definir el nivel *Trend* o *Persistent* de un objeto o de un atributo, agregando valores.

**Definición 14.** Para cada  $x_0 \in X, y_0 \in Y$ :

$$TrendLevel(x_0) = Agr_{y \in Y}(TrendLevel(x_0)_y)$$

$$TrendLevel(y_0) = Agr_{x \in X}(TrendLevel(y_0)_x)$$

$$PerLevel(x_0) = Agr_{y \in Y}(PerLevel(x_0)_y)$$

$$PerLevel(y_0) = Agr_{x \in X}(PerLevel(y_0)_x)$$

Al igual que en el caso anterior, podríamos dar estas definiciones para los contextos del intervalo  $[j, k]$ .

Esta definición nos permite establecer relaciones de preorden en el conjunto de objetos y de atributos de acuerdo con el incremento de su evolución positiva en el tiempo.

**Definición 15.** Dados  $z_i, z_j \in X$  o  $z_i, z_j \in Y$ , definimos las relaciones  $\leq_{TL}$  y  $\leq_{PL}$  como:

$$z_i \leq_{TL} z_j \text{ si } TrendLevel(z_i) \leq TrendLevel(z_j)$$

$$z_i \leq_{PL} z_j \text{ si } PerLevel(z_i) \leq PerLevel(z_j)$$



**Proposición 6.** Las relaciones  $\leq_{TL}$  y  $\leq_{PL}$  son preordenes.

*Demostración.* Ya que los valores de *TrendLevel* y *PerLevel* son valores en  $[0,1]$ , es obvio por la definición que se trata de relaciones reflexivas y transitivas. Sin embargo, no son relaciones de orden por no cumplirse la antisimetría.  $\square$

Utilizando  $\leq_{TL}$  y  $\leq_{PL}$  podemos también establecer rankings en el conjunto de objetos  $X$  y de atributos  $Y$  de nuestra sucesión de contextos. Aquellos objetos o atributos con mayores valores de *TrendLevel* y *PerLevel* serán los que hayan evolucionado de forma más positiva a lo largo del tiempo. La elección entre ambos rankings dependerá de nuestro nivel de exigencia.

Por otro lado, mediante las matrices *TrendLevelM* y *PerLevelM* podemos establecer relaciones en los conceptos *Trend* y *Persistent* definidos a partir de los contextos formales  $(X, Y, TM)$  y  $(X, Y, PM)$  que nos permitan establecer qué conceptos son más relevantes que otros. El procedimiento que seguiremos será el siguiente:

- (1) Obtención de las matrices *TrendLevelM* y *PerLevelM*
- (2) Obtención de las matrices *TM* y *PM*
- (3) Cálculo de los conceptos formales de los contextos formales  $(X, Y, TM)$  y  $(X, Y, PM)$
- (4) Cálculo del peso de cada concepto  $(A, B)$  de  $(X, Y, TM)$  y  $(X, Y, PM)$  definido como:

$$W_{TM}((A, B)) = \begin{cases} \sum_{x_k \in A, y_l \in B} TrendLevelM(x_k, y_l) & \text{si } A, B \neq \emptyset \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$W_{PM}((A, B)) = \begin{cases} \sum_{x_k \in A, y_l \in B} PerLevelM(x_k, y_l) & \text{si } A, B \neq \emptyset \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- (5) Ordenación de los conceptos formales de acuerdo con su peso estableciendo rankings.

#### IV. EJEMPLO PRÁCTICO

Vamos a mostrar la aplicación de los resultados utilizando el siguiente caso práctico:

Sea  $(L, X, Y, R_i), 1 \leq i \leq n$  una secuencia de contextos fuzzy que representa las ventas de artículos deportivos ( $X$ ) en establecimientos ( $Y$ ) a lo largo de un periodo de tiempo. Queremos estudiar los lugares y los artículos en los que ha habido un mayor incremento de ventas teniendo en cuenta que hay artículos que se venden sólo en ciertas estaciones (por ejemplo, skis o trajes de baño) y en ciertas zonas (es más posible vender skis en Colorado que en Florida). Tomaremos  $L = [0, 1]$ .

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0.7 & 1 & 0.8 \\ 0 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0 \end{pmatrix} R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 1 \\ 0.2 & 0.4 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$R_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.6 & 0.5 & 0.7 \\ 0 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix} R_4 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.6 \\ 0.1 & 0.5 & 0.3 \\ 0.6 & 0.8 & 0.8 \end{pmatrix}$$

$$R_5 = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 \\ 0.8 & 1 & 0.9 \end{pmatrix}$$

En este caso obtendríamos las siguientes matrices *Trend* y *Persistent* :

<i>TM</i>	$y_1$	$y_2$	$y_3$	<i>PM</i>	$y_1$	$y_2$	$y_3$
$x_1$	0	0	0	$x_1$	0	0	0
$x_2$	0	1	0	$x_2$	1	1	0
$x_3$	1	0	1	$x_3$	1	0	1

Vamos a continuar con el desarrollo para el contexto  $(X, Y, PM)$ , pudiendo hacer uno paralelo para  $(X, Y, TM)$ . Los conceptos formales de  $(X, Y, PM)$  son los siguientes:

- $(\{x_1\}, \emptyset)$
- $(\{x_2\}, \{y_1, y_2\})$
- $(\{x_3\}, \{y_1, y_3\})$
- $(\{x_2, x_3\}, \{y_1\})$
- $(\emptyset, \{y_1, y_2, y_3\})$

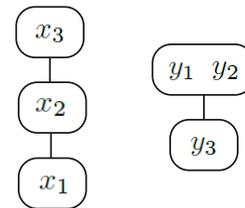
Podemos ahora calcular la matriz *PerLevelM*. El resultado es el siguiente:

<i>PerLevelM</i>	$y_1$	$y_2$	$y_3$
$x_1$	0	0	0
$x_2$	0.6	0.4	0
$x_3$	0.8	1	0.9

Si tomamos la media como agregación, obtenemos los valores:

- $PerLevel(x_1) = 0$
- $PerLevel(x_2) = 0.33$
- $PerLevel(x_3) = 0.9$
- $PerLevel(y_1) = 0.47$
- $PerLevel(y_2) = 0.47$
- $PerLevel(y_3) = 0.3$

que nos permiten establecer los siguientes rankings en el conjunto de objetos y de atributos:

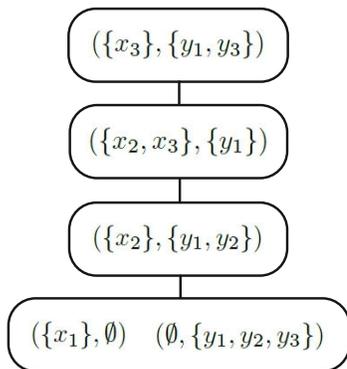


Por tanto, podemos decir que el artículo  $x_3$  y los establecimientos  $y_1$  e  $y_2$  son los que han experimentado en media un mayor incremento en sus ventas. En contra, el artículo  $x_1$  y el establecimiento  $y_3$  tienen los incrementos de ventas menores.

Por otra parte, utilizaremos la matriz *PerLevelM* para ordenar los conceptos de mayor a menor relevancia aplicando el procedimiento descrito en el apartado anterior:

- $W_{PM}((\{x_1\}, \emptyset)) = 0$
- $W_{PM}((\{x_2\}, \{y_1, y_2\})) = 1$
- $W_{PM}((\{x_3\}, \{y_1, y_3\})) = 1.7$
- $W_{PM}((\{x_2, x_3\}, \{y_1\})) = 1.4$
- $W_{PM}((\emptyset, \{y_1, y_2, y_3\})) = 0$

Por tanto, podemos establecer el siguiente ranking de conceptos (la relevancia de los distintos conceptos disminuye de arriba hacia abajo en el gráfico).



Como conclusión podríamos decir que: *El mayor incremento de ventas ha sido en del artículo  $x_3$  en las ciudades  $y_1$  e  $y_3$ . A continuación tendríamos los artículos  $x_2$  y  $x_3$  en  $y_1$ . Finalmente,  $x_2$  en  $y_1$  e  $y_2$ .*

#### V. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

En este trabajo hemos continuado con el estudio de tendencias en una sucesión de contextos  $L$ -fuzzy que representa la evolución en el tiempo de un contexto  $L$ -fuzzy. Con la introducción de los niveles de tendencias (*Trend* y *Persistence* Level) hemos podido establecer qué objetos y atributos son los que sus valores más han aumentado con el paso del tiempo. Además hemos introducido las Matrices *Trend* y *Persistent* level que nos han permitido establecer rankings en los conceptos formales que nos establecen las tendencias en la relación entre los objetos y los atributos de la sucesión de contextos  $L$ -fuzzy.

En el futuro queremos analizar no sólo tendencias positivas, sino también las negativas.

#### AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por el Grupo de Investigación “Sistemas Inteligentes y Energía (SI+E)” de la Universidad del País Vasco - UPV/EHU (Proyecto GIU 16/54), y por el Grupo de Investigación “Inteligencia Artificial y Razonamiento Aproximado” de la Universidad Pública de Navarra y el Gobierno Español (Proyecto TIN2016-77356-P (MINECO, AEI/FEDER, UE))

#### REFERENCIAS

- [1] C. Alcalde, A. Burusco:  $L$ -fuzzy context sequences on complete lattices, IPMU 2014, *Lecture Notes in Computer Science* Part III, CCIS 444, pp. 31–40, 2014.
- [2] C. Alcalde, A. Burusco: The use of two relations in  $L$ -fuzzy contexts, *Information Sciences* 301 (1), pp. 1–12, 2015.
- [3] C. Alcalde, A. Burusco, R. Fuentes-González, I. Zubia: Treatment of  $L$ -fuzzy contexts with absent values, *Information Sciences* 179 (1-2), pp. 1–15, 2009.
- [4] C. Alcalde, A. Burusco, H. Bustince, A. Jurio, J.A. Sanz: Evolution in time of the  $L$ -fuzzy context sequences, *Information Sciences* 326, pp. 202–214, 2016.
- [5] C. Alcalde, A. Burusco, R. Fuentes-González: The study of fuzzy context sequences *International Journal of Computational Intelligence Systems* 6 (3), pp. 518–529, 2013.
- [6] C. Alcalde, A. Burusco, R. Fuentes-González: Application of the  $L$ -fuzzy concept analysis in the morphological image and signal processing, *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence* 72 (1-2), pp. 115–128, 2014.
- [7] L. Antoni, S. Krajci, O. Kridlo, B. Macek, L. Pisková: On heterogeneous formal contexts, *Fuzzy Sets and Systems* 234, pp. 2–33, 2014.
- [8] R. Bělohlávek: Fuzzy Galois Connections, *Math. Logic Quarterly* 45 (4), pp. 497–504, 1999.
- [9] R. Bělohlávek, V. Vychodil: What is a fuzzy concept lattice, in *Proceedings of the Third International Conference on Concept Lattice and their Applications, CLA 2005*, Olomouc, Czech Republic, pp. 34–45, 2005.
- [10] A. Burusco, R. Fuentes-González: The Study of the  $L$ -fuzzy Concept Lattice, *Mathware and Soft Computing* 1 (3), pp. 209–218, 1994.
- [11] A. Burusco, R. Fuentes-González: Construction of the  $L$ -fuzzy Concept Lattice, *Fuzzy Sets and Systems* 97 (1), pp. 109–114, 1998.
- [12] A. Burusco, R. Fuentes-González: Concept lattices defined from implication operators, *Fuzzy Sets and Systems* 114 (1), pp. 431–436, 2000.
- [13] A. Burusco, R. Fuentes-González: The study of the interval-valued contexts, *Fuzzy Sets and Systems* 121, pp. 69–82, 2001.
- [14] C. Alcalde, A. Burusco, R. Fuentes-González: Application of OWA Operators in the  $L$ -fuzzy Concept Analysis in *Aggregation Functions in Theory and Practice*. Book Series: Advances in Intelligent Systems and Computing 228, pp. 129–140, 2013.
- [15] P. Butka, J. Pócs, J. Pósová: On equivalence of conceptual scaling and generalized one-sided concept lattices, *Information Sciences* 259, pp. 57–70, 2014.
- [16] Y. Djouadi, H. Prade: Interval-Valued Fuzzy Galois Connections: Algebraic Requirements and Concept Lattice Construction, *Fundamenta Informaticae* 99 (2), pp. 169–186, 2010.
- [17] Y. Djouadi, H. Prade: Possibility- theoretic extension of derivation operators in formal concept analysis over fuzzy lattices, *FODM* 10 (4), pp. 287–309, 2011.
- [18] B. Ganter, R. Wille: Formal concept analysis: Mathematical foundations, Springer, Berlin - New York, 1999.
- [19] J. Konecny: Isotone fuzzy Galois connections with hedges, *Information Sciences* 181 (10) pp. 1804–1817, 2011.
- [20] H. Lai, D. Zhang: Concept lattices of fuzzy contexts: Formal concept analysis vs. rough set theory, *International Journal of Approximate Reasoning* 50 (5) pp. 695–707, 2009.
- [21] F. Lehmann, R. Wille: A triadic approach to Formal concept analysis, *Conceptual structures: applications, implementation and theory*, Lecture Notes in Artificial Intelligence 954, pp. 32–43, 1995.
- [22] I. Lizasoain, C. Moreno: OWA operators defined on complete lattices, *Fuzzy Sets and Systems* 224, pp. 36–52, 2013.
- [23] J. Medina: Multi-adjoint property-oriented and object-oriented concept lattices, *Information Sciences* 190, pp.95–106, 2012.
- [24] J. Medina, M. Ojeda-Aciego, J. Ruiz Calvino: Formal concept analysis via multi-adjoint concept lattices, *Fuzzy Sets and Systems* 160 (2), pp. 130–144, 2009.
- [25] J. Medina, M. Ojeda-Aciego: Multi-adjoint  $t$ -concept lattices, *Information Sciences* 180 (5), pp. 712–725, 2010.
- [26] J. Medina, M. Ojeda-Aciego, Dual multi-adjoint concept lattices, *Information Sciences* 225, 47–54, 2013.
- [27] R. Neouchi, A. Y. Tawfik, R. A. Frost: Towards a Temporal Extension of Formal Concept Analysis. In *Proceedings of Canadian Conference on Artificial Intelligence*, pp. 335–344, 2001.
- [28] A. Y. Tawfik, G. Scott: Temporal Matching under Uncertainty. In *Proceedings of the Eighth International Workshop on Artificial Intelligence and Statistics*, 2001.
- [29] R. Wille: Restructuring lattice theory: an approach based on hierarchies of concepts, in: *Rival I. (Ed.), Ordered Sets, Reidel, Dordrecht-Boston*, pp. 445–470, 1982.
- [30] K. E. Wolff: States, Transitions, and Life Tracks in Temporal Concept Analysis, *Formal Concept Analysis*, pp. 127–148, 2005.
- [31] K. E. Wolff: Temporal Relational Semantic Systems, *ICCS*, pp. 165–180, 2010.
- [32] R.R. Yager: On ordered weighted averaging aggregation operators in multi-criteria decision making, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* 18, pp. 183–190, 1988.
- [33] R.R. Yager: Families of OWA operators, *Fuzzy Sets and Systems* 59, pp. 125–148, 1993.



# Procesamiento Semántico Difuso Aplicado a un Modelo de Análisis de Textos basado en Grafos

Wenny Hojas-Mazo, Alfredo Simón-Cuevas  
Universidad Tecnológica de La Habana “José Antonio Echeverría”, Cujae  
Ave. 114, No. 11901, CP: 19390, La Habana, Cuba  
{whojas, asimon}@ceis.cujae.edu.cu

José A. Olivas, Francisco P. Romero  
Universidad de Castilla La Mancha  
Paseo de la Universidad, 4, Ciudad Real, España  
{JoseAngel.Olivas, FranciscoP.Romero}@uclm.es

**Resumen**— La obtención de información relevante y conocimiento en textos aún constituye un gran desafío. En este trabajo, se presenta un enfoque de análisis de textos basado en grafos, soportado en el procesamiento semántico difuso del contenido. En esta propuesta se combinan procesos de consultas sobre los grafos obtenidos de los textos, la recomendación de conceptos relevantes y la recuperación de pasajes de texto, incluyendo mecanismos de integración semántica de los grafos como parte de las consultas. La propuesta fue evaluada en el análisis de artículos científicos con resultados prometedores.

**Palabras clave** — análisis de textos; representación de textos en grafos; análisis semántico difuso; integración semántica de grafos

## I. INTRODUCCIÓN

El gran volumen de información no estructurada actualmente disponible en textos constituye un recurso muy valioso. El procesamiento y análisis efectivo de esas fuentes textuales, para obtener información relevante y conocimiento, aún es una tarea desafiante, demandándose mayor atención a las soluciones de minería de texto [1]. Los textos han sido procesados usando diferentes tipos de representación, donde las bolsas de palabras y los modelos vectoriales son los más usados, fundamentalmente en la recuperación de información. Sin embargo, estas soluciones se enfocan más en facilitar el acceso a los textos, y no en el análisis de su contenido para descubrir patrones y conocimiento, siendo este uno de los objetivos principales del análisis de textos. En este sentido, el uso de grafos surge como alternativa prometedora para el análisis y exploración de las estructuras conceptuales de los textos [13].

En este trabajo, se presenta un modelo de análisis de textos basado en grafos, en el que se propone un enfoque difuso para el tratamiento semántico del contenido. En este modelo, el contenido conceptual de los textos es representado en grafos, y se combina el uso de consultas sobre los grafos, la identificación de conceptos relevantes y la recuperación de pasaje, para obtener estructuras conceptuales interesantes e información textual útil asociada. Las consultas están concebidas sobre la base de la integración semántica de los grafos, para lo cual se propone un enfoque difuso mediante la aplicación de la agregación compensatoria [22] de medidas de similitud sintáctica y semántica. Este enfoque ofrece mayor diversidad, en cuanto al análisis del contenido textual, respecto a lo reportado en [5][21][12]. La aplicabilidad del modelo

propuesto se evaluó en las tareas de extracción y síntesis de datos en la revisión sistemática de la literatura (SRL: *Systematic Literature Review*) reportada en [8], para soportar estas tareas al recuperar información relevante que apoye a los revisores en la extracción de datos de los artículos y la búsqueda de respuestas a las preguntas de investigación planteadas. El desarrollo de este caso de estudio ejemplifica como el modelo propuesto ofrece soporte computacional a las tareas de extracción y síntesis de datos en una SRL. Las principales contribuciones de este trabajo se resumen en: (1) la aplicación de la lógica difusa en la integración semántica de grafos, basada en la agregación compensatoria [22] de medidas de similitud sintáctica y semántica para evaluar la similitud entre conceptos en los grafos; y (2) la combinación de técnicas de análisis de grafo, tales como: consultas e identificación de conceptos relevantes, y la recuperación de pasajes de texto, para obtener estructuras conceptuales interesantes e información textual útil asociada.

El resto del trabajo está organizado de la siguiente manera: la Sección 2 expone algunos fundamentos teóricos del problema; la Sección 3 describe el enfoque propuesto; la Sección 4 presenta los resultados del caso de estudio desarrollado; y la Sección 5 expone las conclusiones arribadas e ideas de trabajo futuro.

## II. ANÁLISIS DE TEXTOS MEDIANTE GRAFOS

La representación de textos basada en grafos evita la pérdida de información contextual y semántica del contenido, y reduce la dispersión de los conceptos y la información en su procesamiento. A través de un grafo, el texto se reduce a un número relativamente pequeño de conceptos y relaciones, por lo que una colección de textos puede ser fácilmente manejada y analizada computacionalmente. En este sentido, el empleo de técnicas y herramientas de procesamiento de grafos facilita la obtención de información y conocimiento a partir de esa representación, así como realizar análisis cualitativos y cuantitativos sobre los conceptos incluidos en un texto, para identificar conceptos fuertemente relacionados, estructuras conceptuales interesantes, conceptos relevantes, entre otras. Las operaciones sobre los grafos (ej. Unión) son una de esas herramientas útiles en este sentido [21]. Estos beneficios se evidencian en: detección de tópicos [7], la recuperación de información [4][14], y en varias revisiones [11][7][21]. Sin

embargo, solo se identificaron dos soluciones orientadas al análisis del contenido de textos representados en grafos y enfocada a conceptos [5][12].

En [5] se propone un enfoque basado en la construcción automática de grafos etiquetados con n-gramas de tamaño variable a partir de textos y en la aplicación de operaciones sobre los mismos para identificar y representar los tópicos principales de uno o más textos. En la construcción del grafo, el texto se segmenta en oraciones y se extraen los tokens, y estos son clasificados en: Ignorar (determinantes, pronombres y adverbios), Arco (conjunciones, preposiciones y verbos) y Nodo (secuencia de tokens no asociada a los anteriores), siendo estos dos últimos los utilizados para construir el grafo. Este método solo extrae relaciones explícitas del texto, por lo que es susceptible a que se representen elementos aislados en el grafo, lo cual impacta negativamente en los resultados del análisis a realizar a través de consultas y algoritmos de identificación de conceptos relevantes representados en grafos. En la modelación de los tópicos, inicialmente se genera un grafo por cada documento, luego se integran los grafos en uno solo aplicando la operación Unión. Posteriormente, se obtiene un ranking de relevancia de los nodos del grafo resultante y se aplica la operación de Proyección sobre los  $k$  nodos más relevantes, para obtener un sub-grafo que modela los tópicos. En esta propuesta, la integración de los grafos que se produce en la operación de Unión se basa en la equivalencia sintáctica de los nodos, sin considerar la semántica subyacente. Esto representa una debilidad, ya que se puede producir la integración de contenidos sin vínculos semánticos entre ellos, dado que los conceptos representados en los nodos pueden estar sujetos a ambigüedades. Este problema es solucionado de alguna manera en [12], donde se propone un enfoque similar de análisis a partir de grafos construidos automáticamente de los textos, pero más enfocado al análisis de conceptos y ofreciendo un mecanismo de operaciones de consulta sobre grafos más abarcador y flexible, que incluye operaciones de: Unión, Intersección y Proyección. En el caso de esta última, se ofrece mayor facilidad al usuario, ya que estos son los que seleccionan los conceptos de interés sobre los que se desea realizar el análisis. En esta solución, se incluye un método de análisis semántico para la búsqueda e integración de estructuras conceptuales de los grafos, soportado por un algoritmo de desambiguación y WordNet, el cual se aplica en el procesamiento de cada consulta. No obstante, también con la desventaja de que, como se plantea en [18], el tratamiento de la semántica basada en la desambiguación aumenta la complejidad de la solución y los recursos de cómputo requeridos, sugiriéndose el uso de técnicas de evaluación de similitud semántica, tales como las basadas en WordNet [20]. Además, estas soluciones no brinda una forma para conocer las fuentes textuales de las cuales provienen los conceptos y/o temas relevantes o de contexto, lo cual enriquecería y proporcionaría más fiabilidad al análisis de texto.

### III. MODELO DE ANÁLISIS PROPUESTO

El modelo incluye tres procesos fundamentales: representación de textos, análisis de grafos y recuperación de pasajes, e integra varios recursos de conocimiento, según se muestra en la Fig. 1. El primero, tiene el objetivo de estructurar

el contenido textual mediante su representación en forma de grafo, a partir del cual se conforma un Repositorio de Grafos de Conocimiento (RGC), y usando n-gramas para la indexación de los textos. Los restantes procesos ofrecen la posibilidad al usuario de recuperar información relevante y obtener conocimiento desde esos contenidos estructurados, a través de consultas sobre el RGC, la identificación y recomendación de conceptos relevantes y la recuperación de pasajes de textos donde aparecen conceptos de interés. Este último da un valor agregado al análisis de conceptos con respecto al resto de las propuestas, pues permite identificar las fuentes textuales donde aparecen los conceptos, obteniendo un análisis más detallado.

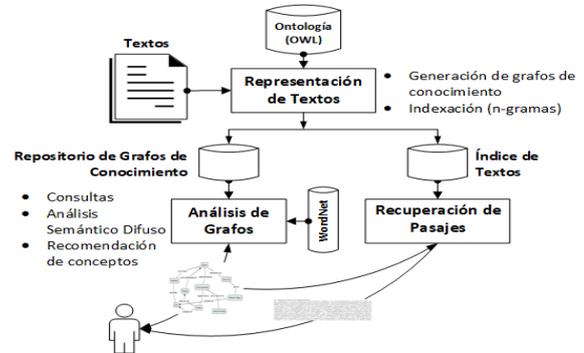


Fig. 1. Visión general del modelo propuesto

#### A. Representación de los Textos

En este proceso, el contenido de los textos es representado mediante dos esquemas: (1) grafos y (2) n-gramas, siendo el primero de ellos, la principal fuente de análisis del contenido textual. La generación del grafo está concebida de forma similar a lo reportado en [12], en tres fases: pre-procesamiento, extracción de conceptos y de relaciones. En el pre-procesamiento, se extrae la información sintáctica y gramatical del texto usando varias técnicas de procesamiento de lenguaje natural (NLP: *Natural Language Processing*) a través de FreeLing, en especial el análisis de dependencia, que aunque es más costoso computacionalmente que el análisis superficial ha dado mejores resultados [10]. Los conceptos se extraen empleando un conjunto de patrones léxico-sintácticos (representan mayoritariamente frases sustantivas) y a través del vocabulario representado en una ontología suministrada por el usuario (preferiblemente del mismo ámbito del texto). La extracción de relaciones abarca la identificación de relaciones explícitas e implícitas entre los conceptos identificados. Las explícitas se extraen de cada oración usando también patrones léxico-sintácticos y las implícitas (conectan conceptos que aparecen en diferentes partes del texto) se extraen mediante la técnica de string matching, el análisis de la proximidad entre conceptos en el texto y tenido en cuenta relaciones representadas en la ontología (si es suministrada). Este último tipo de relaciones permite incrementar la cobertura del texto, en cuanto a la representación de su contenido, aspecto clave para aumentar la eficacia en su análisis. Luego de la extracción de los conceptos y relaciones, se eliminan redundancias e inconsistencias, y se genera el grafo de cada texto. El uso de n-gramas está motivado por la necesidad de crear un índice de los textos, que permita la recuperación de contenidos textuales asociados a conceptos recuperados como resultados de las



consultas a los grafos, siendo esta una funcionalidad a través de la cual se extiende lo reportado en [12]. Los conceptos representados en los grafos pueden constituir secuencias de tokens dentro de las oraciones, por tanto, el uso de n-gramas facilita la recuperación de aquellas oraciones en las cuales estén presentes esos conceptos. La indexación se lleva a cabo segmentando los textos en oraciones, extrayendo de ellas los n-gramas (1-, 2-, y 3-gramas) y almacenándolas con esa estructura en un índice de Lucene. Ambos procesos de estructuración del contenido de los textos se ejecutan en paralelo.

## B. Análisis de Grafos

El proceso de análisis de grafos se lleva a cabo mediante un mecanismo de consultas basado en [5][12], con la diferencia de que en esta nueva solución se propone un enfoque difuso para realizar el análisis semántico que se lleva a cabo en la integración de los grafos, como parte del procesamiento de las consultas. Adicionalmente, se incluye la identificación y recomendación de conceptos relevantes mediante la obtención de un ranking de conceptos, similar a lo reportado en [5], pero teniendo en cuenta como elementos: la frecuencia de aparición de los conceptos en los textos y la relevancia obtenida por el algoritmo PageRank [6], aplicado sobre el grafo que representa el contenido de la colección de textos.

### 1) Consultas

A través de estas consultas, se puede recuperar información relevante y obtener conocimiento desde un espacio de búsqueda especificado por el usuario y constituido por un conjunto de grafos almacenados en el RGC. El resultado de las consultas se puede expresar en conceptos individuales y/o estructuras conceptuales en forma de grafo. El procesamiento de las consultas incluye tareas de búsqueda e integración de información, por lo que, aunque los conceptos recuperados estén presentes en diferentes fuentes textuales, estos pueden ser integrados en el resultado final, propiciando así la generación de conocimiento. Los tipos de consultas incluidas en este proceso son: Unión, Intersección y Proyección.

La unión de dos grafos  $G_1 = (N_1, E_1)$  y  $G_2 = (N_2, E_2)$  se denota como  $G_1 \cup G_2$  y de la misma manera  $(N_1 \cup N_2, E_1 \cup E_2)$ . El grafo unión se puede ver como una forma de mezclar dos grafos sin ninguna pérdida de información (es decir, sin excluir ningún nodo  $N_i$ , ni arco  $E_i$ ). Por tanto, es un operador útil para mezclar información de múltiples documentos de texto [5]. En efecto, si se considera el corpus  $D = \{d_1, \dots, d_n\}$  y si  $G_i$  denota el modelo de grafo correspondiente para cada  $d_i$ , entonces la información combinada del corpus se puede representar por:

$$G_D = \bigcup_{i=1}^n G_i$$

Esta representación conlleva un rápido crecimiento del número de nodos y por consiguiente la obtención de una cantidad abrumadora de información. Por tanto, el uso de la unión de grafos para mezclar documentos textuales requiere típicamente post-procesamiento con un operador que extraiga la información relevante del grafo combinado [5].

La *Intersección (Inter)* permite recuperar conceptos y estructuras conceptuales comunes a un % (cota mínima) de los grafos que conforman el espacio de búsqueda, el cual requiere ser especificado por el usuario como parámetro, y es definido como Valor de Soporte (VS) [12]. La *Proyección (Proj<sup>R</sup>)*, en sus diferentes variantes, permite recuperar las estructuras conceptuales asociadas a determinados conceptos de interés especificados por el usuario, considerando diferentes niveles de vecindad (denotado por  $R$ ); el cual también es especificado por el usuario. Se utilizan tres tipos de consultas *Proyección*, para ofrecer diferentes perspectivas de recuperación de información, considerando sobre el concepto de interés: (1) solo enlaces de entrada ( $Proj^{R, IN}$ ); (2) solo enlaces de salida ( $Proj^{R, OUT}$ ); y (3) todos los tipos de enlaces ( $Proj^R$ ). Las primeras dos, son útiles para analizar los niveles de autoridad o centralidad de los conceptos de interés, respecto a otros conceptos con los que está relacionado en el texto; inspirado en los conceptos de Kleinberg [16]. Notar que esta consulta puede conducir a un subgrafo que formado por varios componentes (mutuamente desconectados). La *Intersección* y *Proyección* también ofrecen la posibilidad de obtener automáticamente resúmenes de la colección de textos, desde diferentes perspectivas, ya sea general (*Intersección*) o enfocados a conceptos de interés (*Proyección*).

### 2) Análisis Semántico Difuso

En el modelo propuesto, el proceso análisis semántico se lleva a cabo con el objetivo de integrar la información contenida en la colección de textos a través de la integración de los grafos que representan sus estructuras conceptuales. Este proceso se ejecuta como parte del procesamiento de las consultas definidas para la obtención de resultados sobre un contenido semánticamente integrado, aunque provenga de fuentes textuales diferentes. La integración de los grafos está basada en la integración de conceptos semánticamente similares. En [12] este proceso se realiza a partir de la identificación del sentido en WordNet de los conceptos (usando un algoritmo de desambiguación) y la unificación de aquellos que tengan el mismo significado. Sin embargo, el análisis semántico de la información textual, a nivel del significado de las palabras, está usualmente sujeto a la subjetividad, vaguedad y problemas de imprecisión, dada la inherente ambigüedad del lenguaje natural. Debido a esto y a las limitaciones mencionadas sobre el uso de algoritmos de desambiguación en este tipo de enfoques, es que se decide tratar este problema desde la perspectiva de la lógica difusa.

En esta nueva propuesta, el análisis de la similitud semántica difusa entre los conceptos se lleva a cabo mediante la combinación de la medida de similitud sintáctica de Levenshtein [17], con otras tres medidas de similitud semántica definidas sobre la base de lo reportado en [18] para medir la similitud sentencia-a-sentencia y varias de las medidas disponibles en el paquete WordNet::Similarity [20] (Resnik - R, Lin - LIN, and Jiang & Conrath - J & C)); un enfoque similar se aplica en [2]. Esta combinación se realiza a través de la función de agregación compensatoria reportada en [22] (ecuaciones 1 y 2) y la *t-norma* algebraica descrita en la ecuación (3), obteniendo un solo valor de similitud entre conceptos a partir de los valores numéricos ( $s_i$ ) resultantes de

cada medida. En el campo de la medición de similitud semántica, las funciones de agregación son generalmente definidas y usadas para combinar varios valores numéricos, a partir de la agregación de los resultados de diferentes medidas de similitud semántica para obtener un único valor resultante [19]. El flujo de esta propuesta se muestra en Fig. 2, y la misma permite reducir los efectos negativos derivados de la incertidumbre que se produce en la decisión sobre qué medidas son más relevantes y el peso que ha dicha relevancia se asigna.

$$Z_\gamma(s_1, s_2, \dots, s_n) = \left( \prod_{i=1}^n s_i \right)^{1-\gamma} * \left( 1 - \prod_{i=1}^n (1 - s_i) \right)^\gamma \quad (1)$$

$$\gamma = \frac{T(s_1, s_2, \dots, s_n)}{T(s_1, \dots, s_n) + T(1 - s_1, \dots, 1 - s_n)} \quad (2)$$

$$T(s_1, s_2, \dots, s_n) = \prod_{i=1}^n s_i \quad (3)$$

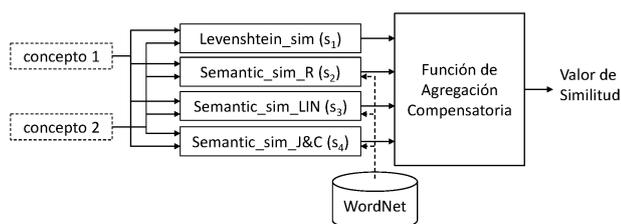


Fig. 2. Flujo de trabajo para la evaluación de la similitud entre conceptos.

En la integración de información entre dos grafos  $G_1$  y  $G_2$  se define un umbral  $U$ , que representa el valor mínimo de similitud existente entre dos nodos-conceptos para ser integrados. Cada nodo del grafo puede agrupar uno o varios conceptos en dependencia de las integraciones anteriores. En este proceso, se mide la similitud entre cada nodo  $N_i$  de  $G_1$  y todos los nodos de  $G_2$  y luego se integran aquellos nodos que tengan una similitud igual o superior a  $U$ . Este proceso se ejecuta iterativamente hasta que se compare el último nodo  $N_i$  con todos los nodos de  $G_2$ . La ecuación (4) describe el cálculo de la similitud entre dos nodos  $N$  y  $M$ , donde  $N$  está formada por el conjunto de conceptos  $\{cn_1, cn_2, \dots, cn_n\}$  y  $M$  por otro conjunto de conceptos  $\{cm_1, cm_2, \dots, cm_m\}$ . Donde  $simSD$  es la función de agregación descrita anteriormente y  $ln$  y  $lm$  las cantidades de conceptos en los nodos  $N$  y  $M$ . Los nodos con etiqueta  $l_r$ , representan el primer concepto del grupo y estos conceptos se representan a su vez por conceptos separados por una coma y encerrados entre [ ] (ej.  $[c_1, c_2]$ ).

$$sim(N, M) = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m simSD(cn_i, cm_j)}{ln * lm} \quad (4)$$

Los conceptos representados en un mismo nodo se consideran que tienen una fuerte relación de sinonimia y por tanto, de esa manera son tratados en el modelo de recuperación concebido como parte de las consultas de *Proyección* ( $Q$ ). En este tipo de consultas el usuario especifica uno o varios conceptos de interés ( $CQ$ ), y selecciona un conjunto de grafos del RGC para formar el espacio de

búsqueda ( $G_D$ ). Se definieron varias reglas para identificar si un nodo  $n_j / n_j \in N^{Gd}$  es recuperado o no, a partir del concepto  $c_i \in CQ$ . Estas reglas son ejecutadas en el mismo orden en que aparecen. Siendo, los conceptos  $a / a \in CQ$ , y  $b / b \in N^{Gd}$ ,  $T(c_i)$  el conjunto de palabras que conforman  $c_i$ ,  $l_r(b)$  la etiqueta representativa del nodo  $n_j$  y  $ST(n_i)$  el grupo de conceptos de  $n_i$ . El nodo  $b$  es recuperado si: ( $R_1$ )  $a \equiv l_r(b)$  (sintácticamente); o ( $R_2$ )  $a \in T(l_r(b))$ ; o ( $R_3$ )  $a \in ST(b)$ . Este tipo de consultas requiere que el usuario conozca los CQ que serán objeto de análisis. En tal sentido, se incorpora al modelo un mecanismo de identificación y recomendación de conceptos relevantes, el cual se describe a continuación.

### 3) Identificación y Recomendación de conceptos

En este proceso se obtiene un ranking de los  $k$  conceptos más relevantes de la colección de textos, teniendo en cuenta como criterios: frecuencia de aparición de los conceptos en los textos y la relevancia de los conceptos en el grafo que representa el contenido de la colección de textos. La frecuencia de aparición de los conceptos se computa en el mismo proceso de integración de los grafos generados que se ejecuta como parte de la *Unión*, a partir de esta consulta se extraen y ordenan los  $k$  conceptos más frecuentes de forma descendente para ser mostrados al usuario. La identificación de conceptos relevantes de acuerdo al segundo criterio se lleva a cabo mediante la aplicación del algoritmo PageRank [6] sobre el grafo resultante de la operación de *Unión*, en el cual está representada la conceptualización de la colección de textos. De la misma forma, como resultado se muestra al usuario de forma ordenada descendente los  $k$  conceptos con mayor valor de relevancia, según el PageRank. Esta funcionalidad potencia el uso de las consultas de *Proyección*, ya que el resultado de estos procesos sirve de guía al usuario en cuanto al análisis de los textos sobre la base de disponer de información sobre los conceptos más relevantes y representativos de la colección.

### C. Recuperación de Pasajes

La inclusión de este proceso tiene el objetivo de ofrecer al usuario la posibilidad de recuperar fragmentos de textos de las fuentes primarias de información, a partir de conceptos representados en el grafo resultante de las consultas definidas para el análisis de los grafos, mediante el uso de Lucene. La forma en que se utiliza la recuperación de pasajes en este trabajo también puede considerarse como un tipo de análisis de grafos, pues se está analizando el grafo con respecto a los textos. En este caso, las consultas se construyen a partir de la selección por el usuario, de conceptos y/o proposiciones de interés representados en el grafo y se utiliza el conjunto de conceptos agrupados en un mismo nodo del grafo, para ejecutar un proceso de expansión de las consultas. Además, se emplea el operador *OR* para los conceptos de la consulta y *AND* para las proposiciones. La construcción de los pasajes se lleva a cabo a partir de la identificación de oraciones centrales en el Índice de Textos, las cuales pueden ser expandidas según el tamaño del pasaje ( $PS$ ) especificado por el usuario. La oración central constituye la oración en la que aparecen los conceptos incluidos en la consulta, según el operador utilizado.  $PS$  se define como la cantidad máxima de oraciones que conforma el pasaje, y como este valor numérico puede ser par o impar, se



definieron reglas para determinar la cantidad real de oraciones (adyacentes a la oración central) a ser incluidas en el pasaje: (R1) Si  $PS = 1$  entonces se devuelve la oración central; (R2) Si  $PS$  es par entonces se incluyen las  $PS/2$  oraciones anteriores a la oración central y las  $(PS/2)-1$  oraciones contiguas; y (R3) Si  $PS$  es impar entonces se incluyen  $PS/2$  oraciones anteriores y contiguas a la oración central. Como resultado, por cada concepto y/o proposición, se muestran los pasajes de texto recuperados, los identificadores de los textos fuentes y la cantidad de pasajes recuperados por cada uno, resaltando los conceptos incluidos en la consulta.

#### IV. EVALUACIÓN DEL MODELO PROPUESTO: CASO DE ESTUDIO

La evaluación experimental de esta propuesta resulta compleja debido, fundamentalmente, a la ausencia de métodos y colecciones de evaluación estandarizados para este tipo de soluciones, en especial para la representación del texto [10], de la cual depende en gran medida el resto de los procesos. La evaluación de la recuperación de información suele enfocarse en la medición de resultados a partir de los documentos recuperados dado una consulta, y no a estructuras conceptuales incluidas en ellos, como se pretende con esta propuesta. En este sentido, se decidió aplicar un enfoque de evaluación similar a [12], en el contexto de las SLR.

La SLR es un medio de identificación, interpretación y evaluación de la evidencia científica relevante sobre una pregunta de investigación, tópico o fenómeno de interés [15]. Muchas de las tareas de la SLR, como la extracción y síntesis de datos, requieren alto consumo de tiempo, y mucho trabajo manual, implicando un gran esfuerzo [3]. En la extracción de datos se extraen de cada uno de los estudios un conjunto de datos (ej. bibliográficos, cuantitativos y cualitativos) que se definen en la fase de planificación en forma de un formulario. En la síntesis se combinan estos datos para darle respuesta a las preguntas de investigación iniciales. Este caso de estudio se enfoca en las tareas de extracción y síntesis de datos de la SLR reportada en [8], donde se analizan 11 artículos científicos. El objetivo del caso de estudio es ejemplificar la aplicabilidad del modelo propuesto para las tareas mencionadas. A partir de esos artículos, se conformaron 11 textos, con 822 palabras y 33 oraciones cada uno (como promedio) usando las secciones de resumen, introducción y conclusiones de cada artículo. Según la propuesta, inicialmente se indexan los textos y se generan los grafos a partir de ellos, constituyéndose el Índice y el RGC.

El modelo propuesto permite soportar y combinar la extracción y síntesis de datos mediante la utilización y combinación de sus principales procesos. La aplicación de la consulta de intersección (*Inter*) (similar a [12]) y el uso de la recomendación de conceptos, obtienen los conceptos que tienen una frecuencia igual o superior al *SV* en la colección de textos y las relaciones entre ellos representadas en los grafos. Estos conceptos pueden considerarse palabras claves o terminología que caracteriza ese contenido, y permitan responder a las preguntas de investigación. En la Fig. 3 se ejemplifica el resultado de la consulta *Inter*<sup>50</sup>(RGC), donde el tamaño de los nodos representa el nivel de frecuencia de los conceptos. En esta Fig. se identifican [software], [dependability, reliability] e [ISO] como conceptos más

relevantes, lo que se corrobora con el título del artículo [8], donde tres de ellos aparecen. En este ejemplo, también se ilustran resultados del análisis semántico difuso en la unificación de 'dependability' y 'reliability', lo cual contribuye a conocer rápidamente la terminología usada para referirse al mismo concepto. La relación 'strong relation' indica que los conceptos [software] e [ISO] tienen una fuerte relación contextual, sugiriendo un análisis adicional, que puede soportarse con el uso de la *Proyección* y/o la recuperación de pasajes. El uso de la recuperación de pasajes en este trabajo brinda, a diferencia de las otras propuestas, la posibilidad de conocer en que fuentes se encuentran los conceptos y su contexto, permitiendo extraer datos que se requieran para llenar los formularios de los estudios, y así poder registrar esta información. Además, de las etiquetas de los campos del formulario pueden obtenerse conceptos de referencia que sirvan de base al modelo para obtener información, principalmente cualitativa, que sirva tanto para la extracción como para la síntesis de datos.

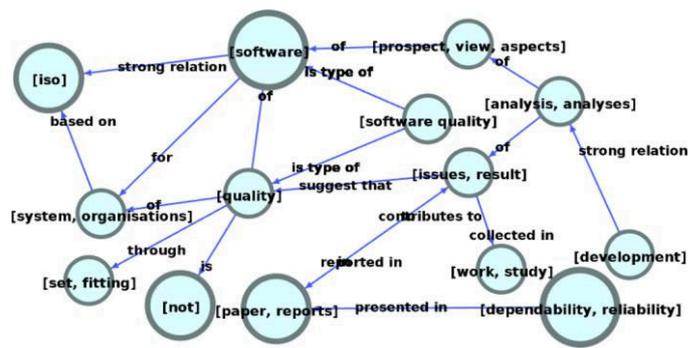


Fig. 3. Resultado de la consulta *Inter*<sup>50</sup>(RGC).

Al tener identificados conceptos de interés se puede aplicar la consulta de *Proyección*, así como la recuperación de pasajes para profundizar en el análisis de los mismos. En este caso, se ejecutó esta consulta usando el RGC como espacio de búsqueda y 'standard' como concepto de interés (*Proj*<sup>1</sup>(RGC, standard)), respondiendo a la pregunta: "Which software reliability models have been developed by following the recommendations in International Standards?" [8], donde 'standard' es uno de los términos relevantes. El resultado se muestra en la Fig. 4, donde se representan varios conceptos relacionados con 'standard' y asociados a 'International Standards', tales como: ISO, IEEE, SQuaRE, y COSMIC. En la Fig. 4 se representan también conceptos presentes en diferentes fuentes textuales, lo cual es posible a partir del análisis semántico difuso concebido. Este análisis se complementó con la recuperación de los pasajes, donde aparecen algunos de los conceptos representados en la Fig. 4 (se muestra en la misma figura), y puede ser utilizado en la extracción de datos para conocer en estudios aparecen los distintos estándares. Los resultados expuestos reflejan beneficios de la propuesta como soporte a las SLR para las tareas de extracción y síntesis de datos a partir del análisis del contexto en el que están siendo usados los conceptos, la obtención de vistas resumidas y sintetizadas del contenido, que facilitan el análisis cualitativo y cuantitativo sobre los conceptos, entre otros aspectos.





# Definición de particiones difusas condicionadas usando transformadas difusas.

Nicolás Madrid  
Departamento de Matemática Aplicada  
Universidad de Málaga  
Málaga, España  
nicolas.madrid@uma.es

Sergio Díaz-Gómez  
Universidad de Málaga  
Málaga, España  
sergiodg96@hotmail.com

**Abstract**—Las particiones difusas pueden definirse de diferentes formas, pero casi siempre, la definición se efectúa atendiendo a las características generales de la totalidad del universo. En este trabajo se presenta un método para definir particiones difusas condicionadas a la satisfacción de cierto atributo difuso. En concreto, se muestra cómo definir diferentes particiones difusas atendiendo a las características de diferentes subconjuntos difusos del universo.

## I. INTRODUCTION

Todo sistema difuso consta de tres partes bien conocidas: *fuzzificación*, *inferencia* y *defuzzificación*. En muchos casos, estos tres pasos se apoyan en uno de los conceptos más importantes del paradigma de los sistemas difusos: la partición difusa.

Aunque la definición de partición difusa difiere según diferentes autores (ver [2], [4], [5], [10]), en general la idea es dividir al universo de discurso en una serie de clases difusas (normalmente asociados a etiquetas lingüísticas). Existen multitud de formas de definir particiones difusas sobre un universo  $\mathcal{U}$ . La más conocida, que no necesariamente la más conveniente, es la familia de particiones dadas por expertos. Éste tipo de particiones es útil cuando la partición viene dada por conceptos lingüísticos propios del ser humano sin sustento científico ni definición formal; como pueden ser la división del día en intervalos de tiempo vagos como la mañana, tarde, noche, etc; la división de vegetales en fruta o verdura; o la clasificación de animales en mascotas.

Otra familia de particiones difusas muy utilizada es la constituida por las particiones uniformes. Éstas dividen el universo de manera homogénea en espacio y forma. A pesar de su simplicidad, han mostrado ser de gran utilidad para muchas tareas, como puede comprobarse en el área de procesamiento de imágenes [9].

Con el fin de definir particiones difusas óptimas para ciertas tareas, se han definido algoritmos automatizados para el cálculo de particiones basados en clustering y/o estadística [10], [3]. Sin entrar en detalles, estos algoritmos consideran uno o varios atributos de los elementos del universo y calculan parámetros de referencia (clusters o parámetros estadísticos) que se utilizan para la definición de las clases que definirán la partición. Como ejemplo, las particiones basadas

en clustering han mostrado ser útiles para la obtención de reglas difusas [1], [6].

Independientemente de cómo se defina la partición, es obvio que ésta depende de un contexto. Supongamos que deseamos tener una partición difusa del atributo altura para personas. En este caso, la clase de *personas altas*, que podría ser una clase de dicha partición difusa, depende claramente del contexto: no es lo mismo una persona alta en una liga de baloncesto, en un campeonato de hípica o en un colegio de primaria. En la mayoría de los casos, este contexto está implícito en la tarea a resolver y, aunque no se mencione, se considera en la definición de la partición. Por ejemplo, si el sistema difuso se plantea para clasificar alumnos con sobrepeso de un colegio de primaria, de nada sirve considerar el concepto de altura que pueda derivarse de un contexto de liga profesional de baloncesto.

En este trabajo proponemos posibilitar el uso de diferentes particiones difusas dependiendo del contexto. Siguiendo el ejemplo anterior, si queremos un sistema difuso para clasificar personas con sobrepeso, sería interesante disponer de multitud de particiones difusas acorde al contexto al que dicha persona pertenezca. Así, el sistema utilizaría una partición diferente si la persona es un alumno de primaria, un jugador profesional de baloncesto o un jinete de la carrera Sanlúcar. Cuando el contexto viene dado por una serie de conjuntos crisp, la definición de dichas particiones se reduce al caso clásico. Sin embargo, cuando los conjuntos que definen los diferentes contextos son también difusos, la definición de dichas particiones difusas no es una tarea trivial. Siguiendo el ejemplo, podríamos estar interesados en definir un sistema difuso para detectar sobrepeso en personas con ingresos medios.

En este trabajo presentamos un método para definir particiones difusas para aquellos elementos del universo que tengan cierta propiedad difusa. Dicha partición se definirá mediante el uso de transformadas difusas [8], [7], que pueden entenderse como medias ponderadas por conjuntos difusos. En pos de una mejor comprensión de la metodología, se presenta cómo se definen cinco particiones difusas de un conjunto de muestras de generación energética acorde al momento del día en el que fueron tomadas; i.e., durante la madrugada, la mañana, el mediodía, la tarde o la noche.

El trabajo está estructurado de la siguiente manera. Comen-

zamos presentando ciertos conceptos básicos en la Sección II. En la Sección III presentamos como se definen las F-transformadas directa e inversa. En la Sección IV mostramos cómo definir particiones difusas de tres clases para los elementos del universo que tengan cierto atributo difuso. En esta sección mostraremos además cómo se aplica la metodología al caso de la generación eléctrica condicionada al tramo horario. Finalmente, en la Sección V presentamos las conclusiones y el trabajo futuro.

## II. PRELIMINARIES

El concepto de partición difusa se define de manera general de la siguiente forma.

*Definición 1:* Una partición difusa  $\Delta$  de un universo  $\mathcal{U}$  es un conjunto  $\{\Delta_1, \dots, \Delta_n\}$  de conjuntos difusos sobre  $\mathcal{U}$  que cumplen la condición de recubrimiento, es decir, para todo  $x \in \mathcal{U}$  existe  $k \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $\Delta_k(x) > 0$ .

En la bibliografía se pueden encontrar una gran cantidad de propiedades adicionales que se imponen sobre las particiones difusas. A continuación enumeramos una serie de propiedades que cumplirán las particiones definidas en este trabajo. Una partición  $\Delta = \{\Delta_1, \dots, \Delta_n\}$  sobre  $[0, 1]$  se define a partir de ciertos nodos  $0 = x_1 < x_2 < \dots < x_n = 1$  tales que:

- (normalidad)  $\Delta_k(x_k) = 1$ .
- (soporte acotado)  $\Delta_k(x) = 0$  si  $x \notin (x_{k-1}, x_{k+1})$ .
- (continuidad)  $\Delta_k(x)$  es continua.
- (convexidad)
  - $\Delta_k(x)$  es estrictamente creciente en  $(x_{k-1}, x_k)$  y
  - $\Delta_k(x)$  es estrictamente decreciente en  $(x_k, x_{k+1})$ .
- (Ruspini) para todo  $x \in [0, 1]$ :

$$\sum_{k=1}^n \Delta_k(x) = 1$$

Las funciones de pertenencia de los conjuntos difusos que forman las particiones difusas pueden darse de infinidad de maneras. Por practicidad, suelen elegirse funciones de pertenencia sencillas que se definen a partir de ciertos parámetros. En este trabajo vamos a considerar funciones de pertenencia triangulares y trapezoidales, que se definen sobre el universo de los números reales a partir de tres/cuatro parámetros  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  de la siguiente forma:

$$\text{triangular}(a, b, c)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a < x \leq b \\ \frac{b-x}{b-c} & \text{si } b < x \leq c \\ 0 & \text{si } c < x \end{cases}$$

$$\text{trapezoidal}(a, b, c, d)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a < x \leq b \\ 1 & \text{si } b < x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c} & \text{si } c < x \leq d \\ 0 & \text{si } d < x \end{cases}$$

En algunos casos haremos un pequeño abuso de notación aceptando, en el caso de las funciones de pertenencia trapezoidales, que los parámetros  $a, b$  y  $c, d$  puedan ser  $-\infty$  o  $\infty$ ,

respectivamente. En dichos casos, las funciones de pertenencia refieren a

$$\text{trapezoidal}(-\infty, -\infty, c, d)(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c} & \text{si } c < x \leq d \\ 0 & \text{si } d < x \end{cases}$$

y

$$\text{trapezoidal}(a, b, \infty, \infty)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a < x \leq b \\ 1 & \text{si } b < x \end{cases}$$

En general, existen multitud de formas de definir particiones difusas en un cierto universo  $\mathcal{U}$ , aunque éstas se pueden clasificar en dos familias: particiones basadas puramente en etiquetas lingüísticas dadas por un experto y particiones definidas a partir de herramientas de clustering o parámetros estadísticos (con o sin supervisión). En el Ejemplo 1 se describe una partición dada por un experto concerniente a los intervalos temporales de un día.

*Ejemplo 1:* El ser humano suele dividir las 24 horas del día en los siguientes cinco intervalos temporales: *madrugada*, *mañana*, *mediodía*, *tarde* y *noche*. Dichos intervalos se pueden modelar como cinco conjuntos difusos trapezoidales de la siguiente manera:

Madrugada = trapezoidal (00, 02, 05, 07)

Mañana = trapezoidal (05, 07, 11, 13)

Mediodía = trapezoidal (11, 13, 14, 15)

Tarde = trapezoidal (14, 15, 18, 20)

Noche = trapezoidal (18, 20, 23, 01)

donde el tiempo viene dado en horas con notación 24h. Las gráficas de los cinco conjuntos difusos que forman esta partición vienen dadas en la Figura 1. Obsérvese que dicha partición satisfacen todas las propiedades adicionales de normalidad, soporte acotado, continuidad, convexidad y Ruspini.  $\square$

Puesto que este trabajo está orientado en el uso de parámetros estadísticos para la definición de particiones difusas, vamos a esbozar a continuación un sencillo algoritmo para definir una posible partición difusa de tres clases a partir de la información de un atributo difuso  $X$ ; es decir, un conjunto difuso  $X: \mathcal{U} \rightarrow [0, 1]$ . Las tres clases van a representar las etiquetas lingüísticas “atributo  $X$  bajo”, “atributo  $X$  medio” y “atributo  $X$  alto”. Uno de los valores más representativos, si no el que más, de lo que sería un valor “medio” del atributo  $X$  sería la *media* del conjunto de valores  $\{X(u)\}_{u \in \mathcal{U}}$ . De este modo, cuanto más cerca esté el atributo  $X$  de la media, más “medio” será. Modelar este concepto de cercanía se puede hacer a través de múltiples expresiones y un punto clave es determinar qué valores del atributo  $X$  dejan de clasificarse como “medios”. Quizás la forma más natural para hacer esto último es mediante el cálculo de una medida de dispersión sobre el conjunto de valores  $\{X(u)\}_{u \in \mathcal{U}}$ , que determinaría un intervalo para los valores “medios”.

*Ejemplo 2:* Supongamos que queremos realizar una partición sobre los números reales (i.e.,  $\mathcal{U} = \mathbb{R}$ ) acorde a cierto atributo  $X: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ . Supongamos que la media y la

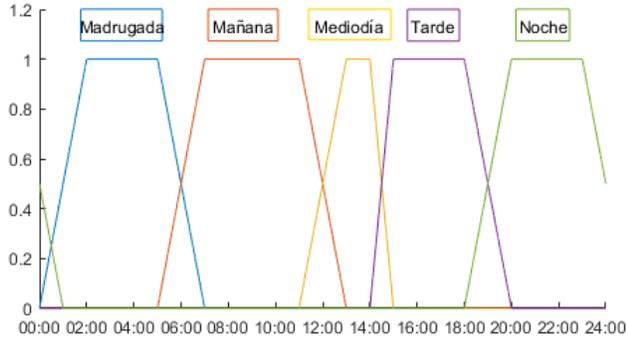


Figure 1. Partición difusa para el día dada por un experto acorde a las etiquetas lingüísticas *madrugada*, *mañana*, *mediodía*, *tarde* y *noche*.

desviación típica de  $\{X(u)\}_{u \in \mathbb{R}}$  son  $\mu$  y  $\sigma$ , respectivamente. Entonces, la partición difusa formada por las siguientes tres clases:

$$\Delta_1 = \text{trapezoidal}(-\infty, -\infty, \mu - \sigma, \mu)$$

$$\Delta_2 = \text{triangular}(\mu - \sigma, \mu, \mu + \sigma)$$

$$\Delta_3 = \text{trapezoidal}(\mu, \mu + \sigma, \infty, \infty)$$

modeliza los conceptos “atributo  $X$  bajo”, “atributo  $X$  medio” y “atributo  $X$  alto”, respectivamente.

Merece la pena mencionar la existencia de otros métodos para definir particiones difusas basados en cuartiles o clústering [4], [10].

### III. TRANSFORMADAS DIFUSAS

Las transformadas difusas fueron aplicadas en su origen sobre funciones definidas entre el intervalo unidad [8] y recientemente extendidas para ser aplicadas a un conjunto de puntos arbitrario del producto cartesiano  $\mathcal{U} \times [0, 1]$  para  $\mathcal{U}$  un conjunto arbitrario [7].

Las transformadas discretas para datos sin estructura funcional se definen de la siguiente manera.

**Definición 2:** Dado  $\mathbf{T} = \{(x_i, y_i)\}_{i \in \mathbb{I}} \subseteq \mathcal{U} \times [0, 1]$  y una partición difusa  $\Delta = \{\Delta_1, \dots, \Delta_n\}$  de  $\mathcal{U}$ , decimos que la  $n$ -tupla  $\mathbf{F}_\Delta[\mathbf{T}] = [F_1, \dots, F_n] \in [0, 1]^n$  es la F-transformada directa de  $\mathbf{T}$  con respecto a  $\Delta$  si se cumple la igualdad

$$F_k = \frac{\sum_{i \in \mathbb{I}} y_i \Delta_k(x_i)}{\sum_{i \in \mathbb{I}} \Delta_k(x_i)} \quad (1)$$

No es difícil comprobar que la definición anterior extiende a la original [8] dada en el contexto de funciones, identificando la función  $f: \mathcal{U} \rightarrow [0, 1]$  con el subconjunto  $\mathbf{T}_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathcal{U}\} \subseteq \mathcal{U} \times [0, 1]$ , i.e.,  $\mathbf{F}_\Delta[\mathbf{T}_f] = \mathbf{F}_\Delta[f]$ . El siguiente resultado muestra que las componentes de la F-transformada directa coinciden con la solución de un problema de *mínimos cuadrados* ponderado por las funciones de la partición  $\Delta$ .

**Proposición 1:** Dado  $\mathbf{T} = \{(x_i, y_i)\}_{i \in \mathbb{I}} \subseteq \mathcal{U} \times [0, 1]$  y una partición difusa  $\Delta = \{\Delta_1, \dots, \Delta_n\}$  de  $\mathcal{U}$ , la  $k$ -ésima componente de la F-transformada coincide con el mínimo de la función

$$\phi(z) = \sum_{i \in \mathbb{I}} (y_i - z)^2 \Delta_k(x_i) \quad (2)$$

A partir de la F-transformada directa, podemos definir la F-transformada inversa como se muestra a continuación.

**Definición 3:** Dado  $\mathbf{T} = \{(x_i, y_i)\}_{i \in \mathbb{I}} \subseteq \mathcal{U} \times [0, 1]$  y su F-transformada directa  $\mathbf{F}_\Delta[\mathbf{T}] = [F_1, \dots, F_n] \in [0, 1]^n$  con respecto a  $\Delta$  se define la F-transformada inversa de  $\mathbf{T}$  con respecto a  $\Delta$  como la función:

$$\mathbf{T}_\Delta^F(x) = \frac{\sum_{k=1}^n F_k \Delta_k(x)}{\sum_{k=1}^n \Delta_k(x)}. \quad (3)$$

Antes de proseguir, vamos a comentar algunos aspectos de la definición anterior. La F-transformada inversa es una función de  $\mathcal{U}$  a  $[0, 1]$  independientemente de si  $\mathbf{T}$  tiene estructura de función o no (i.e., tiene estructura de función si para todo  $u \in \mathcal{U}$  existe  $x \in [0, 1]$  tal que  $(u, x) \in \mathbf{T}$  y si además tenemos que dos tuplas  $(u, x)$  y  $(u, y)$  pertenecen a  $\mathbf{T}$ , entonces  $x = y$ ). En segundo lugar, el dominio de la F-transformada inversa es todo  $\mathcal{U}$  independientemente de si para cierto  $u \in \mathcal{U}$  existen o no valores tales que  $(u, y) \in \mathbf{T}$ . Finalmente, como se muestra en el siguiente teorema (Teorema 1), la transformada inversa está estrechamente relacionada con la función que asigna a cada  $u \in \mathcal{U}$  el valor medio de los valores  $x_i \in [0, 1]$  tales que  $(u, x_i) \in \mathbf{T}$ . Formalmente, definimos los conjuntos

$$D_u = \{x \in [0, 1] \mid (u, x) \in \mathbf{T}\} \quad \text{para cada } u \in \mathcal{U} \quad (4)$$

y

$$D_{\mathbf{T}} = \{u \in \mathcal{U} \mid \text{tal que existe } (u, x) \in \mathbf{T}\} \quad (5)$$

Sobre el dominio  $D_{\mathbf{T}}$  definimos la función  $m_{\mathbf{T}}(u)$  que asigna a cada  $u \in D_{\mathbf{T}}$  el valor

$$m_{\mathbf{T}}(u) = \frac{\sum_{x_i \in D_u} x_i}{|D_u|} \quad (6)$$

donde  $|D_u|$  denota la cardinalidad del conjunto  $D_u$ . Observe que  $m_{\mathbf{T}}$  es la función que asigna a cada  $u \in \mathcal{U}$  la media de todos los valores  $x_i$  tales que  $(u, x_i) \in \mathbf{T}$ .

**Teorema 1:** Para todo  $\mathbf{T} = \{(u_i, x_i)\}_{i \in \mathbb{I}} \subseteq \mathcal{U} \times [0, 1]$  existe una partición difusa  $\Delta$  tal que

$$\mathbf{T}_\Delta^F(u) = m_{\mathbf{T}}(u),$$

donde  $m_{\mathbf{T}}$  es la función definida en la Ecuación (6).

A partir del teorema anterior, podemos decir que la F-transformada inversa aproxima en cierto modo la función  $m_{\mathbf{T}}$  que asigna a cada  $u \in \mathcal{U}$  el valor medio de los valores  $x_i \in [0, 1]$  tales que  $(u, x_i) \in \mathbf{T}$ .

### IV. DEFINIENDO PARTICIONES CONDICIONADAS

#### A. Descripción del procedimiento

Vamos a considerar un universo  $\mathcal{U}$  junto con dos atributos  $X$  y  $Y$  que poseen los elementos de  $\mathcal{U}$ . En la Sección II hemos visto cómo definir particiones difusas de  $\mathcal{U}$  basándonos en la información de uno de los atributos  $X$  o  $Y$ . En esta sección vamos a presentar un método para definir una partición difusa en  $\mathcal{U}$  basándonos en un atributo  $Y$  condicionado a la información que tenemos sobre otro atributo  $X$ . Por simplicidad en la exposición, vamos a definir particiones difusas con tres

clases, aunque el método puede extenderse fácilmente para el cálculo de particiones difusas con más clases.

Comenzamos asumiendo una partición difusa  $\Delta$  de  $\mathcal{U}$  acorde a los valores que toma el atributo  $X$ . Entonces, la coordenada  $F_k$  de la F-transformada directa de  $\mathbf{T}_X = \{(u_i, Y(u_i))\}_{i \in \mathbb{I}} \subseteq \mathcal{U} \times [0, 1]$  con respecto a  $\Delta$  puede considerarse como la media del atributo  $Y$  para aquellos elementos de  $\mathcal{U}$  que tienen el atributo  $X$  en  $\Delta_k$ . De este modo, si queremos hacer una partición de tres clases para los elementos de  $\mathcal{U}$  que tengan el atributo  $X$  en  $\Delta_k$ ,  $F_k$  es sin duda un buen candidato para ser el núcleo de la clase central, que representa los elementos con atributo  $Y$  medio. Para representar el resto de los valores del atributo  $Y$  que pueden considerarse “medios”, vamos a establecer una estimación, en forma de intervalo, para la dispersión de los datos a partir de la media ponderada dada por  $F_k$ . Los límites de dicho intervalo van a consistir en el cálculo de otras dos F-transformadas directas, una para los valores del atributo  $Y$  que tienen valores superiores a la media  $F_k$ , y otro para los valores inferiores. La interpretación de este intervalo es similar al del rango intercuartílico pero a través de expectiles, en lugar de cuartiles.

Para ser más específicos, el procedimiento que se lleva a cabo para la definición de la partición condicionada es el siguiente:

- 1) Calculamos la F-transformada directa de

$$\mathbf{T}_Y = \{(u_i, Y(u_i))\}_{i \in \mathbb{I}}$$

con respecto a una partición difusa  $\Delta_X$  definida acorde al atributo  $X$ ;

- 2) Calculamos la F-transformada inversa  $(\mathbf{T}_Y)_{\Delta}^F(x)$  de  $\mathbf{T}_Y = \{(u_i, Y(u_i))\}_{i \in \mathbb{I}}$  con respecto a  $\Delta_X$ ;
- 3) Definimos los siguiente dos conjuntos:

$$\mathbf{T}_Y^{\uparrow} = \{(u_i, Y(u_i)) \mid Y(u_i) \geq (\mathbf{T}_Y)_{\Delta}^F(u_i)\}_{i \in \mathbb{I}}$$

$$\mathbf{T}_Y^{\downarrow} = \{(u_i, Y(u_i)) \mid Y(u_i) \leq (\mathbf{T}_Y)_{\Delta}^F(u_i)\}_{i \in \mathbb{I}}$$

- 4) Calculamos las F-transformadas directas

$$F_{\Delta_X}[\mathbf{T}_Y^{\uparrow}] \quad \text{y} \quad F_{\Delta_X}[\mathbf{T}_Y^{\downarrow}]$$

de los conjuntos  $\mathbf{T}_Y^{\uparrow}$  y  $\mathbf{T}_Y^{\downarrow}$  respectivamente;

- 5) En pos de una presentación más eficiente, vamos a denotar por

- $F_k^{\uparrow}$  a la coordenada  $F_k$  en  $F_{\Delta_X}[\mathbf{T}_Y^{\uparrow}]$ ;
- $F_k^{\downarrow}$  a la coordenada  $F_k$  en  $F_{\Delta_X}[\mathbf{T}_Y^{\downarrow}]$ ;
- $F_k^*$  a la coordenada  $F_k$  en  $F_{\Delta_X}[\mathbf{T}_Y]$ ;

Para cada  $(\Delta_X)_k$ , definimos la partición difusa  $\Delta_Y \mid X_k$  definida por los siguiente tres conjuntos difusos:

$$\Delta_1 = \text{trapezoidal}(-\infty, -\infty, F_k^{\downarrow}, F_k^*)$$

$$\Delta_2 = \text{triangular}(F_k^{\downarrow}, F_k^*, F_k^{\uparrow})$$

$$\Delta_3 = \text{trapezoidal}(F_k^*, F_k^{\uparrow}, \infty, \infty).$$

### B. Ejemplo: generación de energía

Para mostrar el procedimiento de una forma clara, vamos a definir particiones difusas para la producción de energía condicionadas al momento del día al que dicha energía es generada. Para ello, utilizaremos la división temporal descrita

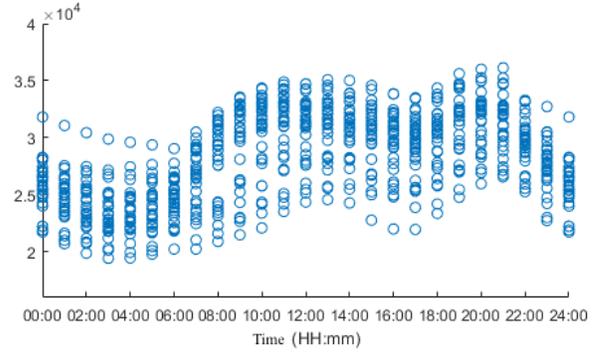


Figure 2. Nube de puntos de la energía generada en la zona peninsular de España durante enero del 2018.

en el Ejemplo 1 para el día; a saber, en *madrugada*, *mañana*, *mediodía*, *tarde* y *noche*. El objetivo es, por lo tanto, definir cinco particiones difusas acorde a la generación de energía teniendo en cuenta de si ésta se ha producido durante la *madrugada*, *mañana*, *mediodía*, *tarde* o *noche*.

Para llevar a cabo el ejemplo haremos uso de los datos disponibles en la página web del Ministerio de Energía, Turismo y Agenda Digital ([www.minetad.gob.es](http://www.minetad.gob.es)) para la generación de energía en la zona peninsular de España durante el mes de enero del 2018. La generación viene dada por intervalos de una hora y la nube de puntos asociada a dicha base de datos viene dada en la Figura 2.

Los componentes de la F-transformada directa  $F_{\Delta}[\mathbf{T}]$  son:

$$\begin{aligned} F_1 &= 23891 \text{ MWh} & F_2 &= 28802 \text{ MWh} \\ F_3 &= 30826 \text{ MWh} & F_4 &= 29877 \text{ MWh} \\ F_5 &= 29391 \text{ MWh} \end{aligned}$$

Como ejemplo, para una interpretación más clara de los resultados obtenidos, el valor  $F_2 = 28802 \text{ MWh}$  representa la media de la generación de energía durante *las mañanas* de enero del 2018. La correspondiente F-transformada inversa está dibujada en la Figura 3 junto con la subdivisión de los datos en dos clases: aquellos con valores superiores (azules en la figura y denotados por  $\mathbf{T}^{\uparrow}$ ) e inferiores (rojos en la figura y denotados por  $\mathbf{T}^{\downarrow}$ ) a la media dada por  $F_{\Delta}[\mathbf{T}]$ , respectivamente.

Al calcular las correspondientes F-transformadas directas de  $\mathbf{T}^{\uparrow}$  y de  $\mathbf{T}^{\downarrow}$  obtenemos las componentes:

$$\begin{aligned} F_1^{\uparrow} &= 25834 \text{ MWh} & F_2^{\uparrow} &= 31468 \text{ MWh} \\ F_3^{\uparrow} &= 32550 \text{ MWh} & F_4^{\uparrow} &= 31804 \text{ MWh} \\ F_5^{\uparrow} &= 32105 \text{ MWh} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} F_1^{\downarrow} &= 22411 \text{ MWh} & F_2^{\downarrow} &= 25027 \text{ MWh} \\ F_3^{\downarrow} &= 27863 \text{ MWh} & F_4^{\downarrow} &= 27129 \text{ MWh} \\ F_5^{\downarrow} &= 26754 \text{ MWh} \end{aligned}$$

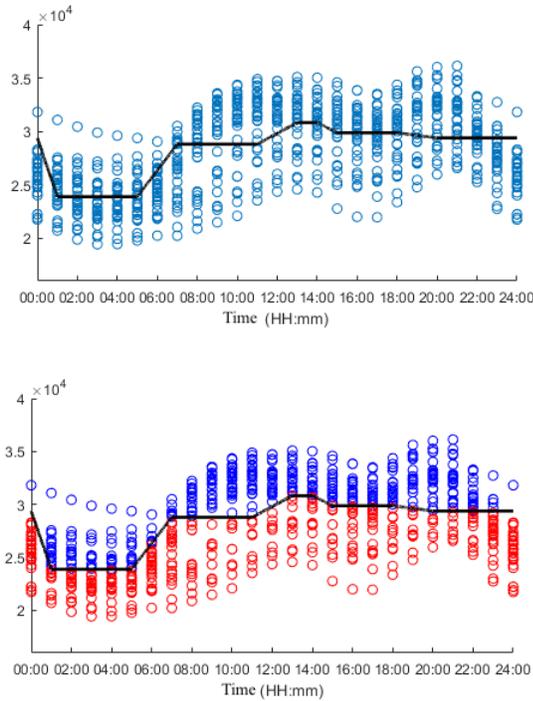


Figure 3. Transformada inversa de los datos de generación eléctrica junto con los dos conjuntos de datos  $T^\uparrow$  (azul) y  $T^\downarrow$  (rojo).

Las dos F-transformadas directas dadas justo arriba tienen una interpretación muy similar al rango intercuartílico pero en términos de expectativas. Específicamente, puesto que  $T^\uparrow$  y  $T^\downarrow$  representan las medias de los datos por encima y por debajo de la F-transformada inversa, que a su vez representa una media, es esperable que la mitad de los datos se encuentren entre  $T^\uparrow$  y  $T^\downarrow$ . En concreto, en este ejemplo, podemos decir que esperamos que en la mayoría de las mañanas ( $\Delta_2$ ), la generación eléctrica se encuentre entre  $F_2^\downarrow = 25027 MWh$  y  $F_2^\uparrow = 31468 MWh$ . Siguiendo esta línea, durante las mañanas podemos atribuir a los valores de la generación eléctrica menores a  $25027 MWh$  (resp. mayores a  $31468 MWh$ ) la etiqueta de *generación eléctrica baja* (resp. *generación eléctrica alta*). Tenemos, por lo tanto, cinco particiones difusas, una para cada conjunto de la partición  $\Delta$ , en la que podemos establecer cuándo la generación eléctrica es alta, media o baja, condicionado al momento del día en que se esté considerando: *madrugada*, *mañana*, *mediodía*, *tarde* o *noche*. Dichas particiones vienen dadas como sigue:

Madrugadas:

- $\Delta_1 =$  trapezoidal  $(-\infty, -\infty, 22411, 23891)$
- $\Delta_2 =$  triangular  $(22411, 23891, 25834)$
- $\Delta_3 =$  trapezoidal  $(23891, 25834, \infty, \infty)$

Mañanas:

- $\Delta_1 =$  trapezoidal  $(-\infty, -\infty, 25027)$
- $\Delta_2 =$  triangular  $(25027, 28802, 31468)$
- $\Delta_3 =$  trapezoidal  $(28802, 31468, \infty, \infty)$

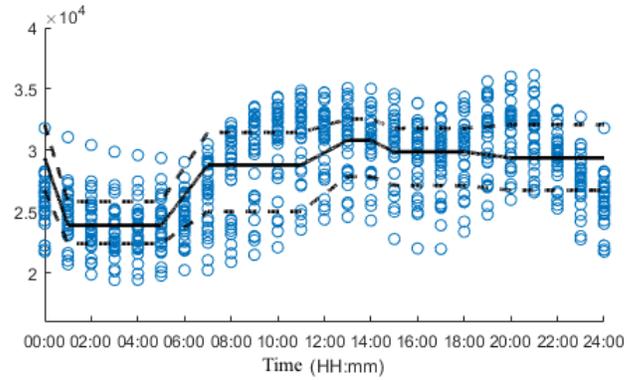


Figure 4. F-transformada inversa de  $T$ ,  $T^\uparrow$  y  $T^\downarrow$ .

Mediodías:

- $\Delta_1 =$  trapezoidal  $(-\infty, -\infty, 27863)$
- $\Delta_2 =$  triangular  $(27863, 30826, 32550)$
- $\Delta_3 =$  trapezoidal  $(30826, 32550, \infty, \infty)$

Tardes:

- $\Delta_1 =$  trapezoidal  $(-\infty, -\infty, 27129)$
- $\Delta_2 =$  triangular  $(27129, 29877, 31804)$
- $\Delta_3 =$  trapezoidal  $(29877, 31804, \infty, \infty)$

Noches:

- $\Delta_1 =$  trapezoidal  $(-\infty, -\infty, 26754)$
- $\Delta_2 =$  triangular  $(26754, 29391, 32105)$
- $\Delta_3 =$  trapezoidal  $(29391, 32105, \infty, \infty)$

Las gráficas de las particiones difusas descritas arriba se exponen en la Figura 5. Obsérvese que lo que se considera “*generación eléctrica media*” es diferente en cada momento del día; de hecho, lo que se considera *generación eléctrica media* durante las mañanas, es una generación *baja* durante el mediodía. Además, en la Figura 4 mostramos las F-transformadas inversas de  $T$ ,  $T^\uparrow$  y  $T^\downarrow$ . De este modo se puede apreciar de una manera más directa la relación entre los conjuntos difusos que definen la partición condicionada y los datos de partida.

## V. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos mostrado cómo definir particiones difusas condicionadas a la satisfacción de cierto atributo difuso. Para ello hemos recordado la metodología de las transformadas difusas y hemos mostrado mediante un ejemplo, cómo definir particiones difusas de tres clases en un contexto de la generación de energía.

Como trabajo futuro, sería conveniente estudiar cómo definir particiones difusas siguiendo la idea subyacente de este trabajo para más de tres clases y/o utilizando diferentes metodologías a la transformadas difusas. Con un cariz más aplicado, sería interesante utilizar este tipo de particiones para definir reglas de inferencia.

## REFERENCES

- [1] BACZYASKI, M., BELIAKOV, G., SOLA, H. B., AND PRADERA, A. *Advances in Fuzzy Implication Functions*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013.
- [2] BEZDEK, J. C. *Pattern Recognition with Fuzzy Objective Functions Algorithms*. Plenum Press, New York, 1981.
- [3] BEZDEK, J. C., EHRLICH, R., AND FULL, W. Fcm: The fuzzy c-means clustering algorithm. *Computers & Geosciences* 10, 2, 191 – 203, 1984.
- [4] BOUCHON, B. AND COHEN, C. Partitions and fuzziness, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 116, 165–183, 1986.
- [5] BUTNARIU, D. Additive fuzzy measures and integrals, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 93, 436–452, 1983.
- [6] HOPPNER, F., AND KLAWONN, F. Obtaining interpretable fuzzy models from fuzzy clustering and fuzzy regression. in *Fourth International Conference on Knowledge-Based Intelligent Engineering Systems and Allied Technologies*, 162–165, 2000.
- [7] MADRID, N. An extension of f-transforms to more general data: Potential applications. *Soft Comput.* 21, 13, 3551–3565, 2017.
- [8] PERFILIEVA, I. Fuzzy transforms: Theory and applications. *Fuzzy Sets and Systems* 157, 8, 993 – 1023, 2006.
- [9] PERFILIEVA, I., HURTÍK, P. DI MARTINO, F. AND SESSA, S. Image reduction method based on the F-transform *Soft Computing*, 21(7), 1847 – 1861, 2017.
- [10] RUSPINI, E. H. A new approach to clustering, *Information and Control*, 15, 22–32, 1969.

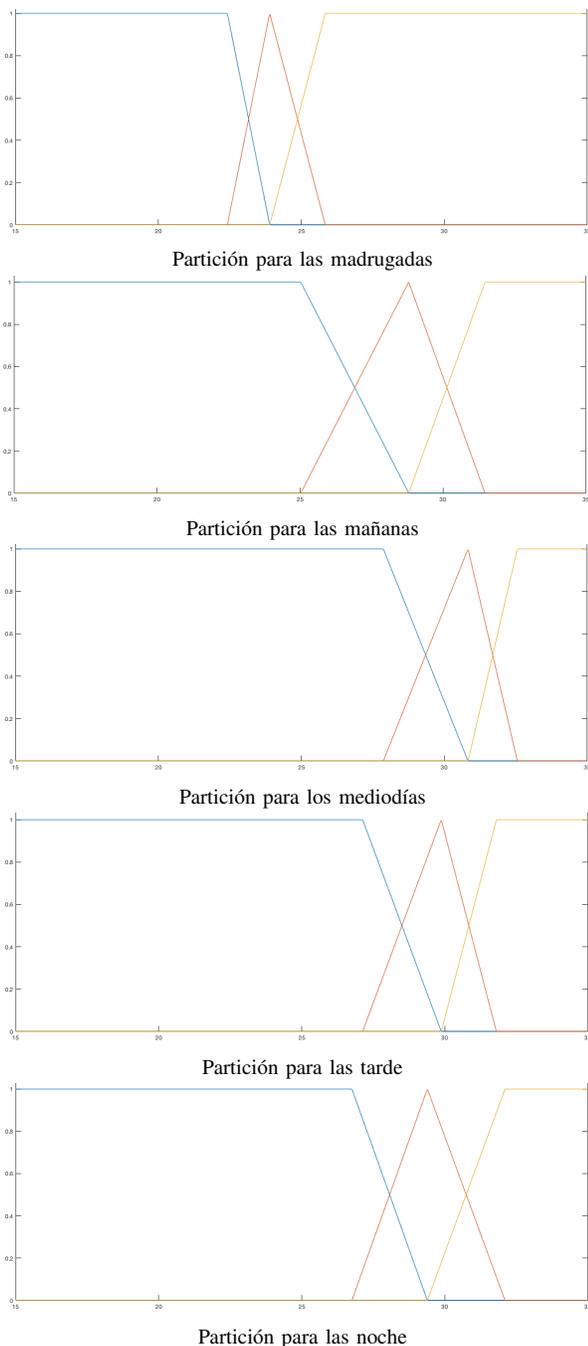


Figure 5. Las gráficas de las cinco particiones difusas de la generación eléctrica condicionadas al momento del día considerado.