XIX Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy (XIX ESTYLF)

ESTYLF1: Sesión Especial: Funciones de Agregación y Conectivos Lógicos

Organizadores:

Sebastia Massanet, Juan Vicente Riera,
Daniel Ruiz-Aguilera, Joan Torrens

Complexity of Increasing ϕ-Recursive Computable Aggregations

Ramón González-del-Campo
Faculty of Informatics, Complutense University of Madrid
Email: rgonzale@ucm.es

Luis Garmendia
Faculty of Informatics, Complutense University of Madrid
Email: lgarmend@fdi.ucm.es

Javier Montero
Faculty of Mathematics, Complutense University of Madrid
Email: monty@mat.ucm.es

***Abstract*—In this paper the new concepts of $\mathcal{O}(f(n))$-increasing ϕ-recursive and $\mathcal{O}(f(n))$-decreasing ψ-recursive computable aggregation and expansion function are proposed to describe the computational cost of recursive computational aggregations when the universe of the discourse is increased or decreased are related. The complexity costs of the expansion functions with the complexity costs of its recursive computational aggregations.**

I. Introduction

As stressed in [11], much effort is needed in analyzing the properties of the algorithms we apply to solve aggregation problems in practice. In fact, in [11] , the authors pointed out that it is the avaliable algorithm what defines each aggregation, making feasible a specific solution to each possible problem, of course depending on decision maker's tools and capacities. Such computable aggregations come with a protocol that enables us to face aggregation problems in a specific general framwork. For example, when the cardinal of data is not being fixed, or cannot be a priori fixed. In particular, recursive aggregations [4], [5], [6], [7], [9] are a special kind of computable aggregations that play a strong role when the universe is modified. The computational cost is critical when it is necessary to process a huge amount of data.

When recursive aggregations are used it is necessary to know the cost to recompute the new value of the aggregation if the universe is changed adding or removing data. In this paper, two new concepts are proposed to describe the computational cost of recursive computational aggregations when the universe of the discourse is modified by adding or removing an element. On the one hand, the $\mathcal{O}(f(n))$-increasing ϕ-recursive computable aggregations is a set of recursive computable aggregations that have a computational cost bounded by $f(n)$ when an element is added to the universe. The expansion function of a computable recursive aggregation allows to know its computational cost. On the other hand, the $\mathcal{O}(f(n))$-decreasing ψ-recursive computable aggregations are defined in similar way when an element is removed from the universe.

II. Preliminaries

The concept of computational complexity cost of an algorithm is an important consideration in computer sciences as a degree to measure the quality and usability of programs. It can be measured in terms of time or memory usage, but it is usually measured in terms of number of operations, and how this number grows as the size of data grows comparing with a function or order in which adding constants, multipliers or lower order functions do no affect the main kind of growing of the higher order.

Definition 1. *[3] Let $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ be a function. The set of functions in the order of f, $\mathcal{O}(f)$, are defined as follows:*

$$\mathcal{O}(f) \equiv \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \exists c \in \mathbb{R}, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 \\ g(n) \leq cf(n)\}$$

The order of f contains all the functions that grows up slower than f.

Definition 2. *[3] Let $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ be a function. The computational complexity of f, $\Theta(f)$, is defined as follows:*

$$\Theta(f) \equiv \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \exists c, d \in \mathbb{R}, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 \\ df(n) \leq g(n) \leq cf(n)\}$$

Definition 3. *[3] Let $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ be two functions. It is said f has a complexity lower than g if $\mathcal{O}(f) \subset \mathcal{O}(g)$*

Proposition 1. *[3] Let q, a be two real numbers such that $q > 1$ and $a > 1$. Then:*

$$\mathcal{O}(1) \subset \mathcal{O}(log(n)) \subset \mathcal{O}(n) \subset \mathcal{O}(n^q) \subset \mathcal{O}(a^n) \subset O(n!)$$

In the following definition the most usual types of complexity are introduced.

Definition 4. *[3] Let $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ be a function. Then:*

- g has constant complexity if g belongs to $\Theta(1)$, i.e, if g grows up as fast as $f(n) = 1$.
- g has logarithmic complexity if g belongs to $\Theta(log(n))$, i.e, if g grows up as fast as $f(n) = log(n)$.
- g has linear complexity if g belongs to $\Theta(n)$, i.e, if g grows up as fast as $f(n) = n$.
- g has polynomial complexity if g belongs to $\Theta(n^q)$ for some $q > 1$, i.e, if g grows up as fast as $f(n) = n^q$.
- g has exponential complexity if g belongs to $\Theta(a^n)$ for some $a > 1$, i.e, if g grows up as fast as $f(n) = a^n$.

- g has factorial complexity if g belongs to $\Theta(n!)$, i.e, if g grows up as fast as $f(n) = n!$.

Definition 5. *[3] The computational complexity cost of an algorithm is the order of the function that gives the computing time of the algorithm.*

It is possible a definition of computational complexity cost focusing on the number of operations to complete the algorithm:

Definition 6. *[3] The computational complexity cost of an algorithm is the order of the function that gives a bound for the number of operations of the algorithm.*

Definition 7. *[1] A L list is an Abstract Data Type (ADT) that represents a sequence of values. A list can be defined by its behavior and its implementation must provide at least the following operations:*

- *Test whether a list is empty or not.*
- *Add a value.*
- *Remove a value.*
- *Compute the length (number of values) of a list.*

A list can be defined under a template data. For example, a list $L < [0,1] >$ is a list of values in $[0,1]$.

Talking about complexity of algorithms implies to show the code of them. There are a lot of programming languages (C++, Python, Java,...). Python is a easy to understand programming language. Even if you do not know Python, you can understand a program written in Python. That is the reason why the programs are written in Python in this paper. All programs here showed can be rewritten in any other programming language.

Definition 8. *[5] A left-recursive connective rule is a family of connective operators:*

$$(Ag : [0,1]^n \to [0,1])_{n>1}$$

such that there exists a sequence of binary operators:

$$(L_n : [0,1]^2 \to [0,1])_{n>1}$$

verifying:

- $Ag(a_1, a_2) = L_2(a_1, a_2)$
- $Ag(a_1 \dots, a_n) = L_n(Ag(a_1, \dots, a_{n-1}), a_n)$ *for all* $n > 2$

for some ordering rule π.

In similar way a right-recursive connective rule can be defined.

A right-recursive connective and left-recursive connective rule is called recursive connective rule.

Definition 9. *[2] An aggregation operator is a mapping $Ag : [0,1]^n \to [0,1]$ that satisfies:*

1) $Ag(0, 0..., 0) = 0$ *and* $Ag(1, 1, .., 1) = 1$.
2) Ag *is monotonic.*

There exists some other proposals to fusion information as the pre-aggreation functions that introduce the concept of directional monotonicity and have been useful in some applications.

Definition 10. *[10] A mapping $F : [0,1]^n \to [0,1]$ is a n-dimensional pre-aggregation function if it satisfies:*

- *There exists a real vector $r \in [0,1]^n$ with $r \neq 0$ such that is r-growing.*
- $F(0, \dots, 0 = 0)$ *and* $F(1, \dots, 1 = 1)$.

Next definition shows a wider point of view about aggregation. It is possible to extend the domain of aggregations to lists of elements L with generic types T. For example, T can be an image and the aggregation that process it can make the fussion of images.

In this paper of article, we will focus on the aggregations that can be computed using a program and the cost of computation of these aggregations.

Definition 11. *[11] Let $L < T >$ be a list of n elements of type T. A computable aggregation Ag_c is a program P that transforms the list $L < T >$ into an element of T.*

Definition 12. *[8] Let $L = \{x_1, \dots, x_n\}$ be a list of values. A computable aggregation rule Ag_c is recursive if there exists a mapping $\phi : [0,1]^2 \to [0,1]$ such that:*

$$Ag_c(L) = \begin{cases} x_1, & \textit{if } lenght(L) = 1; \\ \phi(Ag_c(x_1, ..., x_{n-1}), x_n), & \textit{if } lenght(L) > 1. \end{cases}$$

Definition 13. *[8] A computation aggregation rule is expansible if there exists a mapping $\phi : [0,1]^2 \to [0,1]$ satisfying the following property:*

$$Ag_c(L_1 \cup L_2) = \phi(Ag_c(L_1), Ag_c(L_2))$$

where ϕ is an algorithm with linear or lower computational complexity cost.

Note. Let $Comp$, Rec and Exp be the computable aggregations, the recursive aggregations and the expansible aggregations respectively. Then:

$$Exp \subset Rec \subset Comp$$

Talking about complexity of algorithms implies to show the code of algorithms that implement them. There are a lot of programming languages (C++, Python, Java,...). Python is a easy to understand programming language. Even if you do not know Python, you can understand a program written in Python. That is the reason why the programs are written in Python in this paper. All programs here showed can be rewritten in any other programming language.

III. Increasing ϕ-Recursive Computable Aggregations Rules

Let $L = \{x_1, \dots, x_n\}$ be a list of values and n its length.

Definition 14. *A computable aggregation rule Ag_c is $\mathcal{O}(f(n))$-increasing ϕ-recursive if there exists a mapping $\phi : [0,1]^2 \times L \to [0,1]$ such that:*

- $Ag_c(L) = \begin{cases} x_1, & \textit{if } n = 1; \\ \phi(Ag_c(x_1, ..., x_{n-1})), x_n, \{x_1, \dots, x_{n-1}\}), & \textit{if } n > 1. \end{cases}$
- *ϕ has a $\mathcal{O}(f(n))$ complexity cost.*

Definition 15. *A $\mathcal{O}(f(n))$-increasing ϕ-recursive computable aggregation rule Ag_c is non depending of length L if there exists a mapping $\phi : [0,1]^2 \to [0,1]$ such that:*

- $Ag_c(L) = \begin{cases} x_1, & \textit{if } n = 1; \\ \phi(Ag_c(x_1, ..., x_{n-1})), x_n), & \textit{if } n > 1. \end{cases}$
- *ϕ has a $\mathcal{O}(f(n))$ complexity cost.*

Next lemmas relate types of increasing ϕ-recursive computable aggregations with recursive computable aggregations and explansible computable aggregations given in Definition 12 and Definition 13.

The next two lemmas are trivial:

Lemma 1. *A recursive computable aggregation is $\mathcal{O}(f(n))$-increasing ϕ-recursive for some $f(n)$.*

Lemma 2. *If Ag_c is an explansible computable aggregation, then Ag_c is a $\mathcal{O}(n)$-increasing ϕ-recursive computable aggregation.*

The following lemmas show some $\mathcal{O}(n)$-increasing ϕ-recursive computable aggregations.

Lemma 3. *Arithmetic mean is a $\mathcal{O}(1)$-increasing ϕ-recursive computable aggregation.*

Proof. $Ag_c(x_1, \ldots, x_{n+1}) =$

$= \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} x_i = \frac{1}{n+1} (\sum_{i=1}^{n} x_i + x_{n+1}) = \frac{n}{n+1} \sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{n}{n+1} x_{n+1} = \frac{n}{n+1} Ag_c(x_1, \ldots, x_n) + \frac{n}{n+1} x_{n+1}$

So $\phi(x, y, n) = \frac{n}{n+1} x + \frac{1}{n+1} y$.

The next two programs compute $\phi(x, y, \{x_1, \ldots, x_n\})$ when n (length of $\{x_1, \ldots, x_n\}$) is known and when n is not known:

- n is known:

```
def phi(x,y,n):
    return (n*x+y)/(n+1)
```

So ϕ is $\mathcal{O}(1)$ complexity.

- n is unknown:

```
def phi(x,y,l):
    n=len(l)
    return (n*x+y)/(n+1)
```

Then, it is $\mathcal{O}(n)$ complexity to compute *length(l)*. □

Lemma 4. *The Product computable aggregation is a $\mathcal{O}(1)$-increasing ϕ-recursive computable aggregation.*

Proof. $Ag_c(x_1, \ldots, x_{n+1}) =$

$= \prod_{i=1}^{n+1} x_i = x_{n+1} * \prod_{i=1}^{n} x_i$

So $\phi(x, y) = x * y$, which have a $\mathcal{O}(1)$ constant complexity cost.

The next program computes $\phi(x, y)$:

```
def phi(x,y):
    return x*y
```

So ϕ is $\mathcal{O}(1)$ complexity. □

Lemma 5. *Bounded sum ($\min\{1, \sum_{i=1}^{n} x_i\}$) is a $\mathcal{O}(1)$-increasing ϕ-recursive computable aggregations.*

Proof. There exist three cases:

1) If $Ag_c(x_1, \ldots, x_n) = 1$, then $Ag_c(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 1$
2) If $Ag_c(x_1, \ldots, x_n) < 1$ and $Ag_c(x_1, \ldots, x_n) + x_{n+1} \geq 1$, then $Ag_c(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 1$
3) If $Ag_c(x_1, \ldots, x_n) + x_{n+1} < 1$, then $Ag_c(x_1, \ldots, x_{n+1}) = Ag_c(x_1, \ldots, x_n) + x_{n+1}$

The next program computes $\phi(x, y)$:

```
def phi(x,y):
    if x==1:
        res=1
    else:
        if x+y>=1:
            res=1
        else:
            res x+y
    return res
```

with $\mathcal{O}(1)$ constant complexity cost. □

Lemma 6. *Geometric mean is a $\mathcal{O}(1)$-increasing ϕ-recursive computable aggregations if n is known.*

Proof. $Ag_c(x_1, \ldots, x_{n+1}) =$

$= (\prod_{i=1}^{n+1} x_i)^{\frac{1}{n+1}} = (x_n \prod_{i=1}^{n} x_i)^{\frac{1}{n+1}} = (x_n)^{\frac{1}{n+1}} (\prod_{i=1}^{n} x_i)^{\frac{1}{n+1}} = (x_n)^{\frac{1}{n+1}} ((\prod_{i=1}^{n} x_i)^{\frac{1}{n}})^{\frac{n}{n+1}}$
$= (x_n)^{\frac{1}{n+1}} Ag_c(x_1, \ldots, x_n))^{\frac{n}{n+1}}$

So $\phi(x, y) = x^{\frac{n}{n+1}} * y^{\frac{1}{n+1}}$.

The two next programs compute $\phi(x, y, \{x_1, \ldots, x_n\})$ depending if n (length of $\{x_1, \ldots, x_n\}$) is known or not:

- n is known:

```
def phi(x,y,n):
    return res x**(n/(n+1))*y**(n/(n+1))
```

So ϕ is $\mathcal{O}(1)$ complexity.

- n is unknown:

```
def phi(x,y,l):
    n=len(l)
    return res x**(n/(n+1))*y**(n/(n+1))
```

So ϕ is $\mathcal{O}(n)$ complexity cost. □

Lemma 7. *The forward and backward aggregations (Ag_{cn}^{f} and Ag_{cn}^{b}) over the binary operator A are $\mathcal{O}(c(x, y))$-increasing ϕ-recursive computable aggregations.*

Proof. Let $A(x, y)$ be a binary operator and let $c(x, y)$ be its complexity.

$Ag_{n+1}^{f}(\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}) = A(Ag_{cn}^{f}(\{x_1, \ldots, x_n\}, x_{n+1})$.

Then $\phi(x, y) = A(x, y)$ and $\phi(x, y)$ is computed with $\mathcal{O}(c(x, y))$. So Ag_{cn}^{f} is a $\mathcal{O}(c(x, y))$-increasing ϕ-recursive computable aggregation.

In similar way it is possible to prove Ag_{cn}^{b} is a $\mathcal{O}(c(x, y))$-increasing ϕ-recursive computable aggregation. □

Corollary 1. *Minimum, Maximum, Product, Forward and Backward aggregations are non depending of length increasing ϕ-recursive computable aggregations.*

Aggregation	ϕ	Complexity of ϕ
Arithmetic mean	$\frac{n}{n+1}x + \frac{1}{n+1}y$	$\mathcal{O}(1)$,$\mathcal{O}(n)$
Minimum	$\min\{x, y\}$	$\mathcal{O}(1)$
Maximum	$\max\{x, y\}$	$\mathcal{O}(1)$
Product	$x * y$	$\mathcal{O}(1)$
Bounded sum	See program	$\mathcal{O}(1)$
Geometric mean	$x^{\frac{n}{n+1}} * y^{\frac{1}{n+1}}$	$\mathcal{O}(1)$,$\mathcal{O}(n)$
$Ag^f_{cn}(\{x_1, \ldots, x_n\})$	$A(x, y)$	$\mathcal{O}(c(x, y))$
$Ag^b_{cn}(\{x_1, \ldots, x_n\})$	$A(x, y)$	$\mathcal{O}(c(x, y))$

TABLE I
EXPANSION FUNCTIONS COMPLEXITY COST OF SOME INCREASING ϕ-RECURSIVE COMPUTABLE AGGREGATIONS.

Proof. Trivial. □

Lemma 8. *Let $Ag_c^{\mathcal{O}(f(n))}$ and $Ag_c^{\mathcal{O}(g(n))}$ be the sets of $\mathcal{O}(f(n))$-increasing ϕ-recursive and $\mathcal{O}(g(n))$-increasing ϕ-recursive computable aggregations respectively. If $f(n)$ belongs to $\mathcal{O}(g(n))$, then*

$$Ag_c^{\mathcal{O}(f(n))} \subseteq Ag_c^{\mathcal{O}(g(n))}$$

Proof. Trivial. □

Theorem 1. *Let ϕ be the expansion function of Ag_c. If the complexity of ϕ is $\Theta(f(n))$ then Ag_c is approachable with complexity $\Theta(n * f(n))$.*

Proof. Let $f(n)$ be the function that represents the computing time of ϕ. The next algorithm computes $Ag_c(x_1, \ldots, x_n)$ using ϕ:

```
def phi(y,x):
...
def Ag_c(psi,l):
    for x in l:
        aux=phi(aux,x)
    return aux
```

The number of times that the code of the loop `for` is executed depends on the length of list `l`, n. So Ag_c takes a computing time $n * f(n)$. □

Corollary 2. *If ϕ has a polynomial complexity cost, then Ag_c has a polynomial complexity cost.*

Proof. If ϕ has a polynomial complexity its computing time is $f(n) = k * n^a$ for some a. Then, due to Theorem 1 the computing time for Ag_c using ϕ is $k' * n * k * n^a = k'' n^{a+1}$. So the computing time of Ag_c belongs to $\Theta(n^{a+1})$ which is also polynomial complexity cost. □

IV. Decreasing ψ-Recursive Computable Aggregations Rules

Let Ω be a region in $\mathbb{R}^2$ such that $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.

Definition 16. *Let $L = \{x_1, \ldots, x_n\}$ be a list of values. A computable aggregation rule Ag_c is $\mathcal{O}(f(n))$-decreasing ψ-recursive in Ω if there exists a mapping $\psi : [0, 1]^2 \to [0, 1]$ such that:*

- *For all (x, y) in Ω: $Ag_c(L \setminus \{x_n\}) = \psi(Ag_c(x_1, ..., x_n)), x_n)$ if $lenght(L) > 1$*
- *ψ has a $\mathcal{O}(f(n))$ complexity cost.*

Lemma 9. *Arithmetic mean is a $\mathcal{O}(1)$-decreasing ψ-recursive computable aggregation.*

Proof. $Ag_c(x_1, \ldots, x_n) =$
$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = = \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n-1} x_i + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} x_i + \frac{1}{n} * x_n = \frac{n-1}{n} Ag_c(x_1, \ldots, x_{n-1}) + \frac{1}{n} * x_n$

So $Ag_c(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \frac{n}{n-1}(Ag_c(x_1, \ldots, x_n) - \frac{1}{n-1}x_n)$ and $\psi(x, y, n) = \frac{n}{n-1}x + \frac{1}{n-1}y$ in $\Omega = \mathbb{R}^2$.

The next program compute $\psi(x, y, \{x_1, \ldots, x_n\})$ depending if n (length of $\{x_1, \ldots, x_n\}$) is known or not:

- n is known:

```
def phi(x,y,n):
    return n/(n-1)*x-1/(n-1)y
```

  So ψ is $\mathcal{O}(1)$ complexity.
- n is unknown:

```
def phi(x,y,l):
    n=len(l)
    return n/(n-1)*x-1/(n-1)y
```

  So ψ has $\mathcal{O}(n)$ complexity for the computation of *length(L)*.

□

Lemma 10. *Minimum and Maximum are $\mathcal{O}(1)$-decreasing ψ-recursive computable aggregations.*

Proof. If $\min\{x_1, \ldots, x_n\} < x_n$, then $\min\{x_1, \ldots, x_{n-1}\} = \min\{x_1, \ldots, x_n\}$ and $Ag_c(x_1, \ldots, x_{n-1}) = Ag_c(x_1, \ldots, x_n)$. So $\Omega : \{(x, y) : x < y\}$

The next program computes $\psi(x, y)$:

```
def psi(x,y):
    return x
```

The complexity of $\psi(x, y, l)$ is $\mathcal{O}(1)$ in Ω.

Similar considerations can be done for Maximun. □

Lemma 11. *Product is a $\mathcal{O}(1)$-decreasing ψ-recursive computable aggregation.*

Proof. $Ag_c(x_1, \ldots, x_n) =$
$= \prod_{i=1}^{n} x_i = x_n * \prod_{i=1}^{n-1} x_i$

So $Ag_c(x_1, \ldots, x_n) = x_n * Ag_c(x_1, \ldots, x_{n-1})$ and $\psi(x, y) = x/y$.

The next program computes $\psi(x, y)$:

```
def psi(x,y):
    return x/y
```

So ψ has $\mathcal{O}(1)$ constant complexity cost. □

Lemma 12. *Geometric mean is a $\mathcal{O}(1)$-decreasing ψ-recursive computable aggregations if n is known.*

Proof. $Ag_c(x_1, \ldots, x_{n-1}) =$
$= (\prod_{i=1}^{n-1} x_i)^{\frac{1}{n-1}} = \frac{x_n}{x_n}((\prod_{i=1}^{n-1} x_i)^{\frac{1}{n-1}})^{\frac{n}{n}} = \frac{1}{x_n}((\prod_{i=1}^{n} x_i)^{\frac{1}{n}})^{\frac{n}{n-1}} = \frac{1}{x_n} Ag_c(x_1, ..., x_n)^{\frac{n}{n-1}}$

So $\psi(x, y, n) = \frac{1}{y} x^{\frac{n}{n-1}}$ □

The next program computes $\psi(x, y, n)$:

Aggregation	ψ	Complexity of ψ	Ω
Arithmetic mean	$\frac{n}{n-1}x + \frac{1}{n-1}y$	$\mathcal{O}(1)$,$\mathcal{O}(n)$	$\mathbb{R}^2$
Product	x/y	$\mathcal{O}(1)$	$\mathbb{R}^2$
Geometric mean	$\frac{1}{y}x^{\frac{n}{n-1}}$	$\mathcal{O}(1)$,$\mathcal{O}(n)$	$\mathbb{R}^2$
Minimum	x	$\mathcal{O}(1)$	$x < y$
Maximum	x	$\mathcal{O}(1)$	$x > y$
Bounded sum	$x - y$	$\mathcal{O}(1)$	$x < 1$

TABLE II
EXPANSION FUNCTIONS COMPLEXITY COST OF SOME DECREASING ψ-RECURSIVE COMPUTABLE AGGREGATIONS.

```
def phi(x,y,n):
    return res x**(n/(n-1))/y
```

So ψ has $\mathcal{O}(1)$ constant complexity cost if n is known.

Lemma 13. *Bounded sum ($\min\{1, \sum_{i=1}^{n} x_i\}$) is a $\mathcal{O}(1)$-decreasing ψ-recursive computable aggregations.*

Proof. If $Ag_c(x_1, \ldots, x_n) < 1$, then $Ag_c(x_1, \ldots, x_{n-1}) = Ag_c(x_1, \ldots, x_n) - x_n$. So $\Omega : \{(x, y) : x < 1\}$

The next program computes $\psi(x, y)$:

```
def phi(x,y):
    if x<1:
        res=x-y
    return res
```

So ψ has $\mathcal{O}(1)$ constant complexity cost. □

Lemma 14. *Let $Ag_{c\mathcal{O}(f(n))}$ and $Ag_{c\mathcal{O}(g(n))}$ be the sets of $\mathcal{O}(f(n))$-decreasing ψ-recursive and $\mathcal{O}(g(n))$-decreasing ψ-recursive computable aggregations respectively. If $f(n)$ belongs to $\mathcal{O}(g(n))$, then*

$$Ag_{c\mathcal{O}(f(n))} \subseteq Ag_{c\mathcal{O}(g(n))}$$

Proof. Trivial. □

V. Conclusions

The main goal in this paper is to study the behaviour of computable recursive aggregations when the universe of discourse is changed. It is possible to classify computable recursive aggregations by the complexity of their expansion and the reduction function complexity cost. Moreover, it is found a relation between the complexity of a computable recursive aggregation and its expansion function cost complexity.

Acknowledgment

This research has been partially supported by the Government of Spain (grant TIN2015-66471-P), the Government of Madrid (grant S2013/ICE-2845) and Complutense University (UCM Research Group 910149).

References

[1] G. Barnett and L. Del Tonga. *Data Structures and Algorithms*. DotNetSlackers, 2008.
[2] G. Beliakov, A. Pradera and T. Calvo. *Aggregations Functions: A guide for Practitioners*. Springer, 2007.
[3] B. Brassard. *Fundamentals of Algorithmics*. Pearson, 2015.
[4] H. Bustince, B. De Baets, J. Fernandez, R. Mesiar and J. Montero. A generalization of the migrativity property of aggregation functions. *Information Sciences*, 191:76 – 85, 2012.
[5] V. Cutello and J. Montero. Recursive connective rules. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 2(14):3–20, 1999.
[6] A. del Amo, J. Montero and E. Molina. Representation of consistent recursive rules. *European Journal of Operational Research*, 130(1):29–53, 2001.
[7] D. Gómez and J. Montero. A discussion on aggregations operators. *Kybernetika*, 40:107–120, 2004.
[8] R. González del Campo, L. Garmendia and J. Montero. Expansible computable aggregation rules. In *Proceedings of the 2015 International Conference on Intelligent Systems and Knowledge Engineering, ISKE 2015, Taipei, Taiwan*, pages 8–11, November 2015.
[9] A. Kolesárová, R. Mesiar and J. Montero. Sequential aggregation of bags. *Information Sciences*, 294:305–314, 2015.
[10] J. Giancarlo Lucca, G. Pereira Dimuro, B. R. C. Bedregal, R. Mesiar, A.árová and H. Bustince. Preaggregation functions: Construction and an application. *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, 24(2):260–272, 2016.
[11] J. Montero, R. González del Campo, L. Garmendia, D. Gómez and J. Tinguaro. Computable aggregations. *Information Sciences*, 2, 2017.

Relaciones de Indistinguibilidad Definidas Positivas

J. Recasens
Depto. Tecnología de la Arquitectura
Universidad Politécnica de Cataluña
Sant Cugat del Vallès
j.recasens@upc.edu

M. Santos Tomás
Depto. Tecnología de la Arquitectura
Universidad Politécnica de Cataluña
Barcelona
maria.santos.tomas@upc.edu

***Resumen*—Se proporcionan dos caracterizaciones geométricas de las relaciones borrosas reflexivas y simétricas definidas positivas basadas en la inmersión isométrica de sus pseudodistancias naturalmente asociadas respecto a las t-normas arquimedianas continuas con generadores aditivos $t(x) = \arccos x$ y $t(x) = \sqrt{1-x}$.**

Dada la importancia de la t-norma $T_{\arccos x}$ con generador aditivo $t(x) = \arccos x$ en estas caracterizaciones, también se caracterizará dicha t-norma.

Palabras clave: t-norma, t-norma arquimediana continua, generador aditivo, relación de T-indistinguibilidad, distancia, matriz definida positiva, determinante de Cayley-Menger.

I. Introducción

En el volumen 157 de la revista Fuzzy Sets and Systems aparecen publicados dos artículos ([8], [13]) que estudian la relación entre la propiedad de ser definida positiva y la transitividad de una relación borrosa reflexiva y simétrica desde dos puntos de vista diferentes. En [13] el interés está en el estudio de medidas de similitud usualmente usadas en, por ejemplo, química combinatoria mientras que en [8] el foco está puesto en la caracterización de kernels (ver también [9]). Uno de los resultados más importantes compartidos por ambos artículos es que una relación borrosa reflexiva y simétrica es tres-definida semipositiva (ver Definición III.2) si, y sólo si, es $T_{\arccos}$-transitiva (es decir, una relación de $T_{\arccos}$-indistinguibilidad) donde $T_{\arccos}$ es la t-norma arquimediana continua con generador aditivo $t(x) = \arccos x$. En [13] también se analiza la relación entre ser definida positiva y la t-norma con generador aditivo $t(x) = \sqrt{1-x}$. La transitividad respecto a esta t-norma también se considera en el estudio de particiones borrosas en otro artículo del mismo volumen de Fuzzy Sets and Systems [4]. Más tarde, también en esta revista, [3] insiste en considerar el problema abierto de caracterizar las relaciones borrosas reflexivas y simétricas definidas positivas.

Es, en efecto, un problema interesante y el presente trabajo proporciona dos caracterizaciones geométricas de dichas relaciones. Tras una sección de cuestiones preliminares, la sección III estudia y caracteriza la importante t-norma arquimediana continua $T_{\arccos}$ con generador aditivo $t(x) = \arccos x$ al relacionarlo con la anulación del determinante de relaciones de T-indistinguibilidad unidimensionales (ver Definición III.5). Los resultados de la sección IV proporcionan caracterizaciones de una relación borrosa reflexiva y simétrica definida positiva A basadas en la inmersión isométrica de pseudodistancias asociadas a A (Proposición II.9) mediante $T_{\sqrt{1-x}}$ y $T_{\arccos}$ en un espacio euclídeo y en una hiperesfera.

II. Preliminares

Esta sección contiene las definiciones y propiedades básicas relativas a t-normas, relaciones de T-indistinguibilidad y matrices definidas positivas que se necesitarán a lo largo del trabajo. Empecemos recordando la caracterización de las t-normas arquimedianas continuas por sus generadores aditivos.

Proposición II.1. *[7] Una t-norma T es arquimediana continua si, y sólo si, existe una función $t : [0,1] \to [0,\infty]$ decreciente y continua con $t(1) = 0$ tal que para todo $x, y \in [0,1]$*

$$T(x,y) = t^{[-1]}(t(x)+t(y))$$

donde $t^{[-1]}$ es la pseudo inversa de t definida por

$$t^{[-1]}(x) = \begin{cases} t^{-1}(x) & \text{si } x \in [0,t(0)] \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

T es estricta si $t(0) = \infty$ y no estricta en caso contrario. t se denomina un generador aditivo de T y dos generadores aditivos de la misma t-norma difieren sólo en una constante multiplicativa positiva.

A partir de una t-norma continua por la izquierda se puede definir su residuación y birresiduación. Si la t-norma se usa para modelizar la conjunción lógica, entonces su residuación y birresiduación representan la implicación y biimplicación lógicas respectivamente.

Definición II.2. *[7] Sea T una t-norma continua por la izquierda.*

- *La residuación $\overrightarrow{T}$ de T es la aplicación $\overrightarrow{T} : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ definida para todo $x, y \in [0,1]$ por*
$$\overrightarrow{T}(x,y) = \sup\{\alpha \in [0,1] \mid T(x,\alpha) \leq y\}.$$
- *La birresiduación $\overleftrightarrow{T}$ de T es la aplicación $\overleftrightarrow{T} : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ definida para todo $x, y \in [0,1]$ por*
$$\overleftrightarrow{T}(x,y) = \text{mín}(\overrightarrow{T}(x,y), \overrightarrow{T}(y,x)).$$

Proposición II.3. *[7] Sea T una t-norma arquimediana continua y t un generador aditivo de T. Entonces para todo $x, y \in [0,1]$*

- $$\overrightarrow{T}(x,y) = t^{[-1]}(t(y)-t(x)).$$
- $$\overleftrightarrow{T}(x,y) = t^{-1}(|t(x)-t(y)|).$$

Necesitaremos el siguiente resultado que afirma que una t-norma continua por la izquierda puede recuperarse de su residuación.

Proposición II.4. *[1] Una t-norma es continua por la izquierda si, y sólo si,* $\inf\{\alpha \in [0,1] \mid \overrightarrow{T}(x,\alpha) \geq y\} = T(x,y)$ *para todo* $x,y \in [0,1]$.

Gracias a esta proposición, una t-norma continua por la izquierda puede recuperarse a partir de su residuación y por tanto la t-norma está caracterizado por ella. No es el caso cuando T no es continua por la izquierda tal como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo II.5. *[1] Consideremos las dos t-normas (no continuas por la izquierda)* T_1 *y* T_2 *definidas por*

$$T_1(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) \in [0,\frac{1}{2}] \times [0,\frac{1}{2}] \\ \text{mín}(x,y) & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$T_2(x,y) = \begin{cases} T_1(x,y) & \text{si } (x,y) \neq (\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \\ \frac{1}{2} & \text{si } (x,y) = (\frac{1}{2},\frac{1}{2}). \end{cases}$$

$T_1 \neq T_2$ *pero* $\overrightarrow{T}_1 = \overrightarrow{T}_2$.

Las relaciones de indistinguibilidad son uno de los tipos de relaciones borrosas más importantes porque borrosifican les conceptos de equivalencia e igualdad. Han sido estudiadas extensivamente tanto desde el punto de vista teórico como aplicado. En [10] el lector puede hallar un panorama general de dichas relaciones.

Definición II.6. *[10], [15] Sea* T *una t-norma y* X *un conjunto. Una relación borrosa* E *en* X *es una relación de* T*-indistinguibilidad si, y sólo si, para todo* $x,y,z \in X$

- $E(x,x) = 1$ *(Reflexividad)*
- $E(x,y) = E(y,x)$ *(Simetría)*
- $T(E(x,y),E(y,z)) \leq E(x,z)$ *(*T*-transitividad).*

Si $E(x,y) = 1$ *si, y sólo si,* $x = y$*, entonces se dice que* E *separa puntos.*

Definición II.7. *Una relación borrosa reflexiva y simétrica* E *en* X *se llama un relación de proximidad o de tolerancia.*

Las relaciones de indistinguibilidad están relacionadas con distancias desde diferentes puntos de vista. Uno que se necesitará en la sección IV es el resultado enunciado en la Proposición II.9.

Definición II.8. *Sea* X *un conjunto. Una aplicación* $d : X \times X \to [0,\infty]$ *es una pseudodistancia o pseudométrica si, y sólo si, para todo* $x,y,z \in X$

- $d(x,x) = 0$
- $d(x,y) = d(y,x)$
- $d(x,y) + d(y,z)) \geq d(x,z)$

Si $d(x,y) = 0$ *si, y sólo si,* $x = y$*, entonces* d *es una distancia o métrica en* X.

Proposición II.9. *[14] Sea* T *una t-norma arquimediana continua,* t *un generador aditivo de* T *y* X *un conjunto. Una relación borrosa* E *en* X *es una relación de* T*-indistinguibilidad si, y sólo si,* $t(E)$ *es una pseudodistancia en* X*.* E *separa puntos si, y sólo si,* $t(E)$ *es una distancia.*

Recordemos finalmente la definición de matriz definida positiva.

Definición II.10. *Una matriz real* A *simétrica* $n \times n$ *es definida positiva si* $\vec{u}^t A \vec{u} > 0$ *para todo vector no nulo* $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ *y definida semipositiva si* $\vec{u}^t A \vec{u} \geq 0$.

Hay muchas caracterizaciones de las matrices definidas positivas. La siguiente proposición recuerda un par de ellas.

Proposición II.11. *Sea* A *una matriz real simétrica* $n \times n$*. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

- *A es definida definida positiva.*
- *Todos los valores propios de A son positivos.*
- *Todos los menores principales de A son positivos, donde el k-ésimo menor principal de A es el determinante de su submatriz compuesta por sus k primeras filas y k primeras columnas.*

III. Caracterización de $T_{\arccos}$

Tal como se mencionó en la sección introductoria, la t-norma arquimediana continua $T_{\arccos}$ con generador aditivo $t(x) = \arccos x$ desempeña un papel importante en la caracterización de las relaciones borrosas definidas semipositivas. Por ejemplo, una relación borrosa reflexiva y simétrica es tres definida positiva (Definición III.2) si, y sólo si, es una relación de $T_{\arccos}$-indistinguibilidad. Esto hace especial a esta t-norma y merece la pena estudiarla con detalle. Además, en la subsección IV.1, $T_{\arccos}$ se usará para caracterizar geométricamente las relaciones borrosas reflexivas y simétricas definidas positivas. En esta sección se dará una caracterización de esta t-norma a partir de relaciones de indistinguibilidad unidimensionales (ver Definición III.5).

La siguiente proposición describe explícitamente la t-norma $T_{\arccos}$ y sus residuación y birresiduación.

Proposición III.1. *Para todo* $x,y \in [0,1]$,

- $$\begin{aligned} T_{\arccos}(x,y) &= \text{máx}(\cos(\arccos x + \arccos y), 0) \\ &= \text{máx}(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}, 0) \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \overrightarrow{T}_{\arccos}(x,y) &= \cos(\text{máx}(0, \arccos y - \arccos x)) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \\ xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} & \text{si } x > y. \end{cases} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \overleftrightarrow{T}_{\arccos}(x,y) &= \cos(|\arccos x - \arccos y|) \\ &= \cos(\arccos x - \arccos y) \\ &= xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}. \end{aligned}$$

Definición III.2. *[13] Una relación borrosa* A *reflexiva y simétrica en un conjunto* $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ *de cardinal* $n > 2$

es tres-definida semipositiva si para todo $0 \leq i,j,k \leq n$, $i \neq j \neq k \neq i$ la submatriz de A

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ij} & 1 & a_{jk} \\ a_{ik} & a_{jk} & 1 \end{pmatrix}$$

es definida semipositiva, donde $A(x_i,x_j) = a_{ij}$.

En [8], [13] se da la siguiente caracterización de las relaciones de tolerancia tres-definidas semipositivas.

Proposición III.3. *[8], [13] Una relación borrosa A reflexiva y simétrica en un conjunto X es tres definida semipositiva si, Y sólo si, es $T_{\arccos}$-transitiva (i.e.: es una relación de $T_{\arccos}$-indistinguibilidad).*

La proposición anterior tiene esta bonita interpretación geométrica.

- Si $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,3}$ es una matriz 3×3 definida positiva, entonces es la matriz de un producto escalar $< \cdot,\cdot >$ y se pueden hallar tres vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ linealmente independientes con $a_{ij} =< \vec{u}_i, \vec{u}_j >$. $a_{ii} = 1$ significa qhe estos vectores son unitarios y el ángulo determinado por $\vec{u}_i$ y $\vec{u}_j$ es por tanto $\arccos a_{ij}$. La Proposición III.3 dice que para que estos vectores existan estos ángulos deben verificar la desigualdad triangular; en otras palabras, la suma de dos de ellos debe ser mayor o igual que el otro.
- Se puede obtener otra interpretación geométrica teniendo en cuenta que $\arccos a_{ij}$ también es la longitud del arco que une los extremos de los vectores $\vec{u}_i$ y $\vec{u}_j$ con sus orígenes en el origen de coordenadas en la esfera de centro el origen de coordenadas y radio 1. Así la matriz A es tres-definida semipositiva si, y sólo si, las longitudes de los tres ángulos satisfacen la desigualdad triangular. Esto se generalizará en la subsección IV.2.

La siguiente proposición presenta la forma más natural de generar una relación de T-indistinguibilidad a partir de un subconjunto borroso de un universo X. Generaliza (borrosifica) el hecho de que, en el caso crisp, un subconjunto (crisp) $A \subseteq X$ particiona X en dos partes: A y su complementario $X - A$.

Proposición III.4. *[10], [14] Sea μ un subconjunto borroso de X y T una t-norma continua por la izquierda. La relación borrosa E_μ de X definida para todo $x,y \in X$ por*

$$E_\mu(x,y) = \overleftrightarrow{T}(\mu(x),\mu(y))$$

es una relación de T-indistinguibilidad.

Definición III.5. *[5], [10] Una relación de T-indistinguibilidad de X de la forma E_μ para algún subconjunto borroso μ de X se llama unidimensional.*

Lema III.6. *Sea T una t-norma arquimediana continua no estricta, t un generador aditivo de T y μ un subconjunto borroso de un conjunto X de cardinal finito. Entonces existe un subconjunto borroso ν normalizado tal que $E_\mu = E_\nu$.*

Demostración. Considérese $k = \text{máx}\{-t(\mu(x)) \mid x \in X\}$ y ν definido para todo $x \in X$ por

$$\nu(x) = t^{-1}(t(\mu(x)) + k).$$

- ν es normalizado: Sea $x_0 \in X$ tal que $k = -t(\mu(x_0))$. Entonces $\nu(x_0) = t^{-1}(t(\mu(x_0)) - t(\mu(x_0)) = t^{-1}(0) = 1$.
- $E_\nu = E_\mu$:

$$\begin{aligned} &E_\nu(x,y) \\ &\quad = t^{-1}(|t(t^{-1}(t(\mu(x)) + k)) - t(t^{-1}(t(\mu(y)) + k))|) \\ &\quad = t^{-1}(|t(\mu(x)) - t(\mu(y))|) = E_\mu(x,y). \end{aligned}$$

□

Lema III.7. *Sea T una t-norma continua por la izquierda, X un conjunto de cardinal finito y μ un subconjunto borroso de X constante. Entonces $E_\mu(x,y) = 1$ para todo $x,y \in X$ y por consiguiente el rango de E_μ es 1 ($\text{rg}(E_\mu) = 1$).*

Demostración. Trivial. □

La siguiente proposición caracteriza la t-norma $T_{\arccos}$ como la única para la cual $det(E_\mu) = 0$ para todo subconjunto borroso de un conjunto de cardinal 3.

Proposición III.8. *Sea $X = \{x_1,x_2,x_3\}$ un conjunto de cardinal 3 y T una t-norma continua por la izquierda.* $\det(E_\mu) = 0$ *para todo subconjunto borroso μ de X si, y sólo si $T = T_{\arccos}$.*

Demostración. Gracias al lema anterior podemos considerar que el subconjunto μ de X está normalizado y, sin pérdida de generalidad, de la forma $\mu = (1,x,y)$ con $x,y \in [0,1]$ y $1 \geq x \geq y$. Entonces,

$$\begin{aligned} E_\mu &= \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ x & 1 & \overleftrightarrow{T}(x,y) \\ y & \overleftrightarrow{T}(x,y) & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ x & 1 & \overrightarrow{T}(x,y) \\ y & \overrightarrow{T}(x,y) & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\det(E_\mu) = 1 + 2xy\overrightarrow{T}(x,y) - x^2 - y^2 - (\overrightarrow{T}(x,y))^2 = 0$ si, y sólo si, $\overrightarrow{T}(x,y) = xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$.

Siendo esto cierto para todo $x,y \in [0,1]$ con $x \geq y$, y gracias a la Proposición II.4 se tiene que $T = T_{\arccos}$. □

Otro forma de expresar este resultado es la siguiente proposición.

Proposición III.9. *Sea $X = \{x_1,x_2,x_3\}$ un conjunto de cardinal 3 y T una t-norma continua por la izquierda.* $\text{rg}(E_\mu) = 2$ *para todo subconjunto borroso μ de X no constante si, y sólo si $T = T_{\arccos}$.*

El siguiente resultado generaliza la proposición anterior en una dirección.

Proposición III.10. *Sea $X = \{x_1,x_2,...,x_n\}$ un conjunto finito de cardinal $n \geq 2$, μ un subconjunto borroso no constante de X y E_μ la relación de $T_{\arccos}$-indistinguibilidad unidimensional de X generada por μ. Entonces* $\text{rg}(E_\mu) = 2$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $\mu = (1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ con $1 \geq a_2 \geq a_3, \geq \ldots \geq a_n$ y podemos escribir $\mu = (1, \cos b_2, \cos b_3, \ldots, \cos b_n)$. Dado que μ es no constante, $a_n \neq 1$ y por tanto $\cos b_n \neq 1$ y $\sin b_n \neq 0$. Entonces

$$\mathrm{rg}(E_\mu) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_2 & 1 & \overrightarrow{T}(a_2,a_3) & \ldots & \overrightarrow{T}(a_2,a_n) \\ a_3 & \overrightarrow{T}(a_2,a_3) & 1 & \ldots & \overrightarrow{T}(a_3,a_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & \overrightarrow{T}(a_2,a_n) & \overrightarrow{T}(a_3,a_n) & \ldots & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & \cos b_2 & \cos b_3 & \ldots & \cos b_n \\ \cos b_2 & 1 & \cos(b_3 - b_2) & \ldots & \cos(b_n - b_2) \\ \cos b_3 & \cos(b_3 - b_2) & 1 & \ldots & \cos(b_n - b_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos b_n & \cos(b_n - b_2) & \cos(b_n - b_3) & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Restando a la i-ésima columna, $i > 1$, la primera multiplicada por $\cos b_i$ se obtiene que el rango es

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cos b_2 & 1 - \cos^2 b_2 & \sin b_3 \sin b_2 & \ldots & \sin b_n \sin b_2 \\ \cos b_3 & \sin b_3 \sin b_2 & 1 - \cos^2 b_3 & \ldots & \sin b_n \sin b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos b_n & \sin b_n \sin b_2 & \sin b_n \sin b_3 & \ldots & 1 - \cos^2 b_n \end{pmatrix} =$$

$$1 + \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 - \cos^2 b_2 & \sin b_3 \sin b_2 & \ldots & \sin b_n \sin b_2 \\ \sin b_3 \sin b_2 & 1 - \cos^2 b_3 & \ldots & \sin b_n \sin b_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin b_n \sin b_2 & \sin b_n \sin b_3 & \ldots & 1 - \cos^2 b_n \end{pmatrix} =$$

$$1 + \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \sin^2 b_2 & \sin b_3 \sin b_2 & \ldots & \sin b_n \sin b_2 \\ \sin b_3 \sin b_2 & \sin^2 b_3 & \ldots & \sin b_n \sin b_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin b_n \sin b_2 & \sin b_n \sin b_3 & \ldots & \sin^2 b_n \end{pmatrix}$$

Restando a la i-ésima columna, $i < n$, la última multiplicada por $\frac{\sin b_i}{\sin b_n}$ (recuérdese que $\sin b_n \neq 0$) se obtiene que el rango de E_μ es

$$1 + \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & \sin b_n \sin b_2 \\ 0 & 0 & \ldots & \sin b_n \sin b_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \sin^2 b_n \end{pmatrix} = 2.$$

□

Como corolario se obtiene la siguiente caracterización de la t-norma $T_{\arccos}$.

Proposición III.11. *Sea T una t-norma continua por la izquierda y X un conjunto finito de cardinal $n > 2$. $T = T_{\arccos}$ si, y sólo si, $\mathrm{rg}(E_\mu) = 2$ para todo subconjunto borroso μ no constante de X.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Proposición III.10.

$\Leftarrow$) Consideremos una t-norma T diferente de $T_{\arccos}$ y μ un subconjunto borroso de X de la forma $(1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ con $1 > a_2 > a_3$ y con $\overrightarrow{T}(a_2, a_3) \neq \overrightarrow{T}_{\arccos}(a_2, a_3)$. (Tales a_2, a_3 existen gracias a la Proposición II.4). Entonces

$$\det\begin{pmatrix} 1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & 1 & \overleftrightarrow{T}(a_2,a_3) \\ a_3 & \overleftrightarrow{T}(a_2,a_3) & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & 1 & \overrightarrow{T}(a_2,a_3) \\ a_3 & \overrightarrow{T}(a_2,a_3) & 1 \end{pmatrix}.$$

Este determinante es diferente de 0 gracias a la Proposición III.8 y por tanto $\mathrm{rg}(E_\mu) \geq 3$.

□

IV. Dos Caracterizaciones Geométricas de las Relaciones Borrosas Reflexivas y Simétricas Definidas Positivas

De la sección anterior se tiene que una relación borrosa reflexiva y simétrica en un conjunto X de cardinal 3 es $T_{\arccos}$-transitiva si, y sólo si, es definida semipositiva. Si X es de cardinal mayor que 3, la condición es necesaria, pero no suficiente como se muestra en [8] mediante un contraejemplo.

Esta sección contiene dos caracterizaciones de las relaciones borrosas reflexivas y simétricas definidas positivas: en la subsección IV-A relacionada con la inmersión isométrica en un espacio euclídeo y en la subsección IV-B relacionada con la inmersión isométrica en la hiperesfera $\mathbb{S}^n = \{\vec{v} = (x_0, x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n x_i^2 = 1\}$ en $\mathbb{R}^{n+1}$ de centro el origen de coordenadas $\vec{0}$ y radio 1.

IV-A. Inmersión en $\mathbb{R}^n$

Definición IV.1. *Sea $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ un conjunto finito de cardinal $n+1$ y d una distancia en X. Denotando $d(x_i, x_j)$ por d_{ij} para todo $0 \leq i, j \leq n$, el determinante de Cayley-Menger $CM(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ es*

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & d_{01}^2 & d_{02}^2 & \ldots & d_{0n}^2 \\ 1 & d_{01}^2 & 0 & d_{12}^2 & \ldots & d_{1n}^2 \\ 1 & d_{02}^2 & d_{12}^2 & 0 & \ldots & d_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & d_{0n}^2 & d_{1n}^2 & d_{2n}^2 & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

La importancia de este determinante estriba en el hecho de que si el conjunto X está contenido en $\mathbb{R}^n$ y d es la distancia euclídea, entonces está relacionado con el volumen del $n+1$-simplex generado por los puntos de X del siguiente modo.

Proposición IV.2. *Sea $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ un conjunto finito de $n+1$ puntos de $\mathbb{R}^n$ y d la distancia euclídea. Entonces el volumen $v(X)$ del $n+1$-simplex con vértices los elementos de X es*

$$v(X) = \sqrt{\frac{(-1)^{n+1}}{2^n (n!)^2} CM(x_0, x_1, \ldots, x_n)}.$$

Este resultado se puede consultar en cualquier libro y artículo que estudie las inmersiones en un espacio euclídeo. Uno de los primeros, citado en [6], es [12]. En particular, el determinante de Cayley-Menger de un conjunto de puntos de $\mathbb{R}^n$ debe tener el mismo signo que $(-1)^{n+1}$. De aquí se obtiene la siguiente caracterización de los espacios métricos finitos que se pueden inyectar isométricamente en un espacio euclídeo.

Proposición IV.3. *[6] Sea $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ un conjunto finito de cardinal $n+1$ y d una distancia en X. Denotando $d(x_i, x_j)$ by d_{ij} para todo $0 \le i, j \le n$, (X, d) es inyectable isométricamente en $\mathbb{R}^n$ si y sólo si, para todo $k = 1, 2, \ldots, n$ el signo de $CM(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ es igual a $(-1)^{k+1}$.*

Proposición IV.4. *[11] Sea $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ un conjunto finito de cardinal $n+1$ y d una distancia en X. Denotando $d(x_i, x_j)$ por d_{ij} para todo $0 \le i, j \le n$, (X, d) es inyectable isométricamente en $\mathbb{R}^n$ si, y sólo si, la matriz $n \times n$ con valores $x_{ij} = \frac{d_{0i}^2 + d_{0j}^2 - d_{ij}^2}{2}$ $(1 \le i, j \le n)$ es definida positiva.*

En el caso de una relación borrosa reflexiva y simétrica, su matriz A asociada $n \times n$ tiene unos en la diagonal, así que para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, se tiene

$$1 = x_{ii} = \frac{d_{0i}^2 + d_{0i}^2 - d_{ii}^2}{2} = \frac{2d_{0i}^2}{2} = d_{0i}^2.$$

y, por lo tanto,

$$d_{0i} = 1.$$

Así en este caso el determinante de Cayley-Menger de d es

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & d_{12}^2 & \ldots & d_{1n}^2 \\ 1 & 1 & d_{12}^2 & 0 & \ldots & d_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & d_{1n}^2 & d_{2n}^2 & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

Además, de

$$x_{ij} = \frac{d_{0i}^2 + d_{0j}^2 - d_{ij}^2}{2} = \frac{2 - d_{ij}^2}{2}$$

se obtiene

$$d_{ij} = \sqrt{2}\sqrt{1 - x_{ij}} \quad \textit{para todo } 1 \le i, j \le n.$$

En términos de los elementos de A, entonces

$$CM(x_0, x_1, \ldots, x_n)$$
$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2(1-x_{12}) & \ldots & 2(1-x_{1n}) \\ 1 & 1 & 2(1-x_{12}) & 0 & \ldots & 2(1-x_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 2(1-x_{1n}) & 2(1-x_{2n}) & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

y se obtiene la siguiente caracterización geométrica de las relaciones borrosas reflexivas y simétrica con matriz asociada definida positiva.

Proposición IV.5. *Una relación borrosa reflexiva y simétrica A en un conjunto $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ finito es definida positiva si, y sólo si, es una relación de $T_{\sqrt{1-x}}$-indistinguibilidad y en $X' = X \cup \{x_0\}$ la distancia asociada d (i.e.: $d_{ij} = \sqrt{2}\sqrt{1 - x_{ij}}$ si $i, j > 0$ y $d_{0i} = 1$ para $i > 0$) es inyectable isométricamente en $\mathbb{R}^n$.*

En la inmersión, x_0 puede enviarse al origen de coordenadas x_0' y las imágenes x_i' de $x_i, i > 0$ corresponden a los extremos de los vectores $\overrightarrow{x_0' x_i'}$ con lo que la proposición anterior se puede enunciar de modo más claro.

Proposición IV.6. *Una relación borrosa $A = (x_{ij})$ reflexiva y simétrica en un conjunto $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de cardinal finito n es definida positiva si, y sólo si, es una relación de $T_{\sqrt{1-x}}$-indistinguibilidad y X con la distancia $d(x_i, x_j) = \sqrt{2}\sqrt{1 - x_{ij}}$, $1 \le i, j \le n$, se puede inyectar isométricamente en $\mathbb{R}^n$ de tal modo que las imágenes de los puntos de X están situados sobre la hiperesfera $\mathbb{S}^{n-1}$.*

En particular, para un conjunto X de cardinal 3 esto significa que el determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2(1-x_{12}) & 2(1-x_{13}) \\ 1 & 1 & 2(1-x_{12}) & 0 & 2(1-x_{23}) \\ 1 & 1 & 2(1-x_{13}) & 2(1-x_{23}) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$8(x_{12}x_{13}x_{23} - x_{12}^2 - x_{13}^2 - x_{23}^2 + 1)$$

debe ser mayor que 0. Esto es equivalente a que A sea $T_{\arccos}$-transitiva y la Proposición III.3 se puede reinterpretar del siguiente modo.

Proposición IV.7. *Las siguientes afirmaciones sobre una relación borrosa reflexiva y simétrica R en un conjunto X son equivalentes.*

- *R es tres-definida semipositiva.*
- *R es una relación de $T_{\arccos}$-indistinguibilidad.*
- *$\sqrt{1-R}$ es una pseudodistancia en X y todo subconjunto de cardinal 3 de X se puede inyectar isométricamente en $\mathbb{R}^3$ de tal modo que las imágenes de los puntos de X están situados en la esfera $\mathbb{S}^2$.*

Esta última proposición también muestra la relación entre $T_{\arccos}$ y $T_{\sqrt{1-x}}$. En [13] se demostró que si una relación borrosa reflexiva y simétrica es tres-definida semipositiva, entonces es $T_{\sqrt{1-x}}$-transitiva. Es un resultado interesante que no se sigue de forma directa de la $T_{\arccos}$-transitividad porque las dos t-normas no son comparables: $T_{\arccos}(0{,}7, 0{,}8) = 0{,}13 > 0{,}10 = T_{\sqrt{1-x}}(0{,}7, 0{,}8)$ y $T_{\arccos}(0{,}8, 0{,}8) = 0{,}28 < 0{,}45 = T_{\sqrt{1-x}}(0{,}8, 0{,}8)$. El resultado anterior clarifica la situación.

IV-B. Inmersión en $\mathbb{S}^n$

Mientras que en la subsección anterior se ha obtenido la caracterización de una relación de tolerancia definida positiva A mediante el estudio de la inyectabilidad de la métrica generada por A y el generador aditivo $t(x) = \sqrt{1-x}$ de la t-norma $T_{\sqrt{1-x}}$ en un espacio euclídeo, en esta subsección la caracterización se obtendrá por el estudio de la inyectabilidad de la métrica generada por el generador aditivo $t(x) = \arccos x$ de la t-norma $T_{\arccos}$ en una hiperesfera. Esto generaliza las interpretaciones geométricas de la Proposición III.3.

Sea $\mathbb{S}^n = \{\vec{v} = (x_0, x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = 1\}$ la hiperesfera en $\mathbb{R}^{n+1}$ de centro el origen de coordenadas $\vec{0}$ y radio 1. La métrica esférica d es la métrica en $\mathbb{S}^n$ definida para todo $\vec{u} = (x_0, x_1, \ldots x_n), \vec{v} = (y_0, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{S}^n$ por

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = \arccos(|\sum_{i=0}^{n} x_i \cdot y_i|) = \arccos < \vec{u}, \vec{v} >$$

donde $< \vec{u}, \vec{v} >$ es el producto escalar usual en $\mathbb{R}^{n+1}$. Es la longitud del mayor arco de círculo que une $\vec{u}$ con $\vec{v}$.

Proposición IV.8. *Sea $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ un conjunto finito de cardinal $n+1$ y d una distancia en X. Denotando $d(x_i, x_j)$ por d_{ij} para todo $0 \leq i, j \leq n$, (X, d) es inyectable isométricamente en $\mathbb{S}^n$ si, y sólo si, la matriz $n \times n$ con valores $x_{ij} = \cos d_{ij}$ es definida positiva.*

En este caso, la matriz A con valores x_{ij} es la matriz de una relación borrosa reflexiva y simétrica.

El determinante de Cayley-Menger de d es

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \arccos^2 x_{12} & \ldots & \arccos^2 x_{1n} \\ 1 & 1 & \arccos^2 x_{12} & 0 & \ldots & \arccos^2 x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \arccos^2 x_{1n} & \arccos^2 x_{2n} & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

Además,

$$x_{ij} = \cos d_{ij}.$$

De aquí que la siguiente proposición presenta una caracterización geométrica alternativa de las relaciones borrosas reflexivas y simétricas con la matriz asociada definida positiva.

Proposición IV.9. *Una relación borrosa reflexiva y simétrica A en un conjunto $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ finito es definida positiva si, y sólo si, es una relación de $T_{\arccos}$-indistinguibilidad y X con la distancia $d(x_i, x_j) = \arccos x_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$ se puede inyectar isométricamente en $\mathbb{S}^{n-1}$ con la métrica esférica.*

V. Conclusiones

En este trabajo se han dado dos caracterizaciones métricas de las relaciones borrosas reflexivas y simétricas definidas positivas mediante el uso de resultados conocidos de inyectabilidad en espacios euclídeos e hiperesferas con las distancias asociadas generadas por el generador aditivo de $T_{\arccos}$ y $T_{\sqrt{1-x}}$ según la Proposición II.9.

Los resultados obtenidos en la subsección IV-B permiten una elegante demostración geométrica de las Proposiciones III.8 y III.10. De forma esquemática: Es sabido que una relación de indistinguibilidad E que separe puntos en un conjunto X con $E(x,y) \neq 0$ para todo $x, y \in X$ transitiva respecto a una t-norma arquimediana continua determina una relación de estar entre métrica (metric betweenness relation) [6] en X que es lineal si, y sólo si, E es unidimensional [10]. En particular una relación de $T_{\arccos}$-indistinguibilidad unidimensional E en $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ determina una relación de estar entre lineal en X. Entonces $t(E) = \arccos(E)$ es una distancia que también determina una relación de estar entre lineal en X [2] y por lo tanto los puntos de X se pueden inyectar isométricamente en un arco de una hiperesfera. Junto al centro de dicha hiperesfera determinan un $n+1$-simplex contenido en un plano y por consiguiente cualquier terna de vectores $\overrightarrow{x_0x_1}$, $\overrightarrow{x_0x_2}$,...,$\overrightarrow{x_0x_n}$ son linealmente dependientes. (Esto también puede interpretarse como que todos los volúmenes de este simplex de dimensión mayor que 2 son 0).

Referencias

[1] D. Boixader, Some Properties Concerning the Quasi-inverse of a t-norm Mathware & Soft Computing 5 (1998) 5–12.

[2] D. Boixader, J. Recasens, Indistinguishability Operators with Respect to Different t-norms. Int. J. Uncertainty Fuzziness and Knowledge-based Systems 20 (2012) 167–183.

[3] C. Degang, Z. Deli, Structure of feature spaces related to fuzzy similarity relations as kernels. Fuzzy Sets and Systems 237 (2014) 90–95.

[4] L. Foulloy, E. Benoit, Building a class of fuzzy equivalence relations Fuzzy Sets and Systems 157(11) (2006) 1417–1437.

[5] J. Jacas, On the generators of T-indistinguishability operators. Stochastica 12 (1988) 49–63.

[6] K. Menger, Untersuchungen über allgemeine Metrik. Math. Ann. 100 (1928) 75–113.

[7] E.P., Klement, R. Mesiar, E. Pap, Triangular norms. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2000).

[8] B. Moser, On the T-transitivity of kernels Fuzzy Sets and Systems 157(13) (2006) 1787–1796.

[9] B. Moser, On representing and generating kernels by fuzzy equivalence relations, J. Mach. Learn. Res. 7 (2006) 2603–2620.

[10] J. Recasens, Indistinguishability Operators. Modelling Fuzzy Equalities and Fuzzy Equivalence Relations. Studies in Fuzziness and Soft Computing. Springer, 2011.

[11] I. J. Schoenberg, Remarks to Maurice Fréchet's article 'Sur la définition axiomatique d'une classe d'espace distanciés vectoriellement applicable sur l'espace de Hilbert', Ann. Math. 36 (1935) 724–732.

[12] P.H. Schouten, Mehrdimensionale Geometrie 2 (Die Polytope). Sammlung Schubert XXXVI, Leipzig (1905).

[13] M.S. Tomás, C. Alsina, J. Rubio-Martinez, Pseudometrics from three-positive semidefinite similarities Fuzzy Sets and Systems 157(17) (2006) 2347–2355.

[14] L. Valverde, On the Structure of F-indistinguishability Operators. Fuzzy Sets and Systems 17 (1985) 313–328.

[15] L.A. Zadeh, Similarity relations and fuzzy orderings. Inform. Sci. 3 (1971) 177–200.

Negaciones naturales asociadas a t-subnormas discretas

Sebastia Massanet*†, Juan Vicente Riera*†, Joan Torrens*†
* *Departamento de Ciencias Matemáticas e Informática*
Grupo de investigación en Soft Computing, Procesamiento de Imágenes y Agregación (SCOPIA)
Universidad de las Islas Baleares, 07122 Palma, España
†*Instituto de Investigación Sanitaria de las Islas Baleares (IdISBa), 07010 Palma, España*
{s.massanet, jvicente.riera, jts224}@uib.es

***Resumen*—En las últimas décadas, las operaciones definidas sobre cadenas finitas, usualmente llamadas operaciones discretas, han experimentado un gran interés por sus aplicaciones en muchos campos de la ciencia. Una de estas operaciones son las llamadas t-subnormas discretas que son una generalización de las t-normas discretas y que tienen una especial relevancia en aplicaciones que usan etiquetas lingüísticas. En este trabajo, se estudian las negaciones naturales asociadas a t-subnormas discretas incidiendo en su estructura y en algunas de sus propiedades. En particular, se caracterizan algunos casos concretos de negaciones discretas que pueden ser la negación natural asociada a una t-subnorma discreta. En este trabajo, los conceptos de negación débil y simétrica, que resultan ser equivalentes en el caso discreto, desempeñarán un papel clave.**

***Index Terms*—función de agregación discreta, t-subnorma discreta, negación natural.**

I. Introducción

En muchas situaciones prácticas en las que los cálculos y los razonamientos deben de ser reducidos a un número finito de posibles valores, a menudo cualitativos, el enfoque lingüístico borroso es un marco adecuado para modelar dicha información. Esto es debido, en este caso, a que los términos cualitativos usados por los expertos son habitualmente representados por variables lingüísticas en lugar de valores numéricos. En este tipo de enfoques, las variables lingüísticas se valoran en cadenas finitas totalmente ordenadas tales como:

$$L = \{\text{Extremadamene Malo}, \text{Muy Malo}, \text{Malo}, \text{Regular}, \\ \text{Bueno}, \text{Muy Bueno}, \text{Extremadamente Bueno}\},$$

que pueden ser todas representadas por la cadena finita $L_n = \{0, 1, \ldots, n\}$. Consecuentemente, muchos investigadores han centrado sus esfuerzos en el estudio de operaciones definidas sobre L_n, o abreviadamente operaciones discretas (ver [7], [8], [11], [18] y concretamente [23] como trabajo pionero en este ámbito).

Entre las diferentes operaciones discretas, las funciones de agregación discretas destacan por su importancia debido a la necesidad de fusionar un conjunto inicial de datos en uno final que los represente. Existen muchos ejemplos de posibles aplicaciones de las funciones de agregación entre los que destacan los procesos de decisión, las evaluaciones subjetivas, el procesamiento de imágenes o el reconocimiento de patrones, entre otros. Por ello, el estudio de dichas funciones ha ido en aumento en los últimos años como se evidencia con la publicación de diferentes monográficos sobre dicha temática (ver [2], [3], [12]). En muchos casos, el estudio de funciones de agregación discretas se lleva a cabo suponiendo la verificación de alguna propiedad adicional, como puede ser el caso de la suavidad, que es considerada en este entorno como la homóloga a la continuidad en el intervalo unidad, o equivalentemente la propiedad de 1-Lipschitz. En esta línea de investigación, muchas familias de funciones de agregación discretas han sido también estudiadas o incluso caracterizadas. Por ejemplo, las t-normas y t-conormas suaves han sido caracterizadas en [24] (ver también [23]), las t-subnormas suaves en [20], las medias ponderadas ordinales en [16], las uninormas en $\mathcal{U}_{\text{mín}}$ y $\mathcal{U}_{\text{máx}}$ y nulnormas en [18], las uninormas discretas idempotentes en [6], las uninormas y nulnormas no conmutativas en [19] y [8] respectivamente, las cópulas en [22] y las cuasi-cópulas en [1].

Las funciones de agregación discretas se pueden clasificar en cuatro grandes famílías dependiendo de su relación con la función mínimo y la función máximo: conjuntivas cuando se encuentran por debajo del mínimo, disyuntivas cuando se encuentran por encima del máximo, funciones promedio o compensatorias cuando se encuentran entre el mínimo y el máximo y mixtas en cualquier otro posible caso. En este artículo, trabajaremos con funciones de agregación discretas conjuntivas y en particular, con la familia de t-subnormas discretas. Estas operaciones generalizan la familia de t-normas discretas (ver [7], [15], [24]) y pueden ser vistas como un caso particular de subgrupo topológico ordenado [5]. Las t-subnormas sobre $[0,1]$ juegan un papel muy relevante en la construcción de sumas ordinales de t-normas continuas por la izquierda así como en otros métodos de construcción (ver [14]). Además, los estudios sobre generadores aditivos y multiplicativos de estos operadores (ver [9], [21], [25]) así como la verificación de determinadas propiedadades tales como la cancelatividad [17] o la verificación de la condición de Lipschitz justifican la importacia del estudio de las t-subnormas.

Recientemente, una linea de investigación de las t-subnormas sobre $[0,1]$ ha sido dedicada a su negación natural asociada. El concepto de negación natural asociada fue estudiado en [4] para el caso de t-normas continuas por la izquierda, mientras que en [13] se investigaron en profundidad las t-subnormas con negación natural asociada fuerte. En este último trabajo, fue demostrado que tales t-subnormas son de hecho t-normas. Además se investigaron las relaciones entre diferentes propiedades algebraicas y analíticas como la cancelatividad condicional, la propiedad Arquimediana, la continuidad por la izquierda o sus elementos nilpotentes. Por ello, y siguiendo esta linea de investigación, en este artículo queremos desarrollar un estudio similar para el caso de t-subnormas discretas. La negación natural asociada a estos operadores discretos será ampliamente analizada y se presentarán varias ideas sobre su estructura.

Este trabajo se organizará de la siguiente manera: con la intención de que sea lo más autocontenido posible, en la sección II se presentaran algunos conceptos básicos sobre operaciones discretas, y en concreto sobre t-subnormas y t-normas discretas. En la sección III se estudiaran las negaciones débiles y simétricas, dos subfamilias de negaciones discretas que veremos que en el contexto discreto son equivalentes En la sección IV, el concepto de 0-función de una t-subnorma discreta es introducido e investigado caracterizando aquellas 0-funciones que satisfacen la condición de ser una negación discreta. Además, entre otras importantes propiedades, se demuestra que las negaciones débiles son las únicas negaciones discretas que son la negación natural asociada a una t-norma discreta. Finalmente, este trabajo finaliza con la sección V en la que se exponen algunas conclusiones y posibles líneas de trabajo futuro.

II. Preliminares

Supondremos que el lector está familiarizado con los conceptos más relevantes sobre funciones de agregación, negaciones borrosas, t-normas (ver [15]) y también sobre t-normas discretas, esto es, t-normas definidas sobre una cadena finita (ver [24]). Por ello, solo recordaremos las definiciones y resultados esenciales necesarios para una correcta comprensión de este trabajo.

Es conocido (ver [24]) que para el estudio de funciones de agregación binarias todas las cadenas finitas con el mismo número de elementos son equivalentes. Por ello, utilizaremos la más simple de ellas con $n+1$ elementos:

$$L_n = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$$

y, para todo $a, b \in L_n$ con $a \leq b$, utilizaremos la notación $[a, b]$ para denotar la subcadena dada por $[a, b] = \{x \in L_n \mid a \leq x \leq b\}$.

Definición 1 (**[24]):**

- Una función $f : L_n \to L_n$ se dice que es *suave* cuando $\mid f(x) - f(x-1) \mid \leq 1$ para todo $x \in L_n$ con $x \geq 1$.
- Una operación binaria F sobre L_n se dice que es *suave* cuando sus secciones, vertical y horizontal, lo son.

La importancia de la condición de suavidad radica en el hecho de que generalmente esta característica es usada en el caso discreto de manera equivalente a la continuidad en el intervalo $[0, 1]$, propiedad equivalente a la de divisibilidad (para una t-norma T, $x \leq y$ si y solo si existe $z \in L_n$ tal que $T(y, z) = x$), ver también [24].

Proposición 2 (**[24]):** La única negación suave (equivalentemente fuerte o estrictamente decreciente) sobre L_n es la negación clásica dada por

$$N(x) = n - x \quad \text{para todo} \quad x \in L_n.$$

Proposición 3 (**[24]):** Consideremos $m+1$ elementos de la cadena L_n dados por $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_{m-1} < a_m = n$ y sea T_i una t-norma definida sobre la cadena $[a_{i-1}, a_i]$ para todo $i = 1, \ldots, m$. Entonces, la operación binaria sobre L_n dada por $T(x, y) =$

$$\begin{cases} T_i(x, y) & \text{si existe un } i \text{ tal que } a_{i-1} \leq x, y \leq a_i, \\ \min\{x, y\} & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

es siempre una t-norma en L_n usualmente llamada *suma ordinal* de las t-normas $T_1, \ldots, T_m$.

Proposición 4 (**[24]):** Existe una y solo una t-norma Arquimediana y suave sobre L_n dada por la expresión

$$T(x, y) = \max\{0, x + y - n\} \tag{1}$$

conocida habitualmente como la t-norma de Łukasiewicz.

Además, toda t-norma suave se puede caracterizar como una suma ordinal de t-normas de Łukasiewicz del siguiente modo tal y como indica el siguiente resultado:

Proposición 5 (**[24]):** Una t-norma T sobre L_n es suave si y solo si existe un número natural m con $1 \leq m \leq n$ y un subconjunto J de L_n,

$$J = \{0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_{m-1} < a_m = n\}$$

tal que T viene dada por $T(x, y) =$

$$\begin{cases} \max\{a_k, x + y - a_{k+1}\} & \text{si existe } a_k \in J \\ & \text{con } a_k \leq x, y \leq a_{k+1}, \\ \min\{x, y\} & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Un concepto que generaliza la noción de t-norma es el de t-subnorma.

Definición 6: Sea $T : L_n^2 \to L_n$ una operación binaria sobre L_n. Se dice que T es una *t-subnorma* cuando T es asociativa, conmutativa, creciente en cada variable y verifica $T(x, y) \leq \min\{x, y\}$ para todo $x, y \in L_n$.

Obviamente, cualquier t-norma sobre L_n es también una t-subnorma pero no viceversa. Por ejemplo, la menor t-subnorma sobre L_n es la cero t-subnorma ($T(x, y) = 0$ para todo $x, y \in L_n$) que claramente no es una t-norma sobre L_n.

III. Algunas propiedades de la negaciones discretas

Como la única negación suave sobre L_n es la clásica, expresada por $N(x) = n - x$, nos podemos plantear el hecho de investigar otras negaciones diferentes a ésta. En este sentido, si consideramos la posibilidad de que la negación no sea suave, podemos encontrar muchas negaciones discretas tal como veremos a continuación. Las siguientes definiciones son adaptaciones sobre L_n de las propuestas en [4] y [6].

Definición 7: Sea $N : L_n \to L_n$ una negación discreta.

- N es una *negación débil* si $x \leq N^2(x)$ para todo $x \in L_n$.
- N se dice *simétrica* cuando el conjunto
$$F_N = \{(n,0)\} \cup \{(x,y) \in L_n^2 \mid N(x+1) \leq y \leq N(x)\}$$
es simétrico, esto es, $(x,y) \in F_N$ si y solo si $(y,x) \in F_N$.

En el caso de negaciones definidas sobre el intervalo $[0,1]$, las negaciones débiles y simétricas no coinciden en general, y solo coinciden en el caso en que N sea continua por la izquierda (ver [4]). El siguiente ejemplo ilustra este hecho.

Ejemplo 8: Las negaciones simétricas son aquellas negaciones N cuyo grafo es simétrico con respecto a la función identidad. Así, cada posible región constante de N se corresponde con un punto de discontinuidad y viceversa (ver [4]). En este sentido, si la función no es continua por la izquierda en esos puntos, la propiedad $x \leq N^2(x)$ puede fallar. Por ejemplo, la negación dada por

$$N(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0{,}25, \\ 1{,}25 - x & \text{si } 0{,}25 < x < 1, \\ 0 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Es fácil probar que N es simétrica, pero claramente no es una negación débil ya que para todo x tal que $0 < x \leq 0{,}25$ se verifica que $N^2(x) = N(1) = 0 < x$.

En el caso discreto ambos conceptos coinciden siempre como se verá en la siguiente proposición. La demostración de la misma es una adaptación de la considerada en el lema 2 de [6]. Hemos querido incluir la demostración de este resultado en aras de una mayor comprensión del mismo.

Proposición 9: Sea $N : L_n \to L_n$ una negación discreta. Las siguientes propiedades son equivalentes:

i) N es simétrica.
ii) N es una negación débil.
iii) Para todo $(x,y) \in L_n^2$ se verifica:
$$y \leq N(x) \iff x \leq N(y).$$

Demostración. $(i) \Longrightarrow (ii)$. Para todo $x \in L_n$ tenemos por definición que $(x, N(x)) \in F_N$. Como N es simétrica se tiene que $(N(x), x) \in F_N$ hecho que implica que $x \leq N(N(x))$. Esto es, N es una negación débil.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$. Consideremos $(x,y) \in L_n^2$ tal que $x \leq N(y)$, el decrecimiento de N implica que $N(x) \geq N(N(y)) \geq y$. Similarmente, de $y \leq N(x)$ se sigue que $x \leq N(y)$.

$(iii) \Longrightarrow (i)$. Queremos probar que F_N es simétrica. Consideremos $(x,y) \in F_N$, entonces $N(x+1) \leq y \leq N(x)$ y por tanto $x \leq N(y)$. Por otra parte, si $N(y+1) > x$, entonces

$$x+1 \leq N(y+1) \implies y+1 \leq N(x+1) \implies y < N(x+1),$$

que contradice el hecho que $(x,y) \in F_N$. Por tanto, concluimos que $N(y+1) \leq x$ y así $(y,x) \in F_N$, demostrando que F_N es simétrica. ■

Existen muchos ejemplos de negaciones discretas débiles (o simétricas) sobre L_n. En el siguiente ejemplo presentamos una familia paramétrica de negaciones discretas que abarcan desde la negación drástica hasta la negación clásica.

Ejemplo 10: Consideremos $\alpha \in L_n$ y sea N_α dada por

$$N_\alpha(x) = \begin{cases} n & \text{si } x = 0, \\ \alpha - x & \text{si } 0 < x < \alpha, \\ 0 & \text{si } x \geq \alpha. \end{cases}$$

Claramente N_α es una negación débil para todo $\alpha \in L_n$. Además, si $\alpha = 0$ obtenemos N_0 la negación drástica, mientras que si $\alpha = n$ obtenemos la negación clásica $N_n(x) = n - x$.

IV. T-subnormas discretas y sus negaciones asociadas

En esta sección queremos investigar la región cero de una t-subnorma discreta similarmente a como se ha estudiado en el caso de t-subnormas definidas sobre el intervalo unidad. Para ello empezaremos dando la siguiente definición propuesta en [13] para el caso $[0,1]$.

Definición 11: Para cada t-subnorma discreta $T : L_n \times L_n \to L_n$, llamaremos *0-función asociada* (denotada por N_T) a aquella dada por

$$N_T(x) = \text{máx}\{z \in L_n \mid T(x,z) = 0\}.$$

Contrariamente a lo que ocurre para el caso de las t-normas, la 0-función asociada de una t-subnorma no necesita ser una negación discreta porque $N_T(n) = \text{máx}\{z \in L_n \mid T(n,z) = 0\}$ podría ser diferente de 0 (cuando T es una t-subnorma propia, n no es el elemento neutro de T). Cuando N_T sea una negación discreta, la llamaremos *negación natural asociada* de la t-subnorma T. Además, cabe destacar que

1. Si $n = 1$, la t-subnorma cero (con 0-función asociada dada por $N(x) = 1$ para $x \in \{0,1\}$, no es una negación), y la t-norma mínimo (con la negación clásica como negación natural asociada) son las únicas t-subnormas sobre $L_1 = \{0,1\}$.
2. Cuando $n = 2$ hay exactamente siete t-subnormas sobre L_2 que pueden ser fácilmente construidas, de las cuales solo dos de ellas son t-normas. En cualquier caso, las únicas posibidades de 0-funciones asociadas son:
   - La función constante $N(x) = 2$ para todo $x \in L_2 = \{0,1,2\}$.
   - $N(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \in \{0,1\}, \\ 1 & \text{si } x = 2. \end{cases}$
   - La negación clásica $N(x) = 2 - x$.
   - La negación drástica $N(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{si } x \in \{1,2\}. \end{cases}$

   Claramente, solo los dos últimos casos son negaciones discretas.

De acuerdo a los resultados anteriores, supondremos a partir de ahora que $n \geq 3$. Así, para $n \geq 3$ podemos encontrar también ejemplos de t-subnormas, diferentes de la t-subnorma cero, cuya 0-función asociada no es una negación discreta tal como se puede ver en el siguiente ejemplo.

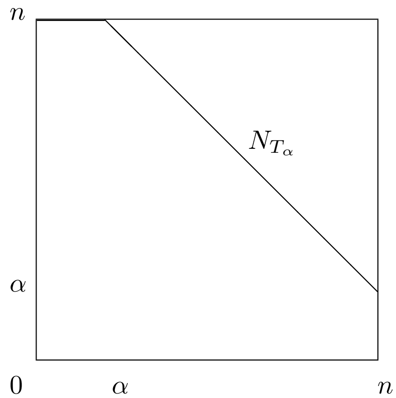

Figura 1. 0-función asociada N_{T_α} del ejemplo 12.

Ejemplo 12: Consideremos $\alpha \in L_n$ y la función $T_\alpha : L_n^2 \to L_n$ dada por

$$T_\alpha(x, y) = \max\{0, x+y-n-\alpha\} \qquad \text{para todo} \quad x, y \in L_n.$$

Entonces T_α es siempre un t-subnorma suave (ver [20]) con $T_\alpha(n, n) = n-\alpha$. En particular, T_α es una t-subnorma propia si y solo si $\alpha > 0$. Además, su 0-función asociada vendrá dada por:

$$N_{T_\alpha}(x) = \max\{z \in L_n \mid T_\alpha(x, z) = 0\}$$
$$= \max\{z \in L_n \mid x + z - n - \alpha \leq 0\}.$$

Esto es,

$$N_{T_\alpha}(x) = \min\{n, n + \alpha - x\} = \begin{cases} n & \text{si } x \leq \alpha, \\ n + \alpha - x & \text{si } x > \alpha. \end{cases}$$

Por tanto, es obvio que N_{T_α} es una negación discreta solo cuando $\alpha = 0$ en cuyo caso T_α es de hecho la t-norma de Łukasiewicz. Para los otros casos se tiene que $N_{T_\alpha}(n) = \alpha > 0$. Podemos ver dibujada la función N_{T_α} en la figura 1.
En el caso discreto tenemos una fácil caracterización de las t-subnormas que verifican que N_T es una negación.

Lema 13: Sea $T : L_n^2 \to L_n$ una t-subnorma discreta. La 0-función asociada a T es una negación discreta si y solo si $T(n, 1) = 1$.

Demostración. Si N_T es una negación discreta entonces $N_T(n) = \max\{z \in L_n \mid T(x, n) = 0\} = 0$ y consecuentemente $T(n, 1) > 0$. Como T siempre está por debajo del mínimo entonces se debe verificar que $T(n, 1) = 1$.

Recíprocamente, si $T(n, 1) = 1$ entonces $N_T(n) = 0$ y N_T es una negación discreta. ∎

Además, N_T resulta ser una negación débil y esta propiedad caracteriza de hecho las negaciones que estan asociadas a una t-subnorma satisfaciendo $T(n, 1) = 1$ (equivalentemente aquellas que estan asociadas a alguna t-norma) de la siguiente manera:

Proposición 14: Sea $N : L_n \to L_n$ una negación discreta. Los siguientes ítems son equivalentes:

i) Existe una t-norma T tal que $N = N_T$.
ii) Existe una t-subnorma T verificando $T(n, 1) = 1$ tal que $N = N_T$.
iii) N es una negación débil.

Demostración. Es evidente que $(i) \implies (ii)$. Para demostrar que $(ii) \implies (iii)$ supongamos que existe alguna t-subnorma T con $T(n, 1) = 1$ tal que $N = N_T$. En este caso tenemos $N(x) = \max\{z \in L_n \mid T(x, z) = 0\}$ y por tanto $T(x, N(x)) = 0$ hecho que implica directamente que

$$N^2(x) = N(N(x)) = \max\{z \in L_n \mid T(N(x), z) = 0\} \geq x.$$

Finalmente, para ver que $(iii) \implies (i)$, consideremos N una negación débil y tomemos la función dada por

$$T(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq N(x), \\ \min\{x, y\} & \text{si } y > N(x), \end{cases} \tag{2}$$

y veamos que T es una t-norma[1], que tendrá claramente a N como negación natural asociada. Notar que la función T dada por la ecuación (2) es creciente en ambas variables y para todo $x > 0$ tenemos $T(n, x) = \min\{n, x\} = x$, mientras que $T(n, 0) = 0$ por definición. Así, T tiene por elemento neutro n. Como N es una negación débil, por la proposición 9 se tiene que $y \leq N(x)$ si y solo si $x \leq N(y)$ y esto implica que T también es conmutativa. Finalmente, es fácil ver (aunque es un cálculo tedioso) que también se verifica la propiedad asociativa y así obtenemos que T es una t-norma. ∎

De acuerdo a la proposición anterior, cuando una negación discreta N es la negación asociada a alguna t-subnorma también es la negación asociada a alguna t-norma. Sin embargo, puede haber muchas más t-subnormas que t-normas que tienen una negación débil específica como su negación asociada (ver por ejemplo la proposición 17). Pero este no es el caso cuando la negación asociada sea suave, esto es, cuando se considera la negación clásica $N(x) = n - x$ como demostraremos en el siguiente resultado, que puede ser interpretado como el homólogo para el caso discreto del teorema 3.3 de [13].

Proposición 15: Sea $T : L_n^2 \to L_n$ una t-subnorma discreta con negación natural asociada $N_T(x) = n - x$. Entonces, necesariamente T es una t-norma.

Demostración. Solo es necesario ver que $n \in L_n$ es el elemento neutro de T. Supongamos que existe un $x \in L_n$ tal que $T(n, x) = x' < x$. Entonces se tiene que $n - x' > n - x$ y consecuentemente $T(x, n - x') > 0$. Denotemos por $y = T(x, n - x')$, entonces

$$0 = T(n - x', x') = T(n - x', T(x, n))$$
$$= T(T(n - x', x), n) = T(y, n),$$

que es una contradicción ya que por el lema 13 se tiene $T(n, y) \geq T(n, 1) = 1$ para todo $y > 0$. Consecuentemente, debe ser $T(n, x) = x$ para todo $x \in L_n$ y por tanto T es una t-norma. ∎

Como consecuencia de la proposición anterior algunos resultados conocidos para t-subnormas sobre $[0, 1]$ que tienen una negación fuerte asociada (ver [13], [14]), pueden ser

[1] Para cualquier negación débil N, la t-norma T dada por la ecuación (2) es conocida habitualmente como *mínimo nílpotente* con respecto a N.

demostrados aquí para el caso discreto, tal como veremos en la siguiente proposición.

Proposición 16: Sea $T : L_n^2 \to L_n$ una t-subnorma discreta con negación natural asociada $N_T(x) = n - x$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

i) T es condicionalmente cancelativa.
ii) T es estrictamente creciente en su región positiva.
iii) T es suave.
iv) T es la t-norma de Łukasiewicz.

Demostración. Daremos solo un esbozo de la demostración. Es obvio que $(i) \Longrightarrow (ii)$.

Para demostrar que $(ii) \Longrightarrow (iii)$, consideremos $x, y \in L_n$ con $x < y$. Se tiene que $n - y < n - x$ y así, $T(y, n - x) > 0$. Sea $z = T(y, n - x)$. Entonces, usando un razonamiento similar al caso $[0, 1]$ (ver teorema 2 de [14]) se demuestra que debe verificarse $T(y, n - z) = x$. Esto es, existe algún $z \in L_n$ tal que $T(y, z) = x$ y T satisface la propiedad de divisibilidad que es equivalente a la condición de que T sea una t-norma suave (ver la proposición 7.3.3 de [24]).

$(iii) \Longrightarrow (iv)$. Como T tiene por negación asociada $N_T(x) = n - x$, debe de ser una t-norma y la única t-norma suave con esta condición es la t-norma de Łukasiewicz.

Finalmente, la implicación $(iv) \Longrightarrow (i)$ es trivial. ∎

La proposición 15 nos permite caracterizar todas las t-subnormas que tienen por negación natural la familia paramétrica de negaciones discretas considerada en el ejemplo 10. Para ello,

Proposición 17: Sea $T : L_n^2 \to L_n$ una t-subnorma discreta. Se verifican los siguientes resultados:

i) N_α es la negación natural asociada a T si y solo si T es una suma ordinal de una t-norma T' sobre $[0, \alpha]$ con la negación clásica $N(x) = \alpha - x$ como negación asociada y una t-subnorma T'' sobre $[\alpha, 1]$.
ii) Si T es suave entonces N_α es la negación natural asociada a T si y solo si T es suma ordinal de la t-norma de Łukasiewicz sobre $[0, \alpha]$ y una t-subnorma suave T'' sobre $[\alpha, 1]$.

Demostración. Probemos el primer ítem (i). Supongamos que N_α es la negación natural asociada a T. Considerando la restricción de T en el cuadrado $[0, \alpha]^2$, claramente obtenemos una t-subnorma, $T' = T_{/[0,\alpha]^2}$, sobre la cadena finita $[0, \alpha]$ con negación natural asociada $N(x) = \alpha - x$ para todo $x \in [0, \alpha]$. Aplicando la proposición 15 se deduce que T' debe de ser una t-norma y consecuentemente tenemos, en particular, que $T(\alpha, \alpha) = \alpha$. En este caso, es bien sabido que T debe de ser una suma ordinal de una t-norma T' sobre $[0, \alpha]$ y una t-subnorma T'' sobre $[\alpha, 1]$.

Recíprocamente, es claro que cualquier t-subnorma expresada como una suma ordinal de una t-norma T' sobre $[0, \alpha]$ con negación asociada $N(x) = \alpha - x$ y una t-subnorma T'' sobre $[\alpha, 1]$, tiene a N_α como negación natural asociada.

Finalmente, notar que el ítem (ii) es consecuencia inmediata del ítem previo y de la proposición 16. ∎

La estructura de las t-subnormas caracterizadas en la proposición 17 puede ser vista en la figura 2.

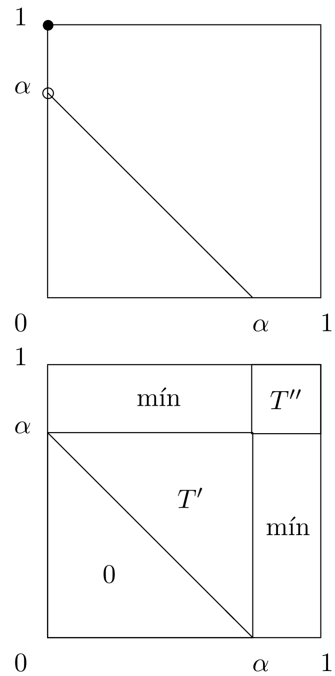

Figura 2. Negaciones N_α (arriba) de la familia parametrizada dada en el ejemplo 10 y la estructura de las t-subnormas (abajo) teniendo a N_α como negación natural asociada y caracterizadas en la proposición 17-(i).

V. Conclusiones y trabajo futuro

En este trabajo, se ha presentado un estudio en profundidad sobre las negaciones naturales asociadas a t-subnormas discretas. En primer lugar, hemos demostrado la equivalencia entre negaciones débiles y negaciones simétricas en el entorno discreto, resultado que, en general, no se verifica en el intervalo unidad $[0, 1]$ salvo que la negación borrosa sea continua por la izquierda. Después hemos introducido el concepto de 0-función de una t-subnorma discreta (a partir de la definición dada para el caso $[0, 1]$) y se han caracterizado los casos en que esta función es de hecho una negación discreta. A partir de esta investigación, como consecuencia de las propiedades de sus negaciones naturales asociadas, se han demostrado varios resultados sobre la relación existente entre t-subnormas discretas y t-normas discretas. De particular importancia es la proposición 14 que demuestra que las negaciones débiles son las únicas negaciones discretas que son las negaciones naturales asociadas a una t-norma discreta.

Como trabajo futuro, queremos analizar este tema desde otra perspectiva, esto es, si fijamos una negación débil N, ¿qué t-normas T pueden ser consideradas para conseguir una nueva t-norma T' tal que $N_{T'} = N$ y $T'(x, y) = T(x, y)$ para todo $y > N(x)$? Equivalentemente, caracterizar aquellas t-normas T cuyo operador

$$T'(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq N(x), \\ T(x, y) & \text{si } y > N(x), \end{cases}$$

es una t-norma. Este problema se ha abordado ya en [4] para el caso $[0, 1]$ pero no ha sido investigado todavía en el entorno discreto.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por el proyecto TIN2016-75404-P, AEI/FEDER, UE.

Referencias

[1] I. Aguiló, J. Suñer and J. Torrens, Matrix representation of discrete quasi-copulas, Fuzzy Sets and Systems, 159 (2008) 1658-1672.

[2] G. Beliakov, A. Pradera and T. Calvo, Aggregation Functions: A Guide for Practicioners, Springer, Berlin Heidelberg (2007).

[3] T. Calvo, G. Mayor, R. Mesiar (editors); “Aggregation operators. New trends and applications”, Studies in Fuzziness and Soft Computing, 97. Physica-Verlag, Heidelberg, (2002).

[4] R. Cignoli, F. Esteva, L. Godo and F. Montagna, On a class of left-continuous t-norms, Fuzzy Sets and Systems, 131 (2002) 283–296.

[5] A.H. Clifford, Naturally ordered commutative semigroups, Amer. J. Math., 76 (1954) 631-646.

[6] B. De Baets, J. Fodor, D. Ruiz-Aguilera and J. Torrens, Idempotent uninorms on finite ordinal scales, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 17 (2009) 1-14.

[7] B. De Baets and R. Mesiar, Discrete triangular norms, in: Topological and Algebraic Structures in Fuzzy Sets, A Handbook of Recent Developments in the Mathematics of Fuzzy Sets (S. Rodabaugh and E.-P. Klement, eds.), Trends in Logic 20, Kluwer Academic Publishers, 2003, pp. 389-400.

[8] J.C. Fodor, Smooth associative operations on finite ordinal scales, IEEE Trans. on Fuzzy Systems, 8 (2000) 791-795.

[9] R. Ghiselli Ricci, Representation of continuous triangular subnorms, in Proceedings of the IPMU-04, Perugia, Italy (2004) pp. 1105-1110.

[10] R. Ghiselli Ricci, R. Mesiar and A. Mesiarová, Lipschitzianity of triangular subnorms, in Proceedings of the IMPU-06, Paris (2006) pp. 671-677.

[11] L. Godo and V. Torra, On aggregation operators for ordinal qualitative information, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 8 (2000) 143-154.

[12] M. Grabisch, J.L. Marichal, R. Mesiar and E. Pap, Aggregation functions, in the series: *Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 127*, Cambridge University Press, (2009)

[13] B. Jayaram, T-subnorms with strong associated negation: Some properties, Fuzzy Sets and Systems, 323 (2017) 94–102.

[14] S. Jenei, Continuity of left-continuous triangular norms with strong induced negations and their boundary conditions, Fuzzy Sets and Systems, 124 (2001) 35–41.

[15] E.P. Klement, R. Mesiar and E. Pap, Triangular norms, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2000).

[16] A. Kolesárová, G. Mayor and R. Mesiar, Weighted ordinal means, Information Sciences, 177 (2007) 3822-3830.

[17] K. C. Maes, A. Mesiarová-Zemánková, Cancellativity properties for t-norms and t-subnorms, Information Sciences, 179 (2009) 1221-1233.

[18] M. Mas, G. Mayor and J. Torrens, $t-$Operators and uninorms on a finite totally ordered set, International Journal of Intelligent Systems, 14 (1999) 909-922.

[19] M. Mas, M. Monserrat and J. Torrens, On left and right uninorms on a finite chain, Fuzzy Sets and Systems, 146 (2004) 3-17.

[20] M. Mas, M. Monserrat and J. Torrens, Smooth t-subnorms on finite scales, Fuzzy Sets and Systems, 167 (2011) 82-91.

[21] G. Mayor and J. Monreal, Additive generators of discrete conjunctive aggregation operations, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 15 (2007) 1046-1052.

[22] G. Mayor, J. Suñer and J. Torrens, Copula-like operations on finite settings, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 13 (2005) 468-477.

[23] G. Mayor and J. Torrens, On a class of operators for expert systems, International Journal of Intelligent Systems, 8 (1993) 771-778.

[24] G. Mayor and J. Torrens, Triangular norms in discrete settings, in: E.P. Klement and R. Mesiar (Eds.), *Logical, Algebraic, Analytic, and Probabilistic Aspects of Triangular Norms*. Elsevier, Amsterdam, 2005, pp. 189–230.

[25] A. Mesiarová, Continuous triangular subnorms, Fuzzy Sets and Systems, 142 (2004) 75-83.

Estudio del Modus Tollens para implicaciones borrosas

Isabel Aguiló, Jaume Suñer, Joan Torrens
Soft Computing, Image Processing and Aggregation Research Group (SCOPIA)
Department of Mathematics and Computer Science
University of the Balearic Islands. 07122 Palma de Mallorca, Spain.
Balearic Islands Health Research Institute (IdISBa). 07010 Palma de Mallorca, Spain.
isabel.aguilo@uib.es, jaume.sunyer@uib.es, jts224@uib.es

***Resumen*—En la lógica borrosa y el razonamiento aproximado, la propiedad del Modus Tollens se tranforma en una desigualdad funcional involucrando una t-norma, una implicación borrosa y una negación. En este trabajo ampliamos dicha desigualdad substituyendo la t-norma por una uninorma conjuntiva, dando lugar al llamado U-Modus Tollens. Estudiamos esta nueva propiedad para implicaciones derivadas de uninormas, demostrando que existen numerosas soluciones entre las implicaciones residuadas o RU-implicaciones.**

***Index Terms*—Función de implicación borrosa, Modus Tollens, uninorma, implicación residuada, RU-implicación.**

I. Introducción

Las funciones de implicación borrosas se usan habitualmente, tanto para modelar los condicionales borrosos como también en el proceso de inferencia borrosa. De esta forma, la importancia de las funciones de implicación borrosas radica principalmente en sus aplicaciones que se extienden a muchos campos, y no se limitan únicamente al razonamiento aproximado y al control borroso (ver por ejemplo [3], [5], [14]). Ese es también el motivo de que resulte importante disponer de una gama de funciones de implicación borrosas tan amplia como sea posible (ver [25]), así como caracterizar aquellas que cumplen determinadas propiedades que resultan importantes en las aplicaciones.

Entre estas propiedades destacan las reglas de inferencia básicas dadas por el Modus Ponens y el Modus Tollens. En el ámbito de la lógica borrosa, dichas reglas se traducen en sendas desigualdades funcionales que se escriben respectivamente como

$$T(x, I(x, y)) \leq y \quad \text{para todos} \quad x, y \in [0,1], \tag{1}$$

y

$$T(N(y), I(x, y)) \leq N(x) \quad \text{para todos} \quad x, y \in [0,1], \tag{2}$$

donde T es una t-norma, I es una función de implicación borrosa y N una negación.

Debido a su importancia, ambas reglas de inferencia han sido extensivamente estudiadas por diversos autores (ver por ejemplo [2], [3], [12], [14], [22]–[24], [26]). Los primeros estudios se realizaron para implicaciones derivadas de t-normas y t-conormas. En concreto, las implicaciones residuadas y las (S, N)-implicationes fueron estudiadas en [2], [22], [23] y las QL y D-implicationes en [24]. Como generalización de estas clases de implicaciones, se han introducido otras derivadas de uninormas, en especial las RU-implicaciones y las (U, N)-implicaciones (ver por ejemplo [1], [4], [6], [13], [18]–[20]). Recientemente, el Modus Ponens y el Modus Tollens se han estudiado también para estos dos tipos de implicaciones derivadas de uninormas (ver [12] y [11] respectivamente).

De hecho, aún cuando las uninormas se introdujeron inicialmente en el ámbito de las funciones de agregación (ver [8], [27]), también han sido estudiadas como operadores lógicos dado que siempre son conjuntivas o disyuntivas. En particular, las uninormas conjuntivas son utilizadas a menudo como conjunciones borrosas y, en este sentido, substituir en las reglas del Modus Ponens y del Modus Tollens la t-norma T por una uninorma conjuntiva U resulta natural e interesante a la vez. En esta línea, dicha substitución en el Modus Ponens fue ya considerada en [15], [16] dando lugar a la propiedad llamada U-Modus Ponens (o también U-condicionalidad). Lo primero que se deriva de estos trabajos es que las implicaciones usuales, como las derivadas de t-normas y t-conormas o las implicaciones de Yager, no satisfacen la U-condicionalidad. Así, los candidatos posibles para satisfacer el U-Modus Ponens aparecen entre las implicaciones derivadas de uninormas. Se ha estudiado y resuelto ya para el caso de RU-implicaciones en [15], [16] y se ha iniciado su estudio para el caso de (U, N)-implicaciones en [17].

Por el contrario, no se ha realizado un estudio similar para el caso del Modus Tollens. Precisamente, en este trabajo queremos rellenar ese hueco y estudiar la generalización del Modus Tollens que se obtiene substituyendo la t-norma T por una uninorma U, dando lugar a la propiedad que llamaremos U-Modus Tollens. Esto es, queremos estudiar la propiedad

$$U(N(y), I(x, y)) \leq N(x) \quad \text{para todos} \quad x, y \in [0,1], \tag{3}$$

donde U es una uninorma, I es una función de implicación borrosa y N una negación.

En cuanto a la organización del trabajo, tras esta introducción empezamos con un capítulo de preliminares dedicado a que el artículo sea tan autocontenido como sea posible. La sección 3 presenta la definición y primeras propiedades del Modus Tollens respecto de una uninorma U. La sección 4 estudia el U-Modus Tollens para RU-implicaciones derivadas de tres tipos de uninormas: las de $\mathcal{U}_{\text{mín}}$, las representables y las idempotentes. Finalmente, la sección 5 incluye las conclusiones y algunas propuestas de trabajo futuro.

II. Preliminares

Supondremos que el lector está familiarizado con los resultados básicos sobre t-normas, t-conormas, negaciones y funciones de implicación borrosas (para detalles sobre t-normas, véase [9]; sobre implicaciones, véase [3], [5], [7]). A continuación recordaremos solo algunos conceptos sobre funciones de implicación borrosas y sobre uninormas con el objetivo de que el trabajo sea lo más autocontenido posible.

II-A. *Funciones de implicación borrosas*

Definición 1: ([3], [7]) Una operación binaria $I : [0,1]^2 \to [0,1]$ es una *función de implicación borrosa*, o una *implicación borrosa*, si satisface:

(I1) $I(x,z) \geq I(y,z)$ cuando $x \leq y$, para todo $z \in [0,1]$.

(I2) $I(x,y) \leq I(x,z)$ cuando $y \leq z$, para todo $x \in [0,1]$.

(I3) $I(0,0) = I(1,1) = 1$ e $I(1,0) = 0$.

Nótese que, de la definición, se desprende que $I(0,x) = 1$ e $I(x,1) = 1$ para todo $x \in [0,1]$ mientras que los valores simétricos $I(x,0)$ e $I(1,x)$ no se derivan de la definición.

Definición 2: ([3], [7]) Sea I una implicación borrosa. La función N_I definida por $N_I(x) = I(x,0)$ para todo $x \in [0,1]$, se llama la *negación natural* de I y es siempre una negación borrosa.

A continuación recordamos algunas de las propiedades más habituales de las implicaciones borrosas que utilizaremos a lo largo del trabajo:

- El *principio de neutralidad* por la izquierda:
$$I(1,y) = y \quad \text{para todo} \quad y \in [0,1]. \qquad (NP)$$
- El *principio de identidad*:
$$I(x,x) = 1 \quad \text{para todo } x \in [0,1]. \qquad (IP)$$
- La *contraposición* respecto de una negación N:
$$I(x,y) = I(N(y),N(x)) \quad \text{para todos} \quad x,y \in [0,1]. \qquad CP(N)$$

II-B. *Uninormas*

Definición 3: ([8], [27]) Una *uninorma* es una aplicación $U : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ asociativa, conmutativa, creciente en cada variable y tal que existe un elemento $e \in [0,1]$, llamado *elemento neutro*, tal que $U(e,x) = x$ para todo $x \in [0,1]$.

Evidentemente, una uninorma con elemento neutro $e = 1$ es una t-norma y una uninorma con elemento neutro $e = 0$ es una t-conorma. Para cualquier otro valor $e \in]0,1[$ la operación se comporta como una t-norma en $[0,e]^2$, como una t-conorma en $[e,1]^2$ y toma valores entre el mínimo y el máximo en el conjunto $A(e)$ dado por
$$A(e) = [0,e[\times]e,1] \cup]e,1] \times [0,e[.$$

Denotaremos de forma habitual una uninorma con elemento neutro e y t-norma y t-conorma subyacentes T y S, respectivamente, por $U \equiv \langle T,e,S\rangle$. Cualquier uninorma satisface que $U(0,1) \in \{0,1\}$; cuando $U(1,0) = 0$, se dice que la uninorma U es *conjuntiva*, mientras que, cuando $U(1,0) = 1$, se dice que U es *disyuntiva*.

Existen muchas clases diferentes de uninormas. Las más habituales pueden hallarse en el artículo recopilatorio [10]. Recordemos aquí la estructura de tres de las clases más usadas de uninormas conjuntivas.

Proposición 1: ([8], [10]) Sea $U : [0,1]^2 \to [0,1]$ una uninorma con elemento neutro $e \in]0,1[$. Si $U(0,1) = 0$, entonces la sección $x \mapsto U(x,1)$ es continua excepto para $x = e$ si y solo si U viene dada por $U(x,y) =$
$$\begin{cases} eT\left(\frac{x}{e},\frac{y}{e}\right) & \text{si } (x,y) \in [0,e]^2, \\ e + (1-e)S\left(\frac{x-e}{1-e},\frac{y-e}{1-e}\right) & \text{si } (x,y) \in [e,1]^2, \\ \text{mín}(x,y) & \text{si } (x,y) \in A(e), \end{cases}$$
donde T es una a t-norma y S es una t-conorma.
Denotaremos por $\mathcal{U}_{\text{mín}}$ a esta clase de uninormas, y por $U \equiv \langle T,e,S\rangle_{\text{mín}}$ a una uninorma de $\mathcal{U}_{\text{mín}}$ con elemento neutro e y t-norma y t-conorma subyacentes T y S, respectivamente, como .

Las uninormas idempotentes fueron completamente caracterizadas para el caso general en [21] de la siguiente forma.

Proposición 2: ([10], [21]) U es una uninorma idempotente con elemento neutro $e \in [0,1]$ si y solo si existe una función no creciente $g : [0,1] \to [0,1]$, simétrica respecto de la función identidad, con $g(e) = e$, tal que $U(x,y) =$
$$\begin{cases} \text{mín}(x,y) & \text{si } y < g(x) \text{ o } (y = g(x) \text{ y } x < g^2(x)), \\ \text{máx}(x,y) & \text{si } y > g(x) \text{ o } (y = g(x) \text{ y } x > g^2(x)), \\ x \text{ o } y & \text{si } y = g(x) \text{ y } x = g^2(x), \end{cases}$$
y U es conmutativa en los puntos (x,y) tales que $y = g(x)$ con $x = g^2(x)$.
Denotaremos por $U \equiv \langle g,e\rangle_{\text{ide}}$ a una uninorma idempotemte U con elemento neutro e y función asociada g, y a la clase de todas las uninormas idempotentes, por $\mathcal{U}_{\text{ide}}$.

Obviamente, para estas uninorrmas, la t-norma subyacente es el mínimo y la t-conorma subyacente es el máximo.

Definición 4: ([8], [10]) Diremos que una uninorma U, con elemento neutro $e \in]0,1[$, es *representable* si existe una función estrictamente creciente $h : [0,1] \to [-\infty,+\infty]$ (llamada *generador aditivo* de U, que es único excepto una constante multiplicativa $k > 0$), con $h(0) = -\infty$, $h(e) = 0$ y $h(1) = +\infty$, tal que U viene dada por
$$U(x,y) = h^{-1}(h(x) + h(y))$$
para todos $(x,y) \in [0,1]^2 \setminus \{(0,1),(1,0)\}$. Se tiene que $U(0,1) = U(1,0) = 0$ o $U(0,1) = U(1,0) = 1$.

Denotaremos por $U \equiv \langle e,h\rangle_{\text{rep}}$ a una uninorma representable con elemento neutro $e \in]0,1[$ y generador aditivo, y a la clase de todas la uninormas representables, por $\mathcal{U}_{\text{rep}}$.

Por otra parte, existen diversas clases de funciones de implicación derivadas de uninormas. Recordamos aquí el caso de las RU-implicaciones.

Definición 5: ([6]) Sea U una uninorma. La *operación residuada* obtenida a partir de U es la operación binaria dada por

$$I_U(x,y) = \sup\{z \in [0,1] \mid U(x,z) \leq y\}$$

para todos $x, y \in [0,1]$.

Proposición 3: ([6]) Sea U una uninorma y I_U su operación residuada. Entonces I_U es una implicación si y solo si $U(x,0) = 0$ para todo $x < 1$. En tal caso, I_U recibe el nombre de *RU-implicación*.

Esto incluye todas las uninormas conjuntivas, pero también muchas de disyuntivas, por ejemplo, en las clases de las uninormas representables (véase [6]) y las idempotentes (véase [18]). Sin embargo, en el caso de trabajar con uninormas continuas por la izquierda, claramente se obtiene que I_U es una implicación si y solo si U es conjuntiva.

III. Modus Tollens respecto de una uninorma

Como ya hemos comentado el objetivo principal de este trabajo es el estudio del Modus Tollens substituyendo la t-norma T por una uninorma U, de una forma similar a como se hizo para el Modus Ponens en [15], [16]. Damos a continuación la definición formal.

Definición 6: Diremos que una función de implicación borrosa I y una negación N satisfacen el *Modus Tollens respecto de una uninorma U*, o simplemente el *U-Modus Tollens*, si

$$U(N(y), I(x,y)) \leq N(x) \quad \text{para todos} \quad x, y \in [0,1]. \tag{4}$$

Notemos que la definición se ha dado para una uninorma en general y no para una que sea conjuntiva (que es el objetivo real puesto que debe generalizar la conjunción o t-norma). Esto es debido a que no es necesario dado que dicha propiedad sobre U se deriva directamente de la definición como sigue.

Proposición 4: Sean I una función de implicación borrosa y N una negación que satisfacen el Modus Tollens respecto de una uninorma U. Entonces la uninorma U ha de ser necesariamente conjuntiva.

De la definición resulta claro que el U-Modus Tollens no depende sólo de la uninorma y la implicación, sino también, y en especial, de la negación utilizada en la ecuación (4). Ilustramos este hecho en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1: Veamos cómo se comporta el U-Modus Tollens en los casos extremos de considerar la negación más pequeña y la más grande.

i) Consideremos la negación más pequeña $N = N_{D_1}$ dada por

$$N_{D_1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Notemos que en este caso (4) siempre se satisface para todo $y > 0$ dado que la uninorma U es conjuntiva. Mientras que para $y = 0$ y $x > 0$ tenemos que

$$U(N(0), I(x,0)) = U(1, N_I(x)) \leq N(x) = 0,$$

de donde se deduce que $N_I(x) = 0$ para todo $x > 0$. En resumen, una implicación I y la negación N_{D_1} satisfacen el Modus Tollens respecto de una uninorma conjuntiva U si y sólo si N_I es la propia negación N_{D_1}.

ii) Consideremos ahora la negación más grande $N = N_{D_2}$ dada por

$$N_{D_2}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

En este caso se puede ver, de forma parecida, que una implicación I y la negación N_{D_2} satisfacen el Modus Tollens respecto de una uninorma conjuntiva U si y sólo si $I(1,y) = 0$ para todo $y < 1$.

De forma similar al caso de t-normas, cuando la uninorma U es continua por la izquierda se puede dar una caracterización sencilla de las soluciones.

Proposición 5: Sean I una función de implicación borrosa, N una negación y U una uninorma conjuntiva. Si U es continua por la izquierda, I, N satisfacen el Modus Tollens respecto de U si y sólo si

$$I(x,y) \leq I_U(N(y), N(x)) \quad \text{para todos } x, y \in [0,1],$$

donde I_U indica la implicación residuada derivada de la uninorma U.

Sin embargo, la condición anterior puede ser difícil de comprobar según los casos. Queremos estudiar con más profundidad la condición del Modus Tollens para dar resultados más específicos según sean U y N. Un primer análisis de la definición anterior permite dar algunos resultados generales que listamos en la siguiente proposición.

Proposición 6: Sean I una función de implicación borrosa y N una negación que satisfacen el Modus Tollens respecto de una uninorma conjuntiva U. Sea e el elemento neutro de U, entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $U(N(y), I(1,y)) = 0$ para todo $y \in [0,1]$.
2. $N_I(x) \leq N(x)$ para todo $x \in [0,1]$. Además, para todo $x \in [0,1]$ tal que $N_I(x) \geq e$ ha que ser $N(x) = 1$.
3. Sea $\alpha_N = \sup\{x \in [0,1] \mid N(x) \geq e\}$. Entonces, se satisface una y sólo una de las siguientes condiciones:
   - $N(x) < e$ para todo $x > 0$ (es decir, $\alpha_N = 0$),
   - $\alpha_N > 0$ y se tiene $I(1,y) = 0$ para todo $y < \alpha_N$.
4. Si I satisface (NP), ha de ser necesariamente $\alpha_N = 0$.
5. Si I satisface (IP) y $N(x) < 1$ para todo $x > 0$, ha de ser necesariamente $\alpha_N = 0$.

A partir del apartado 3) de la proposición anterior, se deduce que si $\alpha_N > 0$ (y eso se da por ejemplo siempre que N sea continua) las implicaciones habituales derivadas de t-normas y t-conormas (R, (S,N), QL y D-implicaciones), así como las implicaciones de Yager no satisfacen nunca el U-Modus Tollens (ya que para todas ellas se satisface (NP)). En cambio, para diversos tipos de implicaciones derivadas de uninormas, en especial las RU-implicaciones, si se tiene, o se puede tener, $I(1,y) = 0$ para todo $y < 1$.

Dedicaremos por tanto la próxima sección al estudio del U-Modus Tollens para RU-implicaciones. Antes, damos algunos resultados para implicaciones en general en el caso de negaciones con $\alpha_N = 0$, es decir , tales que $N(x) < e$ para todo $x > 0$. El primero de ellos hace referencia a que, si U es de $\mathcal{U}_{\text{mín}}$, el U-Modus Tollens está garantizado para todos los valores con $x \le y$ y sólo hace falta verificar que se satisface para el resto de valores, es decir, para $y < x$.

Proposición 7: Sean I una función de implicación borrosa, N una negación con $\alpha_N = 0$ y U una uninorma de $\mathcal{U}_{\text{mín}}$ con elemento neutro e. Entonces I, N satisfacen el Modus Tollens respecto de U si y sólo si

$$U(N(y), I(x, y)) \le N(x) \quad \text{para todos } y < x.$$

Pasamos ahora a estudiar el caso en que la implicación satisface (NP), que es el caso de la mayoria de implicaciones derivadas de t-normas y t-conormas.

Proposición 8: Sean I una función de implicación borrosa que satisface (NP), N una negación y U una uninorma conjuntiva con elemento neutro e. Si I, N satisfacen el Modus Tollens respecto de U, entonces son ciertas las siguientes propiedades:

1. $U(N(y), y) = 0$ para todo $y \in [0, 1]$.
2. $N(x) = 0$ para todo $x \ge e$ y $N(x) < e$ para todo $x > 0$.
3. $U(N(y), I(e, y)) = 0$ para todo $y \in [0, 1]$.
4. Si N es estrictamente decreciente en el intervalo $]0, e[$, ha de ser $I(x, y) < e$ para todos $y < x < e$.

Podemos dar ahora una caracterización de las soluciones del U-Modus Tollens para el caso en que I satisfaga (NP), U sea de $\mathcal{U}_{\text{mín}}$ y N sea estrictamente decreciente en el intervalo $]0, e[$.

Teorema 1: Sean I una función de implicación borrosa que satisface (NP), $U \equiv \langle T_U, e, S_U \rangle_{\text{mín}}$ y N una negación estrictamente decreciente en $]0, e[$. Entonces I, N satisfacen el Modus Tollens respecto de U, si y sólo si se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $U(N(y), I(e, y)) = 0$ para todo $y \in [0, 1]$.
2. $N(x) = 0$ para todo $x \ge e$ y $N(x) < e$ para todo $x > 0$.
3. $I(x, y) < e$ para todos $y < x < e$.
4. I' y N' satisfacen el Modus Tollens respecto de la t-norma T_U para todos $y < x$, donde I' y N' vienen dadas respectivamente por

$$I'(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \le y \\ \frac{I(ex, ey)}{e} & \text{si } y < x \end{cases} \tag{5}$$

$$N'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{N(ex)}{e} & \text{en cualquier otro caso,} \end{cases} \tag{6}$$

Ejemplo 2: Consideremos la uninorma de $\mathcal{U}_{\text{mín}}$, $U \equiv \langle T_U, e, S_U \rangle_{\text{mín}}$ donde $T_U = T_{\mathbf{LK}}$ es la t-norma de Łukasiewicz y S_U es una t-conorma cualquiera. Sea N_e la negación dada por

$$N_e(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ e - x & \text{si } 0 < x < e \\ 0 & \text{si } x \ge e. \end{cases}$$

Por último, consideremos la implicación:

$$I_e(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \text{ o } y = 1 \\ \text{máx}(e - x, y) & \text{si } 0 < x \le e \text{ y } 0 \le y \le e \\ y & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Es fácil ver que estos operadores satisfacen todas las condiciones del teorema 1 y por lo tanto I_e, N_e satisfacen el Modus Tollens respecto de la uninorma U.

Nota 1: Notemos que en el ejemplo anterior, al igual que en el teorema 1, la t-conorma S_U puede ser cualquiera y lo mismo sucede con los valores de la implicación I fuera del rectángulo $[0, e[^2$ con la única condición de que satisfaga (NP).

IV. U-MODUS TOLLENS PARA RU-IMPLICACIONES

En el apartado anterior hemos visto que si trabajamos con negaciones N con $\alpha_N > 0$ (y ésto incluye las negaciones continuas), entonces se requiere que las implicaciones satisfagan $I(1, y) = 0$ para los valores de $y < \alpha_N$. Esta propiedad se satisface en RU-implicaciones derivadas, por ejemplo, de uninormas representables y también de algunas idempotentes. Por este motivo queremos estudiar en este apartado el U-Modus Tollens para RU-implicaciones. Lo haremos para RU-implicaciones derivadas de los tres tipos de uninormas conjuntivas recordados en los preliminares y lo dividiremos en una sección para cada caso.

IV-A. RU-implicaciones derivadas de uninormas en $\mathcal{U}_{\text{mín}}$

Veremos que en este caso tampoco son posibles negaciones continuas y volvemos a necesitar negaciones con $\alpha_N = 0$. En lo que sigue tomaremos U_0 una uninorma de $\mathcal{U}_{\text{mín}}$ de la forma $U_0 \equiv \langle T_0, e_0, S_0 \rangle_{\text{mín}}$ i I_{U_0} su implicación residuada (ver [6] para detalles sobre su estructura). Entonces tenemos los siguientes resultados.

Proposición 9: Sea I_{U_0} la implicación borrosa derivada de una uninorma $U_0 \equiv \langle T_0, e_0, S_0 \rangle_{\text{mín}}$, N una negación y $U \equiv \langle T_U, e, S_U \rangle$ una uninorma conjuntiva. Si I_{U_0}, N satisfacen el Modus Tollens respecto de U, entonces son ciertas las siguientes propiedades:

1. $U(N(y), y) = 0$ para todo $y \le e_0$.
2. $\alpha_N = 0$ (es decir, $N(x) < e$ para todo $x > 0$).
3. $N(x) = 0$ para todo $x \ge e$.
4. Si $e_0 < e$, T_U es continua y $U(e_0, e_0) = e_0$, se satisface $N(x) < e_0$ para todo $x > 0$ y $N(x) = 0$ para todo $x \ge e_0$.

Para caracterizar las soluciones en este caso distinguiremos dos posibilidades según sea el orden de los elementos neutros e y e_0.

Teorema 2: Sea I_{U_0} la implicación borrosa derivada de una uninorma $U_0 \equiv \langle T_0, e_0, S_0 \rangle_{\text{mín}}$, N una negación y U una uninorma conjuntiva con elemento neutro $e = e_0$. Entonces I_{U_0}, N satisfacen el Modus Tollens respecto de U, si y sólo si se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $N(x) = 0$ para todo $x \ge e$ y $N(x) < e$ para todo $x > 0$.

2. I_{T_0} y N' satisfacen el Modus Tollens respecto de la t-norma T_U para todos $y < x$, donde I_{T_0} es la implicación residuada derivada de la t-norma T_0 y N' viene dada por la ecuación (6).

Teorema 3: Sea I_{U_0} la implicación borrosa derivada de una uninorma $U_0 \equiv \langle T_0, e_0, S_0\rangle_{\text{mín}}$, N una negación y U una uninorma conjuntiva con elemento neutro e con $e < e_0$. Supongamos que U_0 viene dada por $U_0(x,y) =$

$$\begin{cases} eT_0'\left(\frac{x}{e}, \frac{y}{e}\right) & \text{si } x,y \in [0,e] \\ e + (e_0 - e)T_0''\left(\frac{x-e}{e_0-e}, \frac{y-e}{e_0-e}\right) & \text{si } x,y \in [e,e_0] \\ e_0 + (1-e_0)S_0\left(\frac{x-e_0}{1-e_0}, \frac{y-e_0}{1-e_0}\right) & \text{si } x,y \in [e_0,1] \\ \text{mín}(x,y) & \text{en cualquier otro caso,} \end{cases}$$

siendo T_0', T_0'' t-normas. Entonces I_{U_0}, N satisfacen el Modus Tollens respecto de U, si y sólo si se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $N(x) = 0$ para todo $x \geq e$ y $N(x) < e$ para todo $x > 0$.
2. $I_{T_0'}$ y N' satisfacen el Modus Tollens respecto de la t-norma T_U para todos $y < x$, donde $I_{T_0'}$ es la implicación residuada derivada de la t-norma T_0' y N' viene dada por la ecuación (6).

Teorema 4: Sea I_{U_0} la implicación borrosa derivada de una uninorma $U_0 \equiv \langle T_0, e_0, S_0\rangle_{\text{mín}}$, N una negación y U una uninorma conjuntiva con elemento neutro e con $e_0 < e$. Supongamos que U viene dada por $U(x,y) =$

$$\begin{cases} e_0T_U'\left(\frac{x}{e_0}, \frac{y}{e_0}\right) & \text{si } x,y \in [0,e_0] \\ e_0 + (e - e_0)T_U''\left(\frac{x-e_0}{e-e_0}, \frac{y-e_0}{e-e_0}\right) & \text{si } x,y \in [e_0,e] \\ e + (1-e)S_U\left(\frac{x-e}{1-e}, \frac{y-e}{1-e}\right) & \text{si } x,y \in [e,1] \\ \text{mín}(x,y) & \text{en cualquier otro caso,} \end{cases}$$

siendo T_U', T_U'' t-normas. Entonces I_{U_0}, N satisfacen el Modus Tollens respecto de U, si y sólo si se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $N(x) = 0$ para todo $x \geq e_0$ y $N(x) < e_0$ para todo $x > 0$.
2. I_{T_0} y N' satisfacen el Modus Tollens respecto de la t-norma T_U' para todos $y < x$, donde I_{T_0} es la implicación residuada derivada de la t-norma T_0 y N' viene dada por la ecuación (6).

Nota 2: Notemos que cuando $U_0(e,e) = e$ y T_0 es continua entonces la uninorma $U_0 \equiv \langle T_0, e_0, S_0\rangle_{\text{mín}}$ viene dada como en el teorema 3, ya que entonces T_0 resulta ser suma ordinal de dos t-normas. Análogamente, la uninorma U viene dada como en el teorema 4 siempre que $U(e_0,e_0) = e_0$ y T_U sea continua.

Ejemplo 3: En el caso $e_0 < e$ consideremos por ejemplo uninormas $U_0 \equiv \langle T_0, e_0, S_0\rangle_{\text{mín}}$ y U como en el teorema 4 donde $T_0 = T_U' = T_{\mathbf{LK}}$ la t-norma de Łukasiewicz y N la negación dada por

$$N(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ e_0 - x & \text{si } 0 < x < e_0 \\ 0 & \text{si } x \geq e_0. \end{cases}$$

Con estas restricciones se satisfacen las condiciones del teorema y I_{U_0}, N satisfacen el U-Modus Tollens respecto de la uninorma U.

IV-B. RU-implicaciones derivadas de uninormas representables

No daremos en este apartado caracterizaciones generales como en el anterior, pero sí para casos concretos. En particular, veremos que en este caso sí se pueden hallar soluciones con $\alpha_N > 0$, incluso con negaciones fuertes. Concretamente, en este apartado U_0 denotará una uninorma representable de la forma $U_0 \equiv \langle e_0, h_0\rangle_{\text{rep}}$ y I_{U_0} su implicación residuada (ver [3], [6] para detalles sobre su estructura). Recordemos que entonces la función

$$N_{h_0}(x) = h_0^{-1}(-h_0(x)) \quad \text{para todo } x \in [0,1]$$

es siempre una negación fuerte que se conoce como la negación asociada a la uninorma U_0.

Teorema 5: Sea I_{U_0} la implicación borrosa derivada de una uninorma representable $U_0 \equiv \langle e_0, h_0\rangle_{\text{rep}}$, N_{h_0} su negación asociada y U una uninorma conjuntiva, continua por la izquierda con elemento neutro e. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- I_{U_0}, N_{h_0} satisfacen el Modus Tollens respecto de U.
- $I_{U_0}(x,y) \leq I_U(N_{h_0}(y), N_{h_0}(x))$ para todos $x,y \in [0,1]$.
- $U(x,y) \leq U_0(x,y)$ para todos $x,y \in [0,1]$.

Ejemplo 4: Sea $U_0 \equiv \langle e, h_0\rangle_{\text{rep}}$ una uninorma representable con elemento neutro $e \in]0,1[$. Es conocido entonces que la t-norma subyacente T_U y la t-conorma S_U son estrictas. Consideremos las uninormas de $\mathcal{U}_{\text{mín}}$ dadas por

$$U \equiv \langle T_U, e, S_U\rangle_{\text{mín}} \qquad \text{y} \qquad U' \equiv \langle \text{mín}, e, S_U\rangle_{\text{mín}}.$$

Es obvio que $U \leq U_0$ pero $U' \not\leq U_0$ y por tanto, a partir del teorema anterior, deducimos que I_{U_0}, N_{h_0} satisfacen el U-Modus Tollens respecto de U pero no respecto de U'.

IV-C. RU-implicaciones derivadas de uninormas idempotentes

Igual que en el apartado anterior, veremos que en este caso también se pueden hallar soluciones con negaciones fuertes. Concretamente, en este apartado U_0 denotará una uninorma idempotente de la forma $U_0 \equiv \langle e_0, g_0\rangle_{\text{ide}}$ y I_{U_0} su implicación residuada (ver [18] para detalles sobre su estructura). Recordemos que en este caso, para que I_{U_0} sea realmente una implicación, ha de ser $g_0(0) = 1$ aunque U_0 puede ser incluso disyuntiva.

Teorema 6: Sea N_0 una negación fuerte con punto fijo e_0, I_{U_0} la implicación borrosa derivada de una uninorma idempotente $U_0 \equiv \langle e_0, N_0\rangle_{\text{ide}}$ y U una uninorma conjuntiva, continua por la izquierda con elemento neutro e. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- I_{U_0}, N_0 satisfacen el Modus Tollens respecto de U.
- $I_{U_0}(x,y) \leq I_U(N_0(y), N_0(x))$ para todos $x,y \in [0,1]$.
- $U(x,y) \leq U_0(x,y)$ para todos $x,y \in [0,1]$.

V. Conclusiones y trabajo futuro

En los procesos de inferencia borrosa resulta imprescindible utilizar conjunciones, implicaciones (y negaciones) que satisfagan el Modus Ponens y el Modus Tollens. Aún cuando generalmente las conjunciones se modelizan mediante t-normas, cada vez es más habitual introducir también el uso de uninormas conjuntivas. En este sentido, generalizar el Modus Ponens (Tollens) respecto de una de esas uninormas se convierte en un punto interesante de estudio.

De forma similar a como se hizo para el Modus Ponens en [15]–[17], en este trabajo se realiza un estudio del Modus Tollens respecto de uninormas conjuntivas. Se dan diversas propiedades necesarias para su cumplimiento y caracterizaciones de las soluciones en diversos casos concretos. Se estudia también el caso de RU-implicaciones derivadas de uninormas de $\mathcal{U}_{\mathrm{mín}}$, de uninormas representables y de uninormas idempotentes.

Como trabajo futuro, quedan muchos flecos por analizar, como son un estudio más exhaustivo de los casos de RU-implicaciones derivadas de uninormas representables e idempotentes, extender dicho estudio a RU-implicaciones derivadas de otros tipos de uninormas (ver [10]) y también a (U, N)-implicaciones derivadas de uninormas (ver [3]).

Acknowledgment

This paper has been partially supported by the Spanish Grant TIN2016-75404-P, AEI/FEDER, UE.

Referencias

[1] I. Aguiló, J. Suñer, J. Torrens, "A characterization of residual implications derived from left-continuous uninorms," Information Sciences, 180, 3992–4005, 2010.
[2] C. Alsina, E. Trillas, "When (S, N)-implications are (T, T_1)-conditional functions?," Fuzzy Sets and Systems, 134, 305–310, 2003.
[3] M. Baczyński, B. Jayaram, Fuzzy Implications. Studies in Fuzziness and Soft Computing, vol. 231. Springer, Berlin Heidelberg, 2008.
[4] M. Baczyński, B. Jayaram, "(U,N)-implications and their characterizations," Fuzzy Sets and Systems, 160, 2049–2062, 2009.
[5] M. Baczyński, B. Jayaram, S. Massanet, and J. Torrens, "Fuzzy implications: Past, present, and future", in Springer Handbook of Computational Intelligence, J. Kacprzyk and W. Pedrycz, Eds. Springer Berlin Heidelberg, 2015, pp. 183–202.
[6] B. De Baets, J. C. Fodor, "Residual operators of uninorms," Soft Computing 3, 89–100, 1999.
[7] J. Fodor, M. Roubens. Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.
[8] J. C. Fodor, R. R. Yager, A. Rybalov, "Structure of Uninorms," International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-based Systems, 5, 411–427, 1997.
[9] E.P. Klement, R. Mesiar, E. Pap. Triangular norms. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.
[10] M. Mas, S. Massanet, D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, "A survey on the existing classes of uninorms," Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 29, 1021–1037, 2015.
[11] M. Mas, J. Monreal, M. Monserrat, J.V. Riera, J. Torrens, "Modus Tollens on fuzzy implication functions derived from uninorms," in Fuzzy Logic and Information Fusion. To Commemorate the 70th Birthday of Professor Gaspar Mayor. In the series: Studies in Fuzziness and Soft Computing, vol. 339, T. Calvo and J. Torrens, Eds. Springer, Switzerland, 2016, pp. 49–64.
[12] M. Mas, M. Monserrat, D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, "RU and (U, N)-implications satisfying Modus Ponens," International Journal of Approximate Reasoning, 73, 123–137, 2016.
[13] M. Mas, M. Monserrat, J. Torrens, "Two types of implications derived from uninorms," Fuzzy Sets and Systems, 158, 2612–2626, 2007.
[14] M. Mas, M. Monserrat, J. Torrens, E. Trillas, "A survey on fuzzy implication functions," IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 15(6), 1107–1121, 2007.
[15] M. Mas, D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, "On a generalization of the Modus Ponens: U-conditionality," in Proceedings of IPMU-2016, Part I, CCIS 610, J.P. Carvalho et al. Eds. 2016, pp. 1–12.
[16] M. Mas, D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, "On some classes of RU-implications satisfying U-Modus Ponens," in Aggregation functions in theory and in practice. In the series: Advances in Intelligent Systems and Computing, 581, V. Torra, R. Mesiar and B. De Baets, Eds. 2018, pp. 71–82.
[17] M. Mas, D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, "Generalized Modus Ponens for (U, N)-implications," in Jesús Medina, Manuel Ojeda-Aciego, José Luis Verdegay Galdeano, David A. Pelta, Inma P. Cabrera, Bernadette Bouchon-Meunier, Ronald R. Yager (Eds.), Proceedings of IPMU 2018, Part I, Communications in Computer and Information Science, vol. 853 (2018) pp. 649–660.
[18] D. Ruiz, J. Torrens, "Residual implications and co-implications from idempotent uninorms," Kybernetika 40, 21–38, 2004.
[19] D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, "Distributivity of residual implications over conjunctive and disjunctive uninorms," Fuzzy Sets and Systems, 158, 23–37, 2007.
[20] D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, "S- and R-implications from uninorms continuous in $]0, 1[^2$ and their distributivity over uninorms," Fuzzy Sets and Systems, 160, 832–852, 2009.
[21] D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, B. De Baets, J. Fodor, "Some remarks on the characterization of idempotent uninorms," in Computational Intelligence for Knowledge-Based Systems Design. Lecture Notes in Computer Science, vol. 6178, E. HÃllermeier, R. Kruse, F. Hoffmann, Eds. Springer, Berlin, Heidelberg, 2010, pp. 425–434.
[22] E. Trillas, C. Alsina, A. Pradera, "On MPT-implication functions for fuzzy logic," Revista de la Real Academia de Ciencias. Serie A. Matemáticas (RACSAM) 98(1), 259–271, 2004.
[23] E. Trillas, C. Alsina, E. Renedo, A. Pradera, "On contra-symmetry and MPT-conditionality in fuzzy logic," International Journal of Intelligent Systems, 20, 313–326, 2005.
[24] E. Trillas, C. Campo, S. Cubillo, "When QM-operators are implication functions and conditional fuzzy relations," International Journal of Intelligent Systems, 15, 647–655, 2000.
[25] E. Trillas, M. Mas, M. Monserrat, J. Torrens, "On the representation of fuzzy rules," International Journal of Approximate Reasoning, 48, 583–597, 2008.
[26] E. Trillas, L. Valverde, "On Modus Ponens in fuzzy logic," in 15th International Symposium on Multiple-Valued Logic, pp. 294–301. Kingston, Canada, 1985.
[27] R. R. Yager, A. Rybalov, "Uninorm aggregation operators," Fuzzy Sets and Systems, 80, 111–120, 1996.

Modus Ponens generalizado para (U, N)-implicaciones

Margarita Mas, Daniel Ruiz-Aguilera, Joan Torrens
Soft Computing, Procesamiento de Imágenes y Agregación (SCOPIA)
Departament de Ciències Matemàtiques i Informàtica
Universitat de les Illes Balears. 07122 Palma, España.
Institut d'Investigació Sanitària de les Illes Balears (IdISBa). 07010 Palma, España.
mmg448@uib.es, daniel.ruiz@uib.es, jts224@uib.es

***Resumen*—El Modus Ponens resulta ser una propiedad esencial en los procesos de inferencia que se llevan a cabo tanto en el razonamiento aproximado como en el control borroso. De este modo es necesario que la conjunción y la implicación borrosa utilizadas en dichos procesos de inferencia verifiquen la desigualdad inherente a la propiedad del Modus Ponens. Habitualmente la conjunción borrosa se modeliza mediante una t-norma aunque, cada vez más, se sustituye la t-norma por una uninorma conjuntiva. En este trabajo se estudia cuándo las (U, N)-implicaciones verifican el Modus Ponens respecto de una uninorma conjuntiva U en general, de forma similar a cómo se hizo para RU-implicaciones en [21], [22]. En la inecuación funcional derivada del Modus Ponens se ven involucradas dos uninormas diferentes y una negación borrosa dando lugar a diversas posibilidades. De esta manera, en esta comunicación se presenta solo un primer paso en este estudio ya que, dependiendo de las clases a las que pertenecen dichas uninormas, aparecen numerosos casos a estudiar.**

***Index Terms*—Función de implicación borrosa, (U, N)-implicación, Modus Ponens, t-norma, uninorma, negación natural asociada.**

I. Introducción

Las funciones de implicación borrosas se utilizan habitualmente en el razonamiento aproximado y en el control borroso para modelizar los condicionales borrosos y también para realizar inferencias. Cuando se considera la regla composicional de inferencia de Zadeh, el Modus Ponens resulta ser esencial en el proceso. Al trasladar dicha regla de inferencia al ámbito borroso se obtiene la desigualdad funcional:

$$T(x, I(x, y)) \leq y \quad \text{para todos} \quad x, y \in [0, 1], \tag{1}$$

donde T es una t-norma continua e I es una función de implicación borrosa.

Debido a la importancia del Modus Ponens, diversos investigadores han ido realizando un estudio exhaustivo de aquellas t-normas T y funciones de implicación borrosas I que verifican la ecuación (1) a lo largo de los años (véase por ejemplo [2], [4], [17], [20], [30]–[33]). Los principales resultados en este campo se han dado para implicaciones derivadas de t-normas y t-conormas. Así, las implicaciones residuadas y las (S, N)-implicaciones se analizaron en detalle en [2], [30], [31], mientras que las QL y D-implicaciones se investigaron en [32]. Una recopilación de estos resultados y una completación de los mismos se puede hallar en la sección 7.4 del libro [4].

Sin embargo, existen otros tipos de implicaciones a considerar (véase [3], [4], [24]). Entre estos otros tipos podemos destacar las implicaciones derivadas de funciones de agregación más generales que las t-normas y las t-conormas. En particular, las implicaciones derivadas de uninormas se han estudiado de manera exhaustiva (véase por ejemplo [1], [5], [9], [18], [26]–[28]). De hecho, el Modus Ponens ha sido analizado recientemente para dos tipos concretos de implicaciones derivadas de uninormas: las RU-implicaciones y las (U, N)-implicaciones (véase [17]).

Aunque las uninormas se introdujeron inicialmente en el ámbito de las funciones de agregación (véase [11], [34]), se han estudiado también como operadores lógicos debido al hecho de que son siempre conjuntivas o disyuntivas. Dada su estructura, las uninormas se pueden ver claramente como generalizaciones de las t-normas y t-conormas simultáneamente y, en este sentido, se ha comprobado ya su utilidad en muchos campos como son los sistemas expertos borrosos (véase [10]), las redes neuronales (véase [6]) y la lógica borrosa en general (véase [25] y las referencias allí citadas). En particular, las uninormas conjuntivas se utilizan cada vez más como conjunciones borrosas y, en este sentido, sustituir en el Modus Ponens la t-norma T por una uninorma conjuntiva U resulta natural.

Siguiendo en esta línea, el caso de sustituir la t-norma T por una uninorma conjuntiva U, dando lugar al llamado U-Modus Ponens (o también U-condicionalidad), ha sido recientemente propuesto por los autores en [21], [22]. En estos trabajos se demuestra que la implicación considerada en el U-Modus Ponens tiene que verificar determinadas propiedades que son características de algunos tipos de implicaciones derivadas de uninormas: las RU-implicaciones y las (U, N)-implicaciones. En este sentido, el presente trabajo puede ser visto como una continuación de los artículos mencionados [21], [22] ya que, en estos artículos se investigó el U-Modus Ponens para el caso de las RU-implicaciones, mientras que en la presente comunicación hacemos lo mismo para el caso de las (U, N)-implicaciones.

El trabajo está organizado de la siguiente manera: tras la introducción, dedicamos la sección 2 a recordar algunos preliminares para lograr que el trabajo sea lo más autocontenido posible. La sección 3 está dedicada al Modus Ponens respecto de una uninorma U, incluyendo algunos resultados generales para (U,N)-implicaciones. Se demuestra en particular que la uninorma disyuntiva U' utilizada para construir la (U,N)-implicación solo puede pertenecer a unas pocas clases de uninormas de entre las más usuales, a saber, las representables, las idempotentes y las continuas en $]0,1[^2$. Se realiza un estudio exhaustivo para el caso de uninormas representables mientras que, para los otros dos casos, se dan simplemente diversos ejemplos. Finalmente, el trabajo concluye con la sección 4 dedicada a establecer algunas conclusiones y trabajo futuro.

II. Preliminares

Supondremos que el lector está familiarizado con los resultados básicos sobre t-normas, t-conormas y negaciones (para más detalles véase [14]). Supondremos también conocidos los resultados básicos sobre implicaciones (véase [4], [20]). A continuación recordaremos solo algunos conceptos sobre uninormas que utilizaremos a lo largo del trabajo. En cualquier caso, más detalles sobre uninormas y sus clases más estudiadas pueden hallarse en el reciente artículo recopilatorio [16].

Definición 1: Una *uninorma* es una aplicación $U:[0,1]^2 \to [0,1]$ asociativa, conmutativa, creciente en cada variable y tal que existe un elemento $e \in [0,1]$, llamado *elemento neutro*, tal que $U(e,x)=x$ para todo $x\in[0,1]$.

Evidentemente, una uninorma con elemento neutro $e=1$ es una t-norma y una uninorma con elemento neutro $e=0$ es una t-conorma. Para cualquier otro valor $e\in]0,1[$, la operación se comporta como una t-norma en $[0,e]^2$, como una t-conorma en $[e,1]^2$ y toma valores entre el mínimo y el máximo en el conjunto $A(e)$ dado por

$$A(e) = [0,e[\times]e,1]\cup]e,1]\times[0,e[.$$

Denotaremos de forma habitual una uninorma con elemento neutro e y t-norma y t-conorma subyacente, T y S respectivamente, por $U\equiv\langle T,e,S\rangle$. Cualquier uninorma verifica que $U(0,1)\in\{0,1\}$ y cuando $U(1,0)=0$ se dice que la uninorma U es *conjuntiva*, mientras que cuando $U(1,0)=1$ se dice que U es *disyuntiva*. Recordemos aquí la estructura de tres de las clases más usadas de uninormas conjuntivas.

Teorema 2: ([11]) Sea $U:[0,1]^2\to[0,1]$ una uninorma con elemento neutro $e\in]0,1[$.

(a) Si $U(0,1)=0$, entonces la sección $x\mapsto U(x,1)$ es continua excepto en $x=e$ si y solo si U viene dada por $U(x,y)=$

$$\begin{cases} eT\left(\frac{x}{e},\frac{y}{e}\right) & \text{si } (x,y)\in[0,e]^2,\\ e+(1-e)S\left(\frac{x-e}{1-e},\frac{y-e}{1-e}\right) & \text{si } (x,y)\in[e,1]^2,\\ \text{mín}(x,y) & \text{si } (x,y)\in A(e),\end{cases}$$

donde T es una t-norma y S es una t-conorma.

(b) Si $U(0,1)=1$, entonces la sección $x\mapsto U(x,0)$ es continua excepto en $x=e$ si y solo si U viene dada por la estructura anterior cambiando el mínimo por el máximo en $A(e)$.

Denotaremos por $\mathcal{U}_{\text{mín}}$ al conjunto de uninormas de la forma dada en (a) y por $\mathcal{U}_{\text{máx}}$ al conjunto de uninormas de la forma dada en (b). Asimismo, una uninorma de $\mathcal{U}_{\text{mín}}$ con t-norma subyacente T, t-conorma subyacente S y elemento neutro e la denotaremos por $U\equiv\langle T,e,S\rangle_{\text{mín}}$ y, de forma similar, a una uninorma de $\mathcal{U}_{\text{máx}}$ la denotaremos por $U\equiv\langle T,e,S\rangle_{\text{máx}}$.

Las uninormas idempotentes fueron analizadas primero en [7] y posteriormente caracterizadas en [8] para el caso de tener alguna continuidad lateral, y en [15] para el caso general. El resultado definitivo fue establecido en [29] como sigue.

Teorema 3: ([29]) U es una uninorma idempotente con elemento neutro $e\in[0,1]$ si y solo si existe una función decreciente $g:[0,1]\to[0,1]$, simétrica respecto de la identidad, con $g(e)=e$ y tal que $U(x,y)=$

$$\begin{cases} \text{mín}(x,y) & \text{si } y<g(x) \text{ o } (y=g(x) \text{ y } x<g^2(x)),\\ \text{máx}(x,y) & \text{si } y>g(x) \text{ o } (y=g(x) \text{ y } x>g^2(x)),\\ x \text{ o } y & \text{si } y=g(x) \text{ y } x=g^2(x),\end{cases}$$

siendo conmutativa en los puntos (x,y) tales que $y=g(x)$ con $x=g^2(x)$.

Una uninorma idempotente U con elemento neutro e y función asociada g, la denotaremos por $U\equiv\langle g,e\rangle_{\text{ide}}$ y la clase de todas las uninormas idempotentes la denotaremos por $\mathcal{U}_{\text{ide}}$. Obviamente, para esta clase de uninormas, la t-norma subyacente es siempre la t-norma mínimo y la t-conorma subyacente es siempre la t-conorma máximo.

Definición 4: Diremos que una uninorma U con elemento neutro $e\in]0,1[$ es *representable* si existe una función estrictamente creciente $h:[0,1]\to[-\infty,+\infty]$ (llamada *generador aditivo* de U, que es único salvo una constante multiplicativa $k>0$), con $h(0)=-\infty$, $h(e)=0$ y $h(1)=+\infty$, tal que U viene dada por

$$U(x,y)=h^{-1}(h(x)+h(y))$$

para todo $(x,y)\in[0,1]^2\setminus\{(0,1),(1,0)\}$ y $U(0,1)=U(1,0)=0$ o $U(0,1)=U(1,0)=1$.

Una uninorma representable con elemento neutro $e\in]0,1[$ y generador aditivo h la denotaremos por $U\equiv\langle e,h\rangle_{\text{rep}}$ y denotaremos la clase de todas las uninormas representables por $\mathcal{U}_{\text{rep}}$. Claramente, esta clase está contenida en la clase de uninormas continuas en $]0,1[^2$ que fue caracterizada en [12] (véase [16] para la versión actual y para más detalles).

Teorema 5: ([16]) Sea U una uninorma continua en $]0,1[^2$ con elemento neutro $e\in]0,1[$. Se verifica uno de los dos casos siguientes:

(a) Existen $u\in[0,e[$, $\lambda\in[0,u]$, dos t-normas continuas T_1 y T_2 y una uninorma representable R tales que U viene dada por $U(x,y) =$

$$\begin{cases} \lambda T_1\left(\frac{x}{\lambda},\frac{y}{\lambda}\right) & \text{si } x,y\in[0,\lambda],\\ \lambda+(u-\lambda)T_2\left(\frac{x-\lambda}{u-\lambda},\frac{y-\lambda}{u-\lambda}\right) & \text{si } x,y\in[\lambda,u],\\ u+(1-u)R\left(\frac{x-u}{1-u},\frac{y-u}{1-u}\right) & \text{si } x,y\in\,]u,1[,\\ 1 & \text{si } \min(x,y)\in\,]\lambda,1] \\ & \text{ y } \max(x,y)=1,\\ \lambda \text{ o } 1 & \text{si } (x,y)=(\lambda,1)\\ & \text{ o } (x,y)=(1,\lambda),\\ \min(x,y) & \text{en cualquier otro caso.}\end{cases} \tag{2}$$

(b) Existen $v\in\,]e,1]$, $\omega\in[v,1]$, dos t-conormas continuas S_1 y S_2 y una uninorma representable R tales que U viene dada por $U(x,y) =$

$$\begin{cases} vR\left(\frac{x}{v},\frac{y}{v}\right) & \text{si } x,y\in\,]0,v[,\\ v+(\omega-v)S_1\left(\frac{x-v}{\omega-v},\frac{y-v}{\omega-v}\right) & \text{si } x,y\in[v,\omega],\\ \omega+(1-\omega)S_2\left(\frac{x-\omega}{1-\omega},\frac{y-\omega}{1-\omega}\right) & \text{si } x,y\in[\omega,1],\\ 0 & \text{si } \max(x,y)\in[0,\omega[\\ & \text{ y } \min(x,y)=0,\\ \omega \text{ o } 0 & \text{si } (x,y)=(0,\omega)\\ & \text{ o } (x,y)=(\omega,0),\\ \max(x,y) & \text{en cualquier otro caso.}\end{cases} \tag{3}$$

Denotaremos por $\mathcal{U}_{\cos}$[1] la clase de todas las uninormas continuas en $]0,1[^2$. La subclase formada por todas aquellas de la forma (2) la denotaremos por $\mathcal{U}_{\cos,\text{mín}}$ y una uninorma concreta de esta clase la denotaremos por $U\equiv\langle T_1,\lambda,T_2,u,(R,e)\rangle_{\cos,\text{mín}}$. Análogamente, la subclase formada por las uninormas de la forma (3) será denotada por $\mathcal{U}_{\cos,\text{máx}}$ y una uninorma concreta de esta clase la denotaremos por $U\equiv\langle (R,e),v,S_1,\omega,S_2\rangle_{\cos,\text{máx}}$.

Definición 6: Una operación binaria $I:[0,1]^2\to[0,1]$ es una *función de implicación borrosa*, o una *implicación borrosa*, si satisface:

(I1) $I(x,z)\geq I(y,z)$ cuando $x\leq y$, para todo $z\in[0,1]$.
(I2) $I(x,y)\leq I(x,z)$ cuando $y\leq z$, para todo $x\in[0,1]$.
(I3) $I(0,0)=I(1,1)=1$ e $I(1,0)=0$.

Nótese que, de la definición, se desprende que $I(0,x)=1$ e $I(x,1)=1$ para todo $x\in[0,1]$ mientras que los valores simétricos $I(x,0)$ e $I(1,x)$ no se derivan de la definición.

Definición 7: Sea I una implicación borrosa. La función N_I definida por $N_I(x)=I(x,0)$ para todo $x\in[0,1]$, se llama la *negación natural* de I y es siempre una negación borrosa.

Por otra parte, existen diversas clases de funciones de implicación derivadas de uninormas. Recordamos aquí el caso de las (U,N)-implicaciones.

[1] Aquí el subíndice "cos" corresponde a las iniciales de: "*c*ontinuous *o*pen *s*quare".

Definición 8: Sea U una uninorma y N una negación borrosa. El (U,N)-*operador* derivado de U y N es la operación binaria definida por

$$I_{U,N}(x,y)=U(N(x),y) \text{ para todos } x,y\in[0,1].$$

Es conocido que, con esta definición, $I_{U,N}$ es una función de implicación borrosa si y solo si U es disyuntiva y entonces se conoce con el nombre de (U,N)-*implicación*. Algunas propiedades de las (U,N)-implicaciones han sido estudiadas para diversos tipos de uninormas entre las que destacan las ya recordadas en estos preliminares, pero también otras como las uninormas *localmente internas* o *compensatorias* y las uninormas con operadores subyacentes continuos (para más detalles véase [4], [5], [17], [19], [28]). Recientemente, el Modus Ponens respecto de una t-norma T se ha estudiado en detalle en [17] para implicaciones derivadas de uninormas.

III. U-Modus Ponens para (U,N)-implicaciones

En esta sección queremos estudiar el Modus Ponens respecto de una uninorma U, o simplemente el U-Modus Ponens, para la clase de las (U,N)-implicaciones. Empezamos estableciendo de manera formal la definición del U-Modus Ponens.

Definición 9: Sea I una implicación borrosa y U una uninorma. Diremos que I verifica el *Modus Ponens* respecto de U (o simplemente el U-Modus Ponens), o también que I es un U-*condicional* si

$$U(x,I(x,y))\leq y \quad \text{para todos } x,y\in[0,1]. \tag{4}$$

Nuestra intención es estudiar la desigualdad anterior en el caso en que la implicación I sea una (U,N)-implicación. Es ya conocido (véase [21]) que si I y U verifican la inecuación (4), U tiene que ser necesariamente conjuntiva. Por lo tanto, en todo lo que sigue, consideraremos que U es una uninorma conjuntiva, U' es una uninorma disyuntiva y N una negación borrosa a partir de las cuales derivamos la (U,N)-implicación $I_{U',N}$. Damos primero algunas propiedades necesarias para que se verifique el U-Modus Ponens.

Proposición 10: Sea U una uninorma conjuntiva con elemento neutro $e\in]0,1[$ y U' una uninorma disyuntiva con elemento neutro $e'\in]0,1[$. Sea N una negación borrosa y sea $I_{U',N}$ la correspondiente (U,N)-implicación. Si $I_{U',N}$ verifica el U-Modus Ponens respecto de U, se verifican las siguientes propiedades:

i) $U'(N(e),y)\leq y$ para todo $y\in[0,1]$. En particular, se tiene que cumplir $N(e)\leq e'$.
ii) $U'(N(x),y)\leq e$ para todos x,y tales que $e\leq y<x$. En particular, se tiene que cumplir $U'(0,y)<e$ para todo y tal que $e\leq y<1$.
iii) $U(x,N(x))\leq e'$ para todo $x\in[0,1]$. En particular, si N tiene e_N como punto fijo, entonces $U(e_N,e_N)\leq e'$.
iv) La negación borrosa N verifica $N(x)<1$ para todo $x>0$.

La proposición anterior muestra algunas condiciones necesarias sobre las uninormas U, U' y sobre la negación N para que la correspondiente $I_{U',N}$ verifique el U-Modus Ponens. A partir de ahora, nos restringiremos al caso en que la uninorma U' es localmente interna en la frontera, esto es, U' verifica $U'(0,y) \in \{0,y\}$ para todo $y > e'$ (véase [13], [16]). Notemos sin embargo que esta condición no es en absoluto restrictiva ya que todas las clases habituales de uninormas son localmente internas en la frontera. Eso incluye, no solo las clases recordadas en los preliminares, sino también las localmente internas y las uninormas con operadores subyacentes continuos (véase [16]).

El siguiente resultado actualiza la proposición anterior en el caso en que la uninorma U' sea localmente interna en la frontera.

Proposición 11: Sea U una uninorma conjuntiva con elemento neutro $e \in]0,1[$ y U' una uninorma disyuntiva, localmente interna en la frontera, con elemento neutro $e' \in]0,1[$. Sea N una negación continua y sea $I_{U',N}$ la correspondiente (U,N)-implicación. Si $I_{U',N}$ verifica el U-Modus Ponens respecto de U entonces:

- Se tiene que cumplir $U'(0,y) = 0$ para todo $y < 1$.
- La negación natural asociada a $I_{U',N}$ tiene que ser la negación drástica N_D dada por $N_D(x) = 0$ para todo $x > 0$.
- U' no puede ser de $\mathcal{U}_{\text{máx}}$.
- Si U' es de $\mathcal{U}_{\text{cos,máx}}$, digamos $U' \equiv \langle (R,e'), v, S_1, \omega, S_2 \rangle_{\text{cos,máx}}$, entonces se tiene que cumplir $\omega = 1$.
- Si U' es idempotente, digamos $U' \equiv \langle g', e' \rangle_{\text{ide}}$, entonces se tiene que cumplir $g'(0) = 1$.

Nota 12: A partir de la proposición anterior tenemos que la uninorma disyuntiva U' usada en la construcción de $I_{U',N}$ no puede ser cualquiera. Sin embargo, notemos que aún quedan otras posibilidades de entre las clases de uninormas consideradas en los preliminares. Concretamente, U' puede ser de cualesquiera de las siguientes clases:

- uninormas representables, o
- uninormas idempotentes con $g'(0) = 1$, o
- uninormas de $\mathcal{U}_{\text{cos,máx}}$ con $\omega = 1$, o
- uninormas de $\mathcal{U}_{\text{cos,mín}}$ con $\lambda = 0$ ($\lambda = 0$ es necesario para asegurar que la uninorma U' sea disyuntiva).

Antes de tratar con cada una de estas clases de forma separada presentamos en esta sección algunos resultados generales adicionales.

Obviamente la (U,N)-implicación $I_{U',N}$ depende completamente no solo de la uninorma U', sino también de la negación N usada en su construcción. Recordemos que ya hemos visto que la negación N no puede tomar el valor 1 en puntos $x > 0$ si queremos que se verifique el U-Modus Ponens. Por el contrario, N puede tomar el valor 0 en subintervalos no triviales como indica la siguiente proposición.

Proposición 13: Sea U' una uninorma disyuntiva en alguna de las clases descritas en la nota 12. Si $N = N_D$ es la negación borrosa drástica, entonces $I_{U',N}$ viene dada por la menor implicación borrosa posible

$$I_{U',N}(x,y) = I_0(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \text{ o } y = 1, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso,} \end{cases}$$

que verifica siempre el U-Modus Ponens respecto de cualquier uninorma conjuntiva U.

En lo que queda de sección vamos a considerar solo el caso en que la negación N sea al menos continua, que es en realidad el caso más habitual[2]. En esta situación, vemos que también se puede descartar la clase de uninormas de $\mathcal{U}_{\text{cos,máx}}$.

Proposición 14: Sea U una uninorma conjuntiva con elemento neutro $e \in]0,1[$ y U' una uninorma disyuntiva con elemento neutro $e' \in]0,1[$. Sea N una negación continua y sea $I_{U',N}$ la correspondiente (U,N)-implicación. Si $I_{U',N}$ verifica el U-Modus Ponens respecto de U entonces U' no puede ser de $\mathcal{U}_{\text{cos,máx}}$.

Recordemos que cuando la negación borrosa considerada N es continua ha de tener un punto fijo que denotaremos por e_N. En este caso tenemos hasta tres valores clave en nuestro estudio. A saber, los elementos neutros de U, U' y el punto fijo de N, es decir, e, e' y e_N respectivamente. La siguiente proposición establece la relación de orden posible entre los mismos según los casos.

Proposición 15: Sea U una uninorma conjuntiva con elemento neutro $e \in]0,1[$ y U' una uninorma disyuntiva con elemento neutro $e' \in]0,1[$. Sea N una negación continua con punto fijo e_N y sea $I_{U',N}$ la correspondiente (U,N)-implicación. Si $I_{U',N}$ verifica el U-Modus Ponens respecto de U entonces,

- Si $e' < e_N$, necesariamente se tiene que cumplir $e' < e_N < e$, y
- Si $e' = e_N$, necesariamente se tiene que cumplir $e' = e_N \leq e$.

Notemos que el caso $e' > e_N$ no está incluido en la proposición anterior. Ello es debido a que en dicho caso, no hay restricciones iniciales para la posición de e con respecto a los valores $e' > e_N$.

El siguiente paso en nuestra investigación será realizar un estudio del U-Modus Ponens para (U,N)-implicaciones derivadas de uninormas de cada una de las clases posibles teniendo en cuenta los resultados anteriores. Esto es, un caso para (U,N)-implicaciones derivadas de uninormas representables disyuntivas U', otro para las derivadas de uninormas U' de $\mathcal{U}_{\text{cos,mín}}$ con $\lambda = 0$ y otro para las derivadas de uninormas idempotentes U' con $g'(0) = 1$.

III-A. *Caso en el que U' es una uninorma representable*

Vamos a tratar en esta sección con uninormas disyuntivas representables del tipo $U' \equiv \langle e', h' \rangle_{\text{rep}}$. En este caso la correspondiente (U,N)-implicación derivada de U' y la negación N viene dada por

$$I_{U',N}(x,y) = h'^{-1}(h'(N(x)) + h'(y))$$

para todos $x, y \in [0,1]$, con el convenio $+\infty - \infty = +\infty$. Recordemos también que, a partir de una uninorma representable disyuntiva $U' \equiv \langle e', h' \rangle_{\text{rep}}$, se obtiene la negación

[2] Recordemos que las negaciones continuas son las más utilizadas en lógica borrosa y que contienen, en particular, a las negaciones fuertes (aquellas que son involutivas) y también a las estrictas (aquellas que son estrictamente decrecientes y continuas).

fuerte $N_{h'}(x) = h'^{-1}(-h'(x))$ para todo $x \in [0,1]$, que es usualmente conocida como la negación fuerte *asociada a* U'.

Teniendo en cuenta estas consideraciones, se pueden obtener en este caso los siguientes resultados parciales.

Proposición 16: Sea U una uninorma conjuntiva con elemento neutro $e \in]0,1[$, $U' \equiv \langle e', h' \rangle_{\text{rep}}$ disyuntiva, N una negación borrosa e $I_{U',N}$ la correspondiente (U,N)-implicación. Si $U \le U'$ y $N \le N_{h'}$ entonces $I_{U',N}$ verifica el U-Modus Ponens respecto de U.

En el caso en que la negación considerada N coincida con la negación fuerte asociada $N_{h'}$, la condición $U \le U'$ se convierte en necesaria y suficiente como se ve en el siguiente resultado.

Proposición 17: Sea U una uninorma conjuntiva con elemento neutro $e \in]0,1[$, $U' \equiv \langle e', h' \rangle_{\text{rep}}$ disyuntiva, $N = N_{h'}$ la negación fuerte asociada a U' e $I_{U',N}$ la correspondiente (U,N)-implicación. Entonces $I_{U',N}$ verifica el U-Modus Ponens respecto de U si y solo si $U \le U'$.

Damos a continuación algunos ejemplos de (U,N)-implicaciones, basadas en uninormas disyuntivas representables, que verifican el U-Modus Ponens.

Ejemplo 18: A partir de resultados anteriores podemos presentar los siguientes ejemplos de (U,N)-implicaciones que verifican el U-Modus Ponens.

i) Sea $U' \equiv \langle e', h' \rangle_{\text{rep}}$ una uninorma representable disyuntiva con elemento neutro $e' \in]0,1[$ y $N = N_{h'}$ la negación fuerte *asociada a* U'. En estos casos, es sabido que la t-norma $T_{U'}$ y la t-conorma $S_{U'}$ subyacentes son estrictas. Consideremos entonces las uninormas de $\mathcal{U}_{\text{mín}}$ dadas por

$$U_0 \equiv \langle T_{U'}, e', S_{U'} \rangle_{\text{mín}} \quad \text{y} \quad U_1 \equiv \langle \text{mín}, e', S_U \rangle_{\text{mín}},$$

donde S_U es cualquier t-conorma. Entonces resulta claro que $U_0 \le U'$ pero en cambio $U_1 \not\le U'$. De esta manera, a partir de la proposición 17, tenemos que $I_{U',N}$ verifica el U-Modus Ponens respecto de U_0 pero no lo verifica respecto de U_1.

ii) Tomemos en este caso la uninorma dada por $U'(x,y) =$

$$\begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \in \{(1,0),(0,1)\}, \\ \frac{xy}{(1-x)(1-y)+xy} & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Se sabe que U' es una uninorma disyuntiva representable con elemento neutro $e' = \frac{1}{2}$ y generador aditivo $h'(x) = \log\left(\frac{x}{1-x}\right)$ (ver [11]). Más aún, su negación asociada es la negación clásica $N_c(x) = 1 - x$. De este modo, si tomamos la uninorma de $\mathcal{U}_{\text{mín}}$ dada por $U(x,y) =$

$$\begin{cases} 2xy & \text{si } x,y \le 1/2, \\ 2x + 2y - 2xy - 1 & \text{si } x,y \ge 1/2, \\ \text{mín}(x,y) & \text{en cualquier otro caso,} \end{cases}$$

podemos ver fácilmente que $U \le U'$ y, considerando cualquier negación borrosa N tal que $N \le N_c$, la correspondiente (U,N)-implicación $I_{U',N}$ verifica el U-Modus Ponens respecto de U (aplicando simplemente la proposición 16).

Precisamente, debido a las restricciones de espacio, en las secciones siguientes nos limitaremos a dar sendos ejemplos de (U,N)-implicaciones verificando el U-Modus Ponens, basadas en uninormas disyuntivas pertenecientes a la clase correspondiente. Dejaremos en cambio el estudio exhaustivo de estos casos para un trabajo futuro.

III-B. *Caso en el que U' es una uninorma de $\mathcal{U}_{\cos,\text{mín}}$ con $\lambda = 0$*

Damos en este caso el siguiente ejemplo que demuestra la existencia de numerosas (U,N)-implicaciones verificando el U-Modus Ponens basadas en uninormas disyuntivas de $\mathcal{U}_{\cos,\text{mín}}$ con $\lambda = 0$.

Ejemplo 19: Consideremos U' una uninorma disyuntiva de $\mathcal{U}_{\cos,\text{mín}}$ con $\lambda = 0$, digamos $U' \equiv \langle 0, T, u, (R, e') \rangle_{\cos,\text{mín}}$. Consideremos cualquier uninorma U de $\mathcal{U}_{\text{mín}}$ con elemento neutro $e = u$ cualquier negación borrosa continua N con punto fijo $e_N = u$ y tal que $N(x) < 1$ para todo $x > 0$. Entonces, la (U,N)-implicación derivada de U' y de N verifica siempre el U-Modus Ponens respecto de U.

III-C. *Caso en el que U' es una uninorma idempotente con $g(0) = 1$*

El siguiente ejemplo muestra que existen numerosas (U,N)-implicaciones que verifican el U-Modus Ponens, en este caso basadas en uninormas idempotentes disyuntivas con $g(0) = 1$.

Ejemplo 20: Consideremos una negación fuerte N con punto fijo $e \in]0,1[$ y sean U y U' las uninormas idempotentes dadas respectivamente por:

$$U(x,y) = \begin{cases} \text{mín}(x,y) & \text{si } y \le N(x), \\ \text{máx}(x,y) & \text{si } y > N(x), \end{cases}$$

y

$$U'(x,y) = \begin{cases} \text{mín}(x,y) & \text{si } y < N(x), \\ \text{máx}(x,y) & \text{si } y \ge N(x). \end{cases}$$

Claramente tenemos que U es conjuntiva, U' es disyuntiva y la (U,N)-implicación derivada de U' y N verifica el U-Modus Ponens respecto de U.

IV. Conclusiones y trabajo futuro

El Modus Ponens es la regla borrosa básica comúnmente utilizada en el razonamiento aproximado y el control borroso para manejar inferencias borrosas. De este modo, es lógico requerir a la conjunción y a la implicación borrosas que se vayan a usar en los procesos de inferencia, que verifiquen la inecuación funcional asociada al Modus Ponens. Habitualmente, se usa una t-norma para modelizar la conjunción borrosa pero, cada vez más, se utiliza también una uninorma conjuntiva en su lugar, lo que nos lleva a considerar el llamado U-Modus Ponens.

Dicha propiedad ya ha sido estudiada para implicaciones residuadas derivadas de uninormas (RU-implicaciones) en [21], [22]. Siguiendo en la misma línea, en este trabajo hemos iniciado el estudio para (U,N)-implicaciones, es decir para implicaciones derivadas de uninormas disyuntivas y negaciones borrosas. Hemos visto que, de entre las clases de uninormas disyuntivas más habituales, solo existen soluciones en los casos de (U, N)-implicaciones derivadas de uninormas representables, de uninormas en $\mathcal{U}_{\cos,\text{mín}}$ con $\lambda = 0$ y de uninormas idempotentes con $g(0) = 1$. Hemos dado ejemplos en cada uno de los tres casos, aunque, mientras que el caso relativo a uninormas representables ha sido resuelto con detalle, un estudio exhaustivo de los otros dos casos se ha dejado para un trabajo futuro.

Queremos especificar que como trabajo futuro, además del ya mencionado, pretendemos extender nuestro estudio a otros tipos de implicaciones como son las h y (h, e)-implicaciones recientemente introducidas en [23]. Finalmente, es nuestra intención desarrollar también un estudio similar de una generalización mediante uninormas de la regla de inferencia del Modus Tollens.

Agradecimientos: Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por el proyecto TIN2016- 75404-P AEI/FEDER, UE.

Referencias

[1] I. Aguiló, J. Suñer, J. Torrens, "A characterization of residual implications derived from left-continuous uninorms," Information Sciences, 180, 3992–4005, 2010.

[2] C. Alsina, E. Trillas, "When (S, N)-implications are (T, T_1)-conditional functions?," Fuzzy Sets and Systems, 134, 305–310, 2003.

[3] M. Baczyński, G. Beliakov, H. Bustince Sola, A Pradera, Eds., Advances in Fuzzy Implication Functions, in Studies in Fuzziness and Soft Computing, vol. 300, Springer, Berlin Heidelberg, 2013.

[4] M. Baczyński, B. Jayaram, Fuzzy Implications. Studies in Fuzziness and Soft Computing, vol. 231. Springer, Berlin Heidelberg, 2008.

[5] M. Baczyński, B. Jayaram, "(U,N)-implications and their characterizations," Fuzzy Sets and Systems, 160, 2049–2062, 2009.

[6] J.M. Benítez, J.L. Castro, I. Requena, "Are artificial neural networks black boxes?," IEEE Transactions on Neural Networks 8, 1156–1163, 1997.

[7] E. Czogala, J. Drewniak, "Associative monotonic operations in fuzzy set theory," Fuzzy Sets and Systems 12, 249–269, 1984.

[8] B. De Baets, "Idempotent uninorms," European Journal of Operational Research 118, 631–642, 1999.

[9] B. De Baets, J. C. Fodor, "Residual operators of uninorms," Soft Computing 3, 89–100, 1999.

[10] B. De Baets, J. Fodor, "Van Melle's combining function in MYCIN is a representable uninorm: an alternative proof," Fuzzy Sets and Systems 104, 133-136, 1999.

[11] J. C. Fodor, R. R. Yager, A. Rybalov, "Structure of Uninorms," International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-based Systems, 5, 411–427, 1997.

[12] S. Hu, Z. Li, "The structure of continuous uni-norms," Fuzzy Sets and Systems 124, 43–52, 2001.

[13] G. Li, H.W. Liu, "On properties of uninorms locally internal on the boundary," Fuzzy Sets and Systems 332, 116–128, 2018.

[14] E.P. Klement, R. Mesiar, E. Pap. Triangular norms. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

[15] J. Martín, G. Mayor, J. Torrens, "On locally internal monotonic operators," Fuzzy Sets and Systems 137, 27–42, 2003.

[16] M. Mas, S. Massanet, D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, "A survey on the existing classes of uninorms," Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 29, 1021–1037, 2015.

[17] M. Mas, M. Monserrat, D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, "RU and (U, N)-implications satisfying Modus Ponens," International Journal of Approximate Reasoning, 73, 123–137, 2016.

[18] M. Mas, M. Monserrat, J. Torrens, "Two types of implications derived from uninorms," Fuzzy Sets and Systems, 158, 2612–2626, 2007.

[19] M. Mas, M. Monserrat, J. Torrens, "A characterization of $(U, N), RU, QL$ and D-implications derived from uninorms satisfying the law of importation," Fuzzy Sets and Systems 161, 1369–1387, 2010.

[20] M. Mas, M. Monserrat, J. Torrens, E. Trillas, "A survey on fuzzy implication functions," IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 15(6), 1107–1121, 2007.

[21] M. Mas, D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, "On a generalization of the Modus Ponens: U-conditionality," in Proceedings of IPMU-2016, Part I, CCIS 610, J.P. Carvalho et al. Eds. 2016, pp. 1–12.

[22] M. Mas, D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, "On some classes of RU-implications satisfying U-Modus Ponens," in Aggregation functions in theory and in practice. In the series: Advances in Intelligent Systems and Computing, 581, V. Torra, R. Mesiar and B. De Baets, Eds. 2018, pp. 71–82.

[23] S. Massanet, J. Torrens, "On a new class of fuzzy implications: h-implications and generalizations," Information Science 181, 2111–2127, 2011.

[24] S. Massanet, J. Torrens, "An overview of construction methods of fuzzy implications," in [3], pp. 1–30, 2013.

[25] G. Metcalfe, F. Montagna, "Substructural Fuzzy Logics," The Journal of Symbolic Logic 72, 834–864, 2007.

[26] D. Ruiz, J. Torrens, "Residual implications and co-implications from idempotent uninorms," Kybernetika 40, 21–38, 2004.

[27] D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, "Distributivity of residual implications over conjunctive and disjunctive uninorms," Fuzzy Sets and Systems, 158, 23–37, 2007.

[28] D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, "S- and R-implications from uninorms continuous in $]0, 1[^2$ and their distributivity over uninorms," Fuzzy Sets and Systems, 160, 832–852, 2009.

[29] D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, B. De Baets, J. Fodor, "Some remarks on the characterization of idempotent uninorms," in Computational Intelligence for Knowledge-Based Systems Design. Lecture Notes in Computer Science, vol. 6178, E. Hllermeier, R. Kruse, F. Hoffmann, Eds. Springer, Berlin, Heidelberg, 2010, pp. 425–434.

[30] E. Trillas, C. Alsina, A. Pradera, "On MPT-implication functions for fuzzy logic," Revista de la Real Academia de Ciencias. Serie A. Matemáticas (RACSAM) 98(1), 259–271, 2004.

[31] E. Trillas, C. Alsina, E. Renedo, A. Pradera, "On contra-symmetry and MPT-conditionality in fuzzy logic," International Journal of Intelligent Systems, 20, 313–326, 2005.

[32] E. Trillas, C. Campo, S. Cubillo, "When QM-operators are implication functions and conditional fuzzy relations," International Journal of Intelligent Systems, 15, 647–655, 2000.

[33] E. Trillas, L. Valverde, "On Modus Ponens in fuzzy logic," in 15th International Symposium on Multiple-Valued Logic, pp. 294–301. Kingston, Canada, 1985.

[34] R. R. Yager, A. Rybalov, "Uninorm aggregation operators," Fuzzy Sets and Systems, 80, 111–120, 1996.

Caracterizaciones y equivalencias de algunas familias de funciones de implicación borrosas generadas a partir de cópulas

Sebastia Massanet*†, Ana Pradera‡, Daniel Ruiz-Aguilera*†, Joan Torrens*†
* *Grupo de investigación en Soft Computing, Procesamiento de Imágenes y Agregación (SCOPIA)*
Departamento de Ciencias Matemáticas e Informática
Universitat de les Illes Balears, 07122 Palma, España
†*Instituto de Investigación Sanitaria de las Islas Baleares (IdISBa), 07010 Palma, España*
‡ *Departamento de Ciencias de la Computación, Arquitectura de Computadores,*
Lenguajes y Sistemas Informáticos y Estadística e Investigación Operativa
Universidad Rey Juan Carlos, 28933 Móstoles, Madrid, España
E-mails: s.massanet@uib.es, ana.pradera@urjc.es, daniel.ruiz@uib.es, jts224@uib.es

***Resumen*—Este trabajo es un resumen de los artículos [5] y [6] publicados en Fuzzy Sets and Systems para su presentación en la Multiconferencia CAEPIA'18 KeyWorks.**

***Index Terms*—Función de implicación borrosa, cópula, implicación probabilística, implicación de supervivencia, implicación S-probabilística, implicación de S-supervivencia.**

I. Resumen

La caracterización y representación de los conectivos lógicos borrosos es una de las principales líneas de investigación en el campo teórico en lógica borrosa. Como consecuencia de este estudio, se ha conseguido caracterizar de forma axiomática un gran número de familias de conectivos lógicos borrosos. Por un lado, en el campo de las funciones de agregación, se han caracterizado varias familias de t-normas y t-conormas, cópulas y uninormas, entre otros operadores. Por otro lado, hay que destacar el esfuerzo de muchos investigadores en la caracterización de las familias de funciones de implicación borrosa. Así, se han caracterizado las (S, N)-implicaciones con N una negación borrosa continua, las R-implicaciones generadas a partir de t-normas continuas por la izquierda, sus respectivas generalizaciones derivadas de uninormas, las implicaciones f y g-generadas de Yager o las h-implicaciones, entre otras. La importancia de estos operadores radica en el gran número de aplicaciones que tienen en campos tan diversos como el razonamiento aproximado, el control borroso, el procesamiento de imágenes o la minería de datos. Se pueden consultar todas estas aplicaciones, en [1] y [2].

Una de las razones por las que las funciones de implicación borrosas son tan utilizadas es la flexibilidad existente en su definición:

Definición 1: Una operación binaria $I : [0,1]^2 \to [0,1]$ se llama una *función de implicación borrosa* si satisface:

(I1) $I(x_1, y) \geq I(x_2, y)$ cuando $x_1 \leq x_2$, para todo $y \in [0,1]$.

(I2) $I(x, y_1) \leq I(x, y_2)$ cuando $y_1 \leq y_2$, para todo $x \in [0,1]$.

(I3) $I(0,0) = I(1,1) = 1$ e $I(1,0) = 0$.

Esta definición permite la existencia de una infinidad de familias de funciones de implicación borrosas. Cada una de estas familias satisface alguna propiedades adicionales que son útiles para algunas de las aplicaciones anteriormente mencionadas. De esta manera, dependiendo de la aplicación considerada, se puede escoger la función de implicación borrosa que satisface las propiedades adicionales deseables. Sin embargo, esta necesidad de disponer de un repertorio extenso de estos operadores ha tenido un efecto no deseado. En los últimos años, se han propuesto multitud de familias, algunas de una complejidad notable, cuya caracterización se desconoce. Esto ha provocado la aparición de familias, que aunque fueron presentadas como nuevas familias, después de estudiarlas en profundidad y obtener su caracterización, se demostró que tenían intersección o incluso que coincidían con familias ya conocidas. Por tanto, es de suma importancia caracterizar las familias de funciones de implicación borrosas introducidas hasta la fecha para conocer el comportamiento de cada familia y su relación con las demás.

Este ha sido el objetivo de los artículos [5] y [6]. En estos trabajos, se han caracterizado cuatro familias de funciones de implicación borrosas derivadas de cópulas y que fueron introducidas en [3] y [4] con la idea de combinar tanto la imprecisión modelada mediante los conceptos borrosos como la aleatoriedad proveniente de la teoría de probabilidades. Estas familias son las siguientes:

1) *Implicaciones probabilísticas*:

$$I_C(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ \frac{C(x,y)}{x} & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

donde C es una cópula que satisface $C(x_1, y)x_2 \geq C(x_2, y)x_1$ para todo $x_1 \leq x_2$ e $y \in [0,1]$.

2) *Implicaciones de supervivencia*:

$$I_C^*(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ \frac{x+y-1+C(1-x,1-y)}{x} & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

donde C es una cópula que satisface $C(1-x_1, 1-y)x_2 - C(1-x_2, 1-y)x_1 \geq (1-y)(x_2-x_1)$ para todo $x_1 \leq x_2$ e $y \in [0,1]$.

3) *Implicaciones S-probabilísticas*: $\tilde{I}_C(x,y) = C(x,y) - x + 1$ donde C es una cópula.
4) *Implicaciones de S-supervivencia*: $\tilde{I}^*_C(x,y) = y + C(1-x, 1-y)$ donde C es una cópula.

Concretamente, en [5] se obtiene la caracterización de las implicaciones S-probabilísticas y de las implicaciones de S-supervivencia. En dicha caracterización, juegan un papel importante tanto el concepto de negación natural de una implicación dada por $N_I(x) = I(x,0)$, como las propiedades adicionales siguientes:

- El *principio de neutralidad por la izquierda*,

$$I(1,y) = y, \quad y \in [0,1]. \qquad (\mathbf{NP})$$

- El *2-crecimiento*,

$$I(x_2,y_1)+I(x_1,y_2) \leq I(x_1,y_1)+I(x_2,y_2), \quad (\mathbf{2-IC})$$

para todo $x_1 \leq x_2$ e $y_1 \leq y_2$.

En este punto, la caracterización es la siguiente:

Teorema 2: Sea $I : [0,1]^2 \to [0,1]$ una función binaria. Entonces las afirmaciones siguientes son equivalentes:

i) I satisface **(NP)**, **(2-IC)**, $N_I(x) = N_c(x) = 1-x$ e $I(0,y) = I(x,1) = 1$ para todo $x, y \in [0,1]$.
ii) I es una implicación material generada por una co-cópula D y la negación borrosa N_c, i.e., $I(x,y) = D(1-x,y)$.
iii) I es una implicación S-probabilística generada por una cópula C.
iv) I es una implicación de S-supervivencia generada por una cópula C'.

Además, las expresiones de D, C y C' son únicas y vienen dadas por

$$\begin{aligned} D(x,y) &= I(1-x,y), \\ C(x,y) &= I(x,y)+x-1, \\ C'(x,y) &= I(1-x,1-y)+y-1, \end{aligned}$$

para todo $x, y \in [0,1]$.

La relevancia de este resultado radica en el hecho que se demuestra que las familias de implicaciones S-probabilisticas y de S-supervivencia son en realidad la misma y además, coinciden con las implicaciones materiales generadas por una co-cópula y N_c. Así, cualquier futuro estudio relativo a estas implicaciones puede centrarse en una sola de estas familias y los resultados pueden ser fácilmente reescritos en términos de las otras familias.

Un estudio similar se lleva a cabo en [6] para las familias de implicaciones probabilísticas e implicaciones de supervivencia. En dicho trabajo, se obtienen las caracterizaciones de estas familias demostrando de nuevo que ambas familias coinciden. El siguiente resultado aporta dicha caracterización.

Teorema 3: Sea $I : [0,1]^2 \to [0,1]$ una función binaria. Entonces las afirmaciones siguientes son equivalentes:

i) I es una implicación probabilística derivada de una cópula C.
ii) I es una implicación de supervivencia derivada de una cópula C'.
iii) I satisface **(I1)**, **(NP)**, $I(0,y) = 1$ para todo $y \in [0,1]$, la propiedad

$$x_2 I(x_2,y_1) + x_1 I(x_1,y_2) \leq x_1 I(x_1,y_1) + x_2 I(x_2,y_2)$$

para todo $x_1 \leq x_2$ e $y_1 \leq y_2$ y

$$N_I(x) = N_{D_1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Además, las expresiones de C y C' son únicas y vienen dadas por

$$\begin{aligned} C(x,y) &= xI(x,y), \\ C'(x,y) &= x+y-1+(1-x)I(1-x,1-y), \end{aligned}$$

para todo $x, y \in [0,1]$.

La coincidencia de estas dos familias puede demostrarse de forma alternativa usando el concepto de cópula de supervivencia C^* que a partir de una cópula C, se construye como $C^*(x,y) = x+y-1+C(1-x,1-y)$ para todo $x,y \in [0,1]$.

Teorema 4: Sea C una cópula y sea I una función binaria. Entonces I es una implicación probabilística derivada de la cópula C si, y sólo si, I es una implicación de supervivencia derivada de la cópula C^*. Esto es, $I_C = I^*_{C^*}$ o, equivalentemente, $I_{C^*} = I^*_C$.

En resumen, las caracterizaciones obtenidas en los artículos [5] y [6] han permitido, por una parte, reducir cinco familias de funciones de implicación borrosas a dos únicas familias y por otra parte, clarificar su estructura y propiedades adicionales. Esto permitirá simplificar el estudio de dichas familias y facilitar su aplicación en cualquier campo donde las funciones de implicación borrosa han demostrado su utilidad.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por los proyectos TIN2015-66471-P, TIN2016-75404-P AEI/FEDER, UE y TIN2016-81731-REDT.

REFERENCIAS

[1] M. Baczyński and B. Jayaram. *Fuzzy Implications*, volume 231 of *Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Springer, Berlin Heidelberg, 2008.

[2] M. Baczyński, B. Jayaram, S. Massanet, and J. Torrens. Fuzzy implications: Past, present, and future. In J. Kacprzyk and W. Pedrycz, editors, *Springer Handbook of Computational Intelligence*, pages 183–202. Springer Berlin Heidelberg, 2015.

[3] P. Grzegorzewski. Survival implications. In S. Greco et al., editor, *Advances on Computational Intelligence - 14th International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems, IPMU 2012. Proceedings, Part II*, volume 298 of *Communications in Computer and Information Science*, pages 335–344. Springer, 2012.

[4] P. Grzegorzewski. Probabilistic implications. *Fuzzy Sets and Systems*, 226:53–66, 2013.

[5] S. Massanet, A. Pradera, D. Ruiz-Aguilera, and J. Torrens. From three to one: Equivalence and characterization of material implications derived from co-copulas, probabilistic S-implications and survival S-implications. *Fuzzy Sets and Systems*, 323:103–116, 2017.

[6] S. Massanet, A. Pradera, D. Ruiz-Aguilera, and J. Torrens. Equivalence and characterization of probabilistic and survival implications. *Fuzzy Sets and Systems*, 2018. Artículo en prensa. DOI=10.1016/j.fss.2018.06.014.