XIX Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy (XIX ESTYLF)

ANTONIO GONZÁLEZ
ENRIQUE HERRERA-VIEDMA

Secretaría Técnica:

RAUL PÉREZ Y JAVIER CABRERIZO

XIX Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy (XIX ESTYLF)

ESTYLF1: Sesión Especial: Funciones de Agregación y Conectivos Lógicos

Organizadores:

Sebastia Massanet, Juan Vicente Riera,
Daniel Ruiz-Aguilera, Joan Torrens

Complexity of Increasing ϕ-Recursive Computable Aggregations

Ramón González-del-Campo
Faculty of Informatics, Complutense University of Madrid
Email: rgonzale@ucm.es

Luis Garmendia
Faculty of Informatics, Complutense University of Madrid
Email: lgarmend@fdi.ucm.es

Javier Montero
Faculty of Mathematics, Complutense University of Madrid
Email: monty@mat.ucm.es

***Abstract*—In this paper the new concepts of $\mathcal{O}(f(n))$-increasing ϕ-recursive and $\mathcal{O}(f(n))$-decreasing ψ-recursive computable aggregation and expansion function are proposed to describe the computational cost of recursive computational aggregations when the universe of the discourse is increased or decreased are related. The complexity costs of the expansion functions with the complexity costs of its recursive computational aggregations.**

I. Introduction

As stressed in [11], much effort is needed in analyzing the properties of the algorithms we apply to solve aggregation problems in practice. In fact, in [11] , the authors pointed out that it is the avaliable algorithm what defines each aggregation, making feasible a specific solution to each possible problem, of course depending on decision maker's tools and capacities. Such computable aggregations come with a protocol that enables us to face aggregation problems in a specific general framwork. For example, when the cardinal of data is not being fixed, or cannot be a priori fixed. In particular, recursive aggregations [4], [5], [6], [7], [9] are a special kind of computable aggregations that play a strong role when the universe is modified. The computational cost is critical when it is necessary to process a huge amount of data.

When recursive aggregations are used it is necessary to know the cost to recompute the new value of the aggregation if the universe is changed adding or removing data. In this paper, two new concepts are proposed to describe the computational cost of recursive computational aggregations when the universe of the discourse is modified by adding or removing an element. On the one hand, the $\mathcal{O}(f(n))$-increasing ϕ-recursive computable aggregations is a set of recursive computable aggregations that have a computational cost bounded by $f(n)$ when an element is added to the universe. The expansion function of a computable recursive aggregation allows to know its computational cost. On the other hand, the $\mathcal{O}(f(n))$-decreasing ψ-recursive computable aggregations are defined in similar way when an element is removed from the universe.

II. Preliminaries

The concept of computational complexity cost of an algorithm is an important consideration in computer sciences as a degree to measure the quality and usability of programs. It can be measured in terms of time or memory usage, but it is usually measured in terms of number of operations, and how this number grows as the size of data grows comparing with a function or order in which adding constants, multipliers or lower order functions do no affect the main kind of growing of the higher order.

Definition 1. *[3] Let $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ be a function. The set of functions in the order of f, $\mathcal{O}(f)$, are defined as follows:*

$$\mathcal{O}(f) \equiv \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \exists c \in \mathbb{R}, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 \\ g(n) \leq cf(n)\}$$

The order of f contains all the functions that grows up slower than f.

Definition 2. *[3] Let $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ be a function. The computational complexity of f, $\Theta(f)$, is defined as follows:*

$$\Theta(f) \equiv \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \exists c, d \in \mathbb{R}, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 \\ df(n) \leq g(n) \leq cf(n)\}$$

Definition 3. *[3] Let $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ be two functions. It is said f has a complexity lower than g if $\mathcal{O}(f) \subset \mathcal{O}(g)$*

Proposition 1. *[3] Let q, a be two real numbers such that $q > 1$ and $a > 1$. Then:*

$$\mathcal{O}(1) \subset \mathcal{O}(log(n)) \subset \mathcal{O}(n) \subset \mathcal{O}(n^q) \subset \mathcal{O}(a^n) \subset O(n!)$$

In the following definition the most usual types of complexity are introduced.

Definition 4. *[3] Let $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ be a function. Then:*

- g has constant complexity if g belongs to $\Theta(1)$, i.e, if g grows up as fast as $f(n) = 1$.
- g has logarithmic complexity if g belongs to $\Theta(log(n))$, i.e, if g grows up as fast as $f(n) = log(n)$.
- g has linear complexity if g belongs to $\Theta(n)$, i.e, if g grows up as fast as $f(n) = n$.
- g has polynomial complexity if g belongs to $\Theta(n^q)$ for some $q > 1$, i.e, if g grows up as fast as $f(n) = n^q$.
- g has exponential complexity if g belongs to $\Theta(a^n)$ for some $a > 1$, i.e, if g grows up as fast as $f(n) = a^n$.

- g has factorial complexity if g belongs to $\Theta(n!)$, i.e, if g grows up as fast as $f(n) = n!$.

Definition 5. *[3] The computational complexity cost of an algorithm is the order of the function that gives the computing time of the algorithm.*

It is possible a definition of computational complexity cost focusing on the number of operations to complete the algorithm:

Definition 6. *[3] The computational complexity cost of an algorithm is the order of the function that gives a bound for the number of operations of the algorithm.*

Definition 7. *[1] A L list is an Abstract Data Type (ADT) that represents a sequence of values. A list can be defined by its behavior and its implementation must provide at least the following operations:*

- *Test whether a list is empty or not.*
- *Add a value.*
- *Remove a value.*
- *Compute the length (number of values) of a list.*

A list can be defined under a template data. For example, a list $L < [0,1] >$ is a list of values in $[0,1]$.

Talking about complexity of algorithms implies to show the code of them. There are a lot of programming languages (C++, Python, Java,...). Python is a easy to understand programming language. Even if you do not know Python, you can understand a program written in Python. That is the reason why the programs are written in Python in this paper. All programs here showed can be rewritten in any other programming language.

Definition 8. *[5] A left-recursive connective rule is a family of connective operators:*

$$(Ag : [0,1]^n \to [0,1])_{n>1}$$

such that there exists a sequence of binary operators:

$$(L_n : [0,1]^2 \to [0,1])_{n>1}$$

verifying:

- $Ag(a_1, a_2) = L_2(a_1, a_2)$
- $Ag(a_1 \ldots, a_n) = L_n(Ag(a_1, \ldots, a_{n-1}), a_n)$ *for all* $n > 2$

for some ordering rule π.

In similar way a right-recursive connective rule can be defined.

A right-recursive connective and left-recursive connective rule is called recursive connective rule.

Definition 9. *[2] An aggregation operator is a mapping $Ag : [0,1]^n \to [0,1]$ that satisfies:*

1) $Ag(0, 0..., 0) = 0$ *and* $Ag(1, 1, .., 1) = 1$.
2) *Ag is monotonic.*

There exists some other proposals to fusion information as the pre-aggreation functions that introduce the concept of directional monotonicity and have been useful in some applications.

Definition 10. *[10] A mapping $F : [0,1]^n \to [0,1]$ is a n-dimensional pre-aggregation function if it satisfies:*

- *There exists a real vector $r \in [0,1]^n$ with $r \neq 0$ such that is r-growing.*
- $F(0, \ldots, 0 = 0)$ *and* $F(1, \ldots, 1 = 1)$.

Next definition shows a wider point of view about aggregation. It is possible to extend the domain of aggregations to lists of elements L with generic types T. For example, T can be an image and the aggregation that process it can make the fussion of images.

In this paper of article, we will focus on the aggregations that can be computed using a program and the cost of computation of these aggregations.

Definition 11. *[11] Let $L < T >$ be a list of n elements of type T. A computable aggregation Ag_c is a program P that transforms the list $L < T >$ into an element of T.*

Definition 12. *[8] Let $L = \{x_1, \ldots, x_n\}$ be a list of values. A computable aggregation rule Ag_c is recursive if there exists a mapping $\phi : [0,1]^2 \to [0,1]$ such that:*

$$Ag_c(L) = \begin{cases} x_1, & \text{if } lenght(L) = 1; \\ \phi(Ag_c(x_1, ..., x_{n-1}), x_n), & \text{if } lenght(L) > 1. \end{cases}$$

Definition 13. *[8] A computation aggregation rule is expansible if there exists a mapping $\phi : [0,1]^2 \to [0,1]$ satisfying the following property:*

$$Ag_c(L_1 \cup L_2) = \phi(Ag_c(L_1), Ag_c(L_2))$$

where ϕ is an algorithm with linear or lower computational complexity cost.

Note. Let $Comp$, Rec and Exp be the computable aggregations, the recursive aggregations and the expansible aggregations respectively. Then:

$$Exp \subset Rec \subset Comp$$

Talking about complexity of algorithms implies to show the code of algorithms that implement them. There are a lot of programming languages (C++, Python, Java,...). Python is a easy to understand programming language. Even if you do not know Python, you can understand a program written in Python. That is the reason why the programs are written in Python in this paper. All programs here showed can be rewritten in any other programming language.

III. Increasing ϕ-Recursive Computable Aggregations Rules

Let $L = \{x_1, \ldots, x_n\}$ be a list of values and n its length.

Definition 14. *A computable aggregation rule Ag_c is $\mathcal{O}(f(n))$-increasing ϕ-recursive if there exists a mapping $\phi : [0,1]^2 \times L \to [0,1]$ such that:*

- $Ag_c(L) = \begin{cases} x_1, & \text{if } n = 1; \\ \phi(Ag_c(x_1, ..., x_{n-1})), x_n, \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}), & \text{if } n > 1. \end{cases}$
- *ϕ has a $\mathcal{O}(f(n))$ complexity cost.*

Definition 15. *A $\mathcal{O}(f(n))$-increasing ϕ-recursive computable aggregation rule Ag_c is non depending of length L if there exists a mapping $\phi : [0,1]^2 \to [0,1]$ such that:*

- $Ag_c(L) = \begin{cases} x_1, & \text{if } n = 1; \\ \phi(Ag_c(x_1, ..., x_{n-1})), x_n), & \text{if } n > 1. \end{cases}$
- *ϕ has a $\mathcal{O}(f(n))$ complexity cost.*

Next lemmas relate types of increasing ϕ-recursive computable aggregations with recursive computable aggregations and explansible computable aggregations given in Definition 12 and Definition 13.

The next two lemmas are trivial:

Lemma 1. *A recursive computable aggregation is $\mathcal{O}(f(n))$-increasing ϕ-recursive for some $f(n)$.*

Lemma 2. *If Ag_c is an explansible computable aggregation, then Ag_c is a $\mathcal{O}(n)$-increasing ϕ-recursive computable aggregation.*

The following lemmas show some $\mathcal{O}(n)$-increasing ϕ-recursive computable aggregations.

Lemma 3. *Arithmetic mean is a $\mathcal{O}(1)$-increasing ϕ-recursive computable aggregation.*

Proof. $Ag_c(x_1, \ldots, x_{n+1}) =$
$= \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} x_i = \frac{1}{n+1}(\sum_{i=1}^{n} x_i + x_{n+1}) = \frac{n}{n+1}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{n}{n+1}x_{n+1} = \frac{n}{n+1}Ag_c(x_1, \ldots, x_n) + \frac{n}{n+1}x_{n+1}$

So $\phi(x, y, n) = \frac{n}{n+1}x + \frac{1}{n+1}y$.

The next two programs compute $\phi(x, y, \{x_1, \ldots, x_n\})$ when n (length of $\{x_1, \ldots, x_n\}$) is known and when n is not known:

- n is known:

```
def phi(x,y,n):
    return (n*x+y)/(n+1)
```

So ϕ is $\mathcal{O}(1)$ complexity.

- n is unknown:

```
def phi(x,y,l):
    n=len(l)
    return (n*x+y)/(n+1)
```

Then, it is $\mathcal{O}(n)$ complexity to compute *length(l)*.

□

Lemma 4. *The Product computable aggregation is a $\mathcal{O}(1)$-increasing ϕ-recursive computable aggregation.*

Proof. $Ag_c(x_1, \ldots, x_{n+1}) =$
$= \prod_{i=1}^{n+1} x_i = x_{n+1} * \prod_{i=1}^{n} x_i$

So $\phi(x, y) = x * y$, which have a $\mathcal{O}(1)$ constant complexity cost.

The next program computes $\phi(x, y)$:

```
def phi(x,y):
    return x*y
```

So ϕ is $\mathcal{O}(1)$ complexity. □

Lemma 5. *Bounded sum ($\min\{1, \sum_{i=1}^{n} x_i\}$) is a $\mathcal{O}(1)$-increasing ϕ-recursive computable aggregations.*

Proof. There exist three cases:

1) If $Ag_c(x_1, \ldots, x_n) = 1$, then $Ag_c(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 1$
2) If $Ag_c(x_1, \ldots, x_n) < 1$ and $Ag_c(x_1, \ldots, x_n) + x_{n+1} \geq 1$, then $Ag_c(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 1$
3) If $Ag_c(x_1, \ldots, x_n) + x_{n+1} < 1$, then $Ag_c(x_1, \ldots, x_{n+1}) = Ag_c(x_1, \ldots, x_n) + x_{n+1}$

The next program computes $\phi(x, y)$:

```
def phi(x,y):
    if x==1:
        res=1
    else:
        if x+y>=1:
            res=1
        else:
            res x+y
    return res
```

with $\mathcal{O}(1)$ constant complexity cost. □

Lemma 6. *Geometric mean is a $\mathcal{O}(1)$-increasing ϕ-recursive computable aggregations if n is known.*

Proof. $Ag_c(x_1, \ldots, x_{n+1}) =$
$= (\prod_{i=1}^{n+1} x_i)^{\frac{1}{n+1}} = (x_n \prod_{i=1}^{n} x_i)^{\frac{1}{n+1}} = (x_n)^{\frac{1}{n+1}}(\prod_{i=1}^{n} x_i)^{\frac{1}{n+1}} = (x_n)^{\frac{1}{n+1}}((\prod_{i=1}^{n} x_i)^{\frac{1}{n}})^{\frac{n}{n+1}}$
$= (x_n)^{\frac{1}{n+1}} Ag_c(x_1, \ldots, x_n))^{\frac{n}{n+1}}$

So $\phi(x, y) = x^{\frac{n}{n+1}} * y^{\frac{1}{n+1}}$.

The two next programs compute $\phi(x, y, \{x_1, \ldots, x_n\})$ depending if n (length of $\{x_1, \ldots, x_n\}$) is known or not:

- n is known:

```
def phi(x,y,n):
    return res x**(n/(n+1))*y**(n/(n+1))
```

So ϕ is $\mathcal{O}(1)$ complexity.

- n is unknown:

```
def phi(x,y,l):
    n=len(l)
    return res x**(n/(n+1))*y**(n/(n+1))
```

So ϕ is $\mathcal{O}(n)$ complexity cost.

□

Lemma 7. *The forward and backward aggregations (Ag^f_{cn} and Ag^b_{cn}) over the binary operator A are $\mathcal{O}(c(x, y))$-increasing ϕ-recursive computable aggregations.*

Proof. Let $A(x, y)$ be a binary operator and let $c(x, y)$ be its complexity.

$Ag^f_{n+1}(\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}) = A(Ag^f_{cn}(\{x_1, \ldots, x_n\}, x_{n+1})$.

Then $\phi(x, y) = A(x, y)$ and $\phi(x, y)$ is computed with $\mathcal{O}(c(x, y))$. So Ag^f_{cn} is a $\mathcal{O}(c(x, y))$-increasing ϕ-recursive computable aggregation.

In similar way it is possible to prove Ag^b_{cn} is a $\mathcal{O}(c(x, y))$-increasing ϕ-recursive computable aggregation.

□

Corollary 1. *Minimum, Maximum, Product, Forward and Backward aggregations are non depending of length increasing ϕ-recursive computable aggregations.*

Aggregation	ϕ	Complexity of ϕ
Arithmetic mean	$\frac{n}{n+1}x + \frac{1}{n+1}y$	$\mathcal{O}(1)$,$\mathcal{O}(n)$
Minimum	$\min\{x, y\}$	$\mathcal{O}(1)$
Maximum	$\max\{x, y\}$	$\mathcal{O}(1)$
Product	$x * y$	$\mathcal{O}(1)$
Bounded sum	See program	$\mathcal{O}(1)$
Geometric mean	$x^{\frac{n}{n+1}} * y^{\frac{1}{n+1}}$	$\mathcal{O}(1)$,$\mathcal{O}(n)$
$Ag^f_{cn}(\{x_1, \ldots, x_n\})$	$A(x, y)$	$\mathcal{O}(c(x, y))$
$Ag^b_{cn}(\{x_1, \ldots, x_n\})$	$A(x, y)$	$\mathcal{O}(c(x, y))$

TABLE I
EXPANSION FUNCTIONS COMPLEXITY COST OF SOME INCREASING ϕ-RECURSIVE COMPUTABLE AGGREGATIONS.

Proof. Trivial. □

Lemma 8. *Let $Ag_c^{\mathcal{O}(f(n))}$ and $Ag_c^{\mathcal{O}(g(n))}$ be the sets of $\mathcal{O}(f(n))$-increasing ϕ-recursive and $\mathcal{O}(g(n))$-increasing ϕ-recursive computable aggregations respectively. If $f(n)$ belongs to $\mathcal{O}(g(n))$, then*

$$Ag_c^{\mathcal{O}(f(n))} \subseteq Ag_c^{\mathcal{O}(g(n))}$$

Proof. Trivial. □

Theorem 1. *Let ϕ be the expansion function of Ag_c. If the complexity of ϕ is $\Theta(f(n))$ then Ag_c is approachable with complexity $\Theta(n * f(n))$.*

Proof. Let $f(n)$ be the function that represents the computing time of ϕ. The next algorithm computes $Ag_c(x_1, \ldots, x_n)$ using ϕ:

```
def phi(y,x):
...
def Ag_c(psi,l):
    for x in l:
        aux=phi(aux,x)
    return aux
```

The number of times that the code of the loop `for` is executed depends on the length of list `l`, n. So Ag_c takes a computing time $n * f(n)$. □

Corollary 2. *If ϕ has a polynomial complexity cost, then Ag_c has a polynomial complexity cost.*

Proof. If ϕ has a polynomial complexity its computing time is $f(n) = k * n^a$ for some a. Then, due to Theorem 1 the computing time for Ag_c using ϕ is $k' * n * k * n^a = k'' n^{a+1}$. So the computing time of Ag_c belongs to $\Theta(n^{a+1})$ which is also polynomial complexity cost. □

IV. Decreasing ψ-Recursive Computable Aggregations Rules

Let Ω be a region in $\mathbb{R}^2$ such that $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.

Definition 16. *Let $L = \{x_1, \ldots, x_n\}$ be a list of values. A computable aggregation rule Ag_c is $\mathcal{O}(f(n))$-decreasing ψ-recursive in Ω if there exists a mapping $\psi : [0, 1]^2 \to [0, 1]$ such that:*

- *For all (x, y) in Ω: $Ag_c(L \setminus \{x_n\}) = \psi(Ag_c(x_1, ..., x_n)), x_n)$ if $lenght(L) > 1$*
- *ψ has a $\mathcal{O}(f(n))$ complexity cost.*

Lemma 9. *Arithmetic mean is a $\mathcal{O}(1)$-decreasing ψ-recursive computable aggregation.*

Proof. $Ag_c(x_1, \ldots, x_n) =$
$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = = \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n-1} x_i + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} x_i + \frac{1}{n} * x_n = \frac{n-1}{n} Ag_c(x_1, \ldots, x_{n-1}) + \frac{1}{n} * x_n$

So $Ag_c(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \frac{n}{n-1}(Ag_c(x_1, \ldots, x_n) - \frac{1}{n-1}x_n)$ and $\psi(x, y, n) = \frac{n}{n-1}x + \frac{1}{n-1}y$ in $\Omega = \mathbb{R}^2$.

The next program compute $\psi(x, y, \{x_1, \ldots, x_n\})$ depending if n (length of $\{x_1, \ldots, x_n\}$) is known or not:

- n is known:

```
def phi(x,y,n):
    return n/(n-1)*x-1/(n-1)y
```

So ψ is $\mathcal{O}(1)$ complexity.

- n is unknown:

```
def phi(x,y,l):
    n=len(l)
    return n/(n-1)*x-1/(n-1)y
```

So ψ has $\mathcal{O}(n)$ complexity for the computation of *length(L)*.

□

Lemma 10. *Minimum and Maximum are $\mathcal{O}(1)$-decreasing ψ-recursive computable aggregations.*

Proof. If $\min\{x_1, \ldots, x_n\} < x_n$, then $\min\{x_1, \ldots, x_{n-1}\} = \min\{x_1, \ldots, x_n\}$ and $Ag_c(x_1, \ldots, x_{n-1}) = Ag_c(x_1, \ldots, x_n)$. So $\Omega : \{(x, y) : x < y\}$

The next program computes $\psi(x, y)$:

```
def psi(x,y):
    return x
```

The complexity of $\psi(x, y, l)$ is $\mathcal{O}(1)$ in Ω.

Similar considerations can be done for Maximun. □

Lemma 11. *Product is a $\mathcal{O}(1)$-decreasing ψ-recursive computable aggregation.*

Proof. $Ag_c(x_1, \ldots, x_n) =$
$= \prod_{i=1}^{n} x_i = x_n * \prod_{i=1}^{n-1} x_i$

So $Ag_c(x_1, \ldots, x_n) = x_n * Ag_c(x_1, \ldots, x_{n-1})$ and $\psi(x, y) = x/y$.

The next program computes $\psi(x, y)$:

```
def psi(x,y):
    return x/y
```

So ψ has $\mathcal{O}(1)$ constant complexity cost. □

Lemma 12. *Geometric mean is a $\mathcal{O}(1)$-decreasing ψ-recursive computable aggregations if n is known.*

Proof. $Ag_c(x_1, \ldots, x_{n-1}) =$
$= (\prod_{i=1}^{n-1} x_i)^{\frac{1}{n-1}} = \frac{x_n}{x_n}((\prod_{i=1}^{n-1} x_i)^{\frac{1}{n-1}})^{\frac{n}{n}} = \frac{1}{x_n}((\prod_{i=1}^{n} x_i)^{\frac{1}{n}})^{\frac{n}{n-1}} = \frac{1}{x_n} Ag_c(x_1, ..., x_n)^{\frac{n}{n-1}}$

So $\psi(x, y, n) = \frac{1}{y}x^{\frac{n}{n-1}}$ □

The next program computes $\psi(x, y, n)$:

Aggregation	ψ	Complexity of ψ	Ω
Arithmetic mean	$\frac{n}{n-1}x + \frac{1}{n-1}y$	$\mathcal{O}(1)$,$\mathcal{O}(n)$	$\mathbb{R}^2$
Product	x/y	$\mathcal{O}(1)$	$\mathbb{R}^2$
Geometric mean	$\frac{1}{y}x^{\frac{n}{n-1}}$	$\mathcal{O}(1)$,$\mathcal{O}(n)$	$\mathbb{R}^2$
Minimum	x	$\mathcal{O}(1)$	$x < y$
Maximum	x	$\mathcal{O}(1)$	$x > y$
Bounded sum	$x - y$	$\mathcal{O}(1)$	$x < 1$

TABLE II
EXPANSION FUNCTIONS COMPLEXITY COST OF SOME DECREASING ψ-RECURSIVE COMPUTABLE AGGREGATIONS.

```
def phi(x,y,n):
    return res x**(n/(n-1))/y
```

So ψ has $\mathcal{O}(1)$ constant complexity cost if n is known.

Lemma 13. *Bounded sum* ($\min\{1, \sum_{i=1}^{n} x_i\}$) *is a* $\mathcal{O}(1)$*-decreasing* ψ*-recursive computable aggregations.*

Proof. If $Ag_c(x_1, \ldots, x_n) < 1$, then $Ag_c(x_1, \ldots, x_{n-1}) = Ag_c(x_1, \ldots, x_n) - x_n$. So $\Omega : \{(x, y) : x < 1\}$

The next program computes $\psi(x, y)$:

```
def phi(x,y):
    if x<1:
        res=x-y
    return res
```

So ψ has $\mathcal{O}(1)$ constant complexity cost. □

Lemma 14. *Let* $Ag_{c\mathcal{O}(f(n))}$ *and* $Ag_{c\mathcal{O}(g(n))}$ *be the sets of* $\mathcal{O}(f(n))$*-decreasing* ψ*-recursive and* $\mathcal{O}(g(n))$*-decreasing* ψ*-recursive computable aggregations respectively. If* $f(n)$ *belongs to* $\mathcal{O}(g(n))$*, then*

$$Ag_{c\mathcal{O}(f(n))} \subseteq Ag_{c\mathcal{O}(g(n))}$$

Proof. Trivial. □

V. Conclusions

The main goal in this paper is to study the behaviour of computable recursive aggregations when the universe of discourse is changed. It is possible to classify computable recursive aggregations by the complexity of their expansion and the reduction function complexity cost. Moreover, it is found a relation between the complexity of a computable recursive aggregation and its expansion function cost complexity.

Acknowledgment

This research has been partially supported by the Government of Spain (grant TIN2015-66471-P), the Government of Madrid (grant S2013/ICE-2845) and Complutense University (UCM Research Group 910149).

References

[1] G. Barnett and L. Del Tonga. *Data Structures and Algorithms*. DotNetSlackers, 2008.
[2] G. Beliakov, A. Pradera and T. Calvo. *Aggregations Functions: A guide for Practitioners*. Springer, 2007.
[3] B. Brassard. *Fundamentals of Algorithmics*. Pearson, 2015.
[4] H. Bustince, B. De Baets, J. Fernandez, R. Mesiar and J. Montero. A generalization of the migrativity property of aggregation functions. *Information Sciences*, 191:76 – 85, 2012.
[5] V. Cutello and J. Montero. Recursive connective rules. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 2(14):3–20, 1999.
[6] A. del Amo, J. Montero and E. Molina. Representation of consistent recursive rules. *European Journal of Operational Research*, 130(1):29–53, 2001.
[7] D. Gómez and J. Montero. A discussion on aggregations operators. *Kybernetika*, 40:107–120, 2004.
[8] R. González del Campo, L. Garmendia and J. Montero. Expansible computable aggregation rules. In *Proceedings of the 2015 International Conference on Intelligent Systems and Knowledge Engineering, ISKE 2015, Taipei, Taiwan*, pages 8–11, November 2015.
[9] A. Kolesárová, R. Mesiar and J. Montero. Sequential aggregation of bags. *Information Sciences*, 294:305–314, 2015.
[10] J. Giancarlo Lucca, G. Pereira Dimuro, B. R. C. Bedregal, R. Mesiar, A.árová and H. Bustince. Preaggregation functions: Construction and an application. *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, 24(2):260–272, 2016.
[11] J. Montero, R. González del Campo, L. Garmendia, D. Gómez and J. Tinguaro. Computable aggregations. *Information Sciences*, 2, 2017.

Relaciones de Indistinguibilidad Definidas Positivas

J. Recasens
Depto. Tecnología de la Arquitectura
Universidad Politécnica de Cataluña
Sant Cugat del Vallès
j.recasens@upc.edu

M. Santos Tomás
Depto. Tecnología de la Arquitectura
Universidad Politécnica de Cataluña
Barcelona
maria.santos.tomas@upc.edu

***Resumen*—Se proporcionan dos caracterizaciones geométricas de las relaciones borrosas reflexivas y simétricas definidas positivas basadas en la inmersión isométrica de sus pseudodistancias naturalmente asociadas respecto a las t-normas arquimedianas continuas con generadores aditivos $t(x) = \arccos x$ y $t(x) = \sqrt{1-x}$.**

Dada la importancia de la t-norma $T_{\arccos x}$ con generador aditivo $t(x) = \arccos x$ en estas caracterizaciones, también se caracterizará dicha t-norma.

Palabras clave: t-norma, t-norma arquimediana continua, generador aditivo, relación de T-indistinguibilidad, distancia, matriz definida positiva, determinante de Cayley-Menger.

I. Introducción

En el volumen 157 de la revista Fuzzy Sets and Systems aparecen publicados dos artículos ([8], [13]) que estudian la relación entre la propiedad de ser definida positiva y la transitividad de una relación borrosa reflexiva y simétrica desde dos puntos de vista diferentes. En [13] el interés está en el estudio de medidas de similitud usualmente usadas en, por ejemplo, química combinatoria mientras que en [8] el foco está puesto en la caracterización de kernels (ver también [9]). Uno de los resultados más importantes compartidos por ambos artículos es que una relación borrosa reflexiva y simétrica es tres-definida semipositiva (ver Definición III.2) si, y sólo si, es $T_{\arccos}$-transitiva (es decir, una relación de $T_{\arccos}$-indistinguibildad) donde $T_{\arccos}$ es la t-norma arquimediana continua con generador aditivo $t(x) = \arccos x$. En [13] también se analiza la relación entre ser definida positiva y la t-norma con generador aditivo $t(x) = \sqrt{1-x}$. La transitividad respecto a esta t-norma también se considera en el estudio de particiones borrosas en otro artículo del mismo volumen de Fuzzy Sets and Systems [4]. Más tarde, también en esta revista, [3] insiste en considerar el problema abierto de caracterizar las relaciones borrosas reflexivas y simétricas definidas positivas.

Es, en efecto, un problema interesante y el presente trabajo proporciona dos caracterizaciones geométricas de dichas relaciones. Tras una sección de cuestiones preliminares, la sección III estudia y caracteriza la importante t-norma arquimediana continua $T_{\arccos}$ con generador aditivo $t(x) = \arccos x$ al relacionarlo con la anulación del determinante de relaciones de T-indistinguibilidad unidimensionales (ver Definición III.5). Los resultados de la sección IV proporcionan caracterizaciones de una relación borrosa reflexiva y simétrica definida positiva A basadas en la inmersión isométrica de pseudodistancias asociadas a A (Proposición II.9) mediante $T_{\sqrt{1-x}}$ y $T_{\arccos}$ en un espacio euclídeo y en una hiperesfera.

II. Preliminares

Esta sección contiene las definiciones y propiedades básicas relativas a t-normas, relaciones de T-indistinguibilidad y matrices definidas positivas que se necesitarán a lo largo del trabajo. Empecemos recordando la caracterización de las t-normas arquimedianas continuas por sus generadores aditivos.

Proposición II.1. *[7] Una t-norma T es arquimediana continua si, y sólo si, existe una función $t : [0,1] \to [0,\infty]$ decreciente y continua con $t(1) = 0$ tal que para todo $x, y \in [0,1]$*

$$T(x,y) = t^{[-1]}(t(x) + t(y))$$

donde $t^{[-1]}$ es la pseudo inversa de t definida por

$$t^{[-1]}(x) = \begin{cases} t^{-1}(x) & \text{si } x \in [0, t(0)] \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

T es estricta si $t(0) = \infty$ y no estricta en caso contrario. t se denomina un generador aditivo de T y dos generadores aditivos de la misma t-norma difieren sólo en una constante multiplicativa positiva.

A partir de una t-norma continua por la izquierda se puede definir su residuación y birresiduación. Si la t-norma se usa para modelizar la conjunción lógica, entonces su residuación y birresiduación representan la implicación y biimplicación lógicas respectivamente.

Definición II.2. *[7] Sea T una t-norma continua por la izquierda.*

- *La residuación $\overrightarrow{T}$ de T es la aplicación $\overrightarrow{T} : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ definida para todo $x, y \in [0,1]$ por*

$$\overrightarrow{T}(x,y) = \sup\{\alpha \in [0,1] \mid T(x,\alpha) \leq y\}.$$

- *La birresiduación $\overleftrightarrow{T}$ de T es la aplicación $\overleftrightarrow{T} : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ definida para todo $x, y \in [0,1]$ por*

$$\overleftrightarrow{T}(x,y) = \min(\overrightarrow{T}(x,y), \overrightarrow{T}(y,x)).$$

Proposición II.3. *[7] Sea T una t-norma arquimediana continua y t un generador aditivo de T. Entonces para todo $x, y \in [0,1]$*

- $$\overrightarrow{T}(x,y) = t^{[-1]}(t(y) - t(x)).$$
- $$\overleftrightarrow{T}(x,y) = t^{-1}(|t(x) - t(y)|).$$

Necesitaremos el siguiente resultado que afirma que una t-norma continua por la izquierda puede recuperarse de su residuación.

Proposición II.4. *[1] Una t-norma es continua por la izquierda si, y sólo si,* $\inf\{\alpha \in [0,1] \mid \overrightarrow{T}(x,\alpha) \geq y\} = T(x,y)$ *para todo* $x,y \in [0,1]$.

Gracias a esta proposición, una t-norma continua por la izquierda puede recuperarse a partir de su residuación y por tanto la t-norma está caracterizado por ella. No es el caso cuando T no es continua por la izquierda tal como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo II.5. *[1] Consideremos las dos t-normas (no continuas por la izquierda)* T_1 *y* T_2 *definidas por*

$$T_1(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) \in [0,\frac{1}{2}] \times [0,\frac{1}{2}] \\ \min(x,y) & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$T_2(x,y) = \begin{cases} T_1(x,y) & \text{si } (x,y) \neq (\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \\ \frac{1}{2} & \text{si } (x,y) = (\frac{1}{2},\frac{1}{2}). \end{cases}$$

$T_1 \neq T_2$ *pero* $\overrightarrow{T}_1 = \overrightarrow{T}_2$.

Las relaciones de indistinguibilidad son uno de los tipos de relaciones borrosas más importantes porque borrosifican les conceptos de equivalencia e igualdad. Han sido estudiadas extensivamente tanto desde el punto de vista teórico como aplicado. En [10] el lector puede hallar un panorama general de dichas relaciones.

Definición II.6. *[10], [15] Sea* T *una t-norma y* X *un conjunto. Una relación borrosa* E *en* X *es una relación de* T*-indistinguibilidad si, y sólo si, para todo* $x,y,z \in X$

- $E(x,x) = 1$ *(Reflexividad)*
- $E(x,y) = E(y,x)$ *(Simetría)*
- $T(E(x,y),E(y,z)) \leq E(x,z)$ *(*T*-transitividad).*

Si $E(x,y) = 1$ *si, y sólo si,* $x = y$*, entonces se dice que* E *separa puntos.*

Definición II.7. *Una relación borrosa reflexiva y simétrica* E *en* X *se llama un relación de proximidad o de tolerancia.*

Las relaciones de indistinguibilidad están relacionadas con distancias desde diferentes puntos de vista. Uno que se necesitará en la sección IV es el resultado enunciado en la Proposición II.9.

Definición II.8. *Sea* X *un conjunto. Una aplicación* $d : X \times X \to [0,\infty]$ *es una pseudodistancia o pseudométrica si, y sólo si, para todo* $x,y,z \in X$

- $d(x,x) = 0$
- $d(x,y) = d(y,x)$
- $d(x,y) + d(y,z)) \geq d(x,z)$

Si $d(x,y) = 0$ *si, y sólo si,* $x = y$*, entonces* d *es una distancia o métrica en* X.

Proposición II.9. *[14] Sea* T *una t-norma arquimediana continua,* t *un generador aditivo de* T *y* X *un conjunto. Una relación borrosa* E *en* X *es una relación de* T*-indistinguibilidad si, y sólo si,* $t(E)$ *es una pseudodistancia en* X*.* E *separa puntos si, y sólo si,* $t(E)$ *es una distancia.*

Recordemos finalmente la definición de matriz definida positiva.

Definición II.10. *Una matriz real* A *simétrica* $n \times n$ *es definida positiva si* $\vec{u}^t A\vec{u} > 0$ *para todo vector no nulo* $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ *y definida semipositiva si* $\vec{u}^t A\vec{u} \geq 0$.

Hay muchas caracterizaciones de las matrices definidas positivas. La siguiente proposición recuerda un par de ellas.

Proposición II.11. *Sea* A *una matriz real simétrica* $n \times n$*. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

- A *es definida definida positiva.*
- *Todos los valores propios de* A *son positivos.*
- *Todos los menores principales de* A *son positivos, donde el* k*-ésimo menor principal de* A *es el determinante de su submatriz compuesta por sus* k *primeras filas y* k *primeras columnas.*

III. Caracterización de $T_{\arccos}$

Tal como se mencionó en la sección introductoria, la t-norma arquimediana continua $T_{\arccos}$ con generador aditivo $t(x) = \arccos x$ desempeña un papel importante en la caracterización de las relaciones borrosas definidas semipositivas. Por ejemplo, una relación borrosa reflexiva y simétrica es tres definida positiva (Definición III.2) si, y sólo si, es una relación de $T_{\arccos}$-indistinguibilidad. Esto hace especial a esta t-norma y merece la pena estudiarla con detalle. Además, en la subsección IV.1, $T_{\arccos}$ se usará para caracterizar geométricamente las relaciones borrosas reflexivas y simétricas definidas positivas. En esta sección se dará una caracterización de esta t-norma a partir de relaciones de indistinguibilidad unidimensionales (ver Definición III.5).

La siguiente proposición describe explícitamente la t-norma $T_{\arccos}$ y sus residuación y birresiduación.

Proposición III.1. *Para todo* $x,y \in [0,1]$,

- $$\begin{aligned} T_{\arccos}(x,y) &= \max(\cos(\arccos x + \arccos y), 0) \\ &= \max(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}, 0) \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \overrightarrow{T}_{\arccos}(x,y) &= \cos(\max(0, \arccos y - \arccos x)) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \\ xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} & \text{si } x > y. \end{cases} \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \overleftarrow{T}_{\arccos}(x,y) &= \cos(|\arccos x - \arccos y|) \\ &= \cos(\arccos x - \arccos y) \\ &= xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}. \end{aligned}$$

Definición III.2. *[13] Una relación borrosa* A *reflexiva y simétrica en un conjunto* $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ *de cardinal* $n > 2$

es tres-definida semipositiva si para todo $0 \leq i,j,k \leq n$, $i \neq j \neq k \neq i$ *la submatriz de* A

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ij} & 1 & a_{jk} \\ a_{ik} & a_{jk} & 1 \end{pmatrix}$$

es definida semipositiva, donde $A(x_i,x_j) = a_{ij}$.

En [8], [13] se da la siguiente caracterización de las relaciones de tolerancia tres-definidas semipositivas.

Proposición III.3. *[8], [13] Una relación borrosa* A *reflexiva y simétrica en un conjunto* X *es tres definida semipositiva si, Y sólo si, es* $T_{\arccos}$*-transitiva (i.e.: es una relación de* $T_{\arccos}$*-indistinguibilidad).*

La proposición anterior tiene esta bonita interpretación geométrica.

- Si $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,3}$ es una matriz 3×3 definida positiva, entonces es la matriz de un producto escalar $< \cdot,\cdot >$ y se pueden hallar tres vectores $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3$ linealmente independientes con $a_{ij} =< \vec{u}_i,\vec{u}_j >$. $a_{ii} = 1$ significa qhe estos vectores son unitarios y el ángulo determinado por $\vec{u}_i$ y $\vec{u}_j$ es por tanto $\arccos a_{ij}$. La Proposición III.3 dice que para que estos vectores existan estos ángulos deben verificar la desigualdad triangular; en otras palabras, la suma de dos de ellos debe ser mayor o igual que el otro.
- Se puede obtener otra interpretación geométrica teniendo en cuenta que $\arccos a_{ij}$ también es la longitud del arco que une los extremos de los vectores $\vec{u}_i$ y $\vec{u}_j$ con sus orígenes en el origen de coordenadas en la esfera de centro el origen de coordenadas y radio 1. Así la matriz A es tres-definida semipositiva si, y sólo si, las longitudes de los tres ángulos satisfacen la desigualdad triangular. Esto se generalizará en la subsección IV.2.

La siguiente proposición presenta la forma más natural de generar una relación de T-indistinguibilidad a partir de un subconjunto borroso de un universo X. Generaliza (borrosifica) el hecho de que, en el caso crisp, un subconjunto (crisp) $A \subseteq X$ particiona X en dos partes: A y su complementario $X - A$.

Proposición III.4. *[10], [14] Sea* μ *un subconjunto borroso de* X *y* T *una t-norma continua por la izquierda. La relación borrosa* E_μ *de* X *definida para todo* $x,y \in X$ *por*

$$E_\mu(x,y) = \overleftrightarrow{T}(\mu(x),\mu(y))$$

es una relación de T*-indistinguibilidad.*

Definición III.5. *[5], [10] Una relación de* T*-indistinguibilidad de* X *de la forma* E_μ *para algún subconjunto borroso* μ *de* X *se llama unidimensional.*

Lema III.6. *Sea* T *una t-norma arquimediana continua no estricta,* t *un generador aditivo de* T *y* μ *un subconjunto borroso de un conjunto* X *de cardinal finito. Entonces existe un subconjunto borroso* ν *normalizado tal que* $E_\mu = E_\nu$.

Demostración. Considérese $k = \max\{-t(\mu(x)) \mid x \in X\}$ y ν definido para todo $x \in X$ por

$$\nu(x) = t^{-1}(t(\mu(x)) + k).$$

- ν es normalizado: Sea $x_0 \in X$ tal que $k = -t(\mu(x_0))$. Entonces $\nu(x_0) = t^{-1}(t(\mu(x_0)) - t(\mu(x_0)) = t^{-1}(0) = 1$.
- $E_\nu = E_\mu$:

$$\begin{aligned} &E_\nu(x,y) \\ &\quad = t^{-1}(|t(t^{-1}(t(\mu(x)) + k)) - t(t^{-1}(t(\mu(y)) + k))|) \\ &\quad = t^{-1}(|t(\mu(x)) - t(\mu(y))|) = E_\mu(x,y). \end{aligned}$$

□

Lema III.7. *Sea* T *una t-norma continua por la izquierda,* X *un conjunto de cardinal finito y* μ *un subconjunto borroso de* X *constante. Entonces* $E_\mu(x,y) = 1$ *para todo* $x,y \in X$ *y por consiguiente el rango de* E_μ *es* 1 *(*$\mathrm{rg}(E_\mu) = 1$*).*

Demostración. Trivial. □

La siguiente proposición caracteriza la t-norma $T_{\arccos}$ como la única para la cual $det(E_\mu) = 0$ para todo subconjunto borroso de un conjunto de cardinal 3.

Proposición III.8. *Sea* $X = \{x_1,x_2,x_3\}$ *un conjunto de cardinal* 3 *y* T *una t-norma continua por la izquierda.* $\det(E_\mu) = 0$ *para todo subconjunto borroso* μ *de* X *si, y sólo si* $T = T_{\arccos}$.

Demostración. Gracias al lema anterior podemos considerar que el subconjunto μ de X está normalizado y, sin pérdida de generalidad, de la forma $\mu = (1,x,y)$ con $x,y \in [0,1]$ y $1 \geq x \geq y$. Entonces,

$$\begin{aligned} E_\mu &= \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ x & 1 & \overleftrightarrow{T}(x,y) \\ y & \overleftrightarrow{T}(x,y) & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ x & 1 & \overrightarrow{T}(x,y) \\ y & \overrightarrow{T}(x,y) & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\det(E_\mu) = 1 + 2xy\overrightarrow{T}(x,y) - x^2 - y^2 - (\overrightarrow{T}(x,y))^2 = 0$ si, y sólo si, $\overrightarrow{T}(x,y) = xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$.

Siendo esto cierto para todo $x,y \in [0,1]$ con $x \geq y$, y gracias a la Proposición II.4 se tiene que $T = T_{\arccos}$. □

Otro forma de expresar este resultado es la siguiente proposición.

Proposición III.9. *Sea* $X = \{x_1,x_2,x_3\}$ *un conjunto de cardinal* 3 *y* T *una t-norma continua por la izquierda.* $\mathrm{rg}(E_\mu) = 2$ *para todo subconjunto borroso* μ *de* X *no constante si, y sólo si* $T = T_{\arccos}$.

El siguiente resultado generaliza la proposición anterior en una dirección.

Proposición III.10. *Sea* $X = \{x_1,x_2,...,x_n\}$ *un conjunto finito de cardinal* $n \geq 2$, μ *un subconjunto borroso no constante de* X *y* E_μ *la relación de* $T_{\arccos}$*-indistinguibilidad unidimensional de* X *generada por* μ*. Entonces* $\mathrm{rg}(E_\mu) = 2$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $\mu = (1, a_2, a_3, ..., a_n)$ con $1 \geq a_2 \geq a_3, \geq ... \geq a_n$ y podemos escribir $\mu = (1, \cos b_2, \cos b_3, ..., \cos b_n)$. Dado que μ es no constante, $a_n \neq 1$ y por tanto $\cos b_n \neq 1$ y $\sin b_n \neq 0$. Entonces

$$\mathrm{rg}(E_\mu) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & a_2 & a_3 & ... & a_n \\ a_2 & 1 & \overrightarrow{T}(a_2,a_3) & ... & \overrightarrow{T}(a_2,a_n) \\ a_3 & \overrightarrow{T}(a_2,a_3) & 1 & ... & \overrightarrow{T}(a_3,a_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & \overrightarrow{T}(a_2,a_n) & \overrightarrow{T}(a_3,a_n) & \dots & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & \cos b_2 & \cos b_3 & ... & \cos b_n \\ \cos b_2 & 1 & \cos(b_3 - b_2) & ... & \cos(b_n - b_2) \\ \cos b_3 & \cos(b_3 - b_2) & 1 & ... & \cos(b_n - b_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos b_n & \cos(b_n - b_2) & \cos(b_n - b_3) & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

Restando a la i-ésima columna, $i > 1$, la primera multiplicada por $\cos b_i$ se obtiene que el rango es

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ \cos b_2 & 1-\cos^2 b_2 & \sin b_3 \sin b_2 & ... & \sin b_n \sin b_2 \\ \cos b_3 & \sin b_3 \sin b_2 & 1-\cos^2 b_3 & ... & \sin b_n \sin b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos b_n & \sin b_n \sin b_2 & \sin b_n \sin b_3 & ... & 1-\cos^2 b_n \end{pmatrix} =$$

$$1 + \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1-\cos^2 b_2 & \sin b_3 \sin b_2 & ... & \sin b_n \sin b_2 \\ \sin b_3 \sin b_2 & 1-\cos^2 b_3 & ... & \sin b_n \sin b_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin b_n \sin b_2 & \sin b_n \sin b_3 & ... & 1-\cos^2 b_n \end{pmatrix} =$$

$$1 + \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \sin^2 b_2 & \sin b_3 \sin b_2 & ... & \sin b_n \sin b_2 \\ \sin b_3 \sin b_2 & \sin^2 b_3 & ... & \sin b_n \sin b_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin b_n \sin b_2 & \sin b_n \sin b_3 & ... & \sin^2 b_n \end{pmatrix}$$

Restando a la i-ésima columna, $i < n$, la última multiplicada por $\frac{\sin b_i}{\sin b_n}$ (recuérdese que $\sin b_n \neq 0$) se obtiene que el rango de E_μ es

$$1 + \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & \sin b_n \sin b_2 \\ 0 & 0 & ... & \sin b_n \sin b_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \sin^2 b_n \end{pmatrix} = 2.$$

□

Como corolario se obtiene la siguiente caracterización de la t-norma $T_{\arccos}$.

Proposición III.11. *Sea T una t-norma continua por la izquierda y X un conjunto finito de cardinal $n > 2$. $T = T_{\arccos}$ si, y sólo si, $\mathrm{rg}(E_\mu) = 2$ para todo subconjunto borroso μ no constante de X.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Proposición III.10.

$\Leftarrow$) Consideremos una t-norma T diferente de $T_{\arccos}$ y μ un subconjunto borroso de X de la forma $(1, a_2, a_3, ..., a_n)$ con $1 > a_2 > a_3$ y con $\overrightarrow{T}(a_2,a_3) \neq \overrightarrow{T}_{\arccos}(a_2,a_3)$. (Tales a_2, a_3 existen gracias a la Proposición II.4). Entonces

$$\det\begin{pmatrix} 1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & 1 & \overleftrightarrow{T}(a_2,a_3) \\ a_3 & \overleftrightarrow{T}(a_2,a_3) & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & 1 & \overrightarrow{T}(a_2,a_3) \\ a_3 & \overrightarrow{T}(a_2,a_3) & 1 \end{pmatrix}.$$

Este determinante es diferente de 0 gracias a la Proposición III.8 y por tanto $\mathrm{rg}(E_\mu) \geq 3$.

□

IV. Dos Caracterizaciones Geométricas de las Relaciones Borrosas Reflexivas y Simétricas Definidas Positivas

De la sección anterior se tiene que una relación borrosa reflexiva y simétrica en un conjunto X de cardinal 3 es $T_{\arccos}$-transitiva si, y sólo si, es definida semipositiva. Si X es de cardinal mayor que 3, la condición es necesaria, pero no suficiente como se muestra en [8] mediante un contraejemplo.

Esta sección contiene dos caracterizaciones de las relaciones borrosas reflexivas y simétricas definidas positivas: en la subsección IV-A relacionada con la inmersión isométrica en un espacio euclídeo y en la subsección IV-B relacionada con la inmersión isométrica en la hiperesfera $\mathbb{S}^n = \{\vec{v} = (x_0, x_1, ...x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n x_i^2 = 1\}$ en $\mathbb{R}^{n+1}$ de centro el origen de coordenadas $\vec{0}$ y radio 1.

IV-A. Inmersión en $\mathbb{R}^n$

Definición IV.1. *Sea $X = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ un conjunto finito de cardinal $n+1$ y d una distancia en X. Denotando $d(x_i, x_j)$ por d_{ij} para todo $0 \leq i, j \leq n$, el determinante de Cayley-Menger $CM(x_0, x_1, ..., x_n)$ es*

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 0 & d_{01}^2 & d_{02}^2 & ... & d_{0n}^2 \\ 1 & d_{01}^2 & 0 & d_{12}^2 & ... & d_{1n}^2 \\ 1 & d_{02}^2 & d_{12}^2 & 0 & \dots & d_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & d_{0n}^2 & d_{1n}^2 & d_{2n}^2 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

La importancia de este determinante estriba en el hecho de que si el conjunto X está contenido en $\mathbb{R}^n$ y d es la distancia euclídea, entonces está relacionado con el volumen del $n+1$-simplex generado por los puntos de X del siguiente modo.

Proposición IV.2. *Sea $X = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ un conjunto finito de $n+1$ puntos de $\mathbb{R}^n$ y d la distancia euclídea. Entonces el volumen $v(X)$ del $n+1$-simplex con vértices los elementos de X es*

$$v(X) = \sqrt{\frac{(-1)^{n+1}}{2^n (n!)^2} CM(x_0, x_1, ..., x_n)}.$$

Este resultado se puede consultar en cualquier libro y artículo que estudie las inmersiones en un espacio euclídeo. Uno de los primeros, citado en [6], es [12]. En particular, el determinante de Cayley-Menger de un conjunto de puntos de $\mathbb{R}^n$ debe tener el mismo signo que $(-1)^{n+1}$. De aquí se obtiene la siguiente caracterización de los espacios métricos finitos que se pueden inyectar isométricamente en un espacio euclídeo.

Proposición IV.3. *[6] Sea $X=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ un conjunto finito de cardinal $n+1$ y d una distancia en X. Denotando $d(x_i,x_j)$ by d_{ij} para todo $0\leq i,j\leq n$, (X,d) es inyectable isométricamente en $\mathbb{R}^n$ si y sólo si, para todo $k=1,2,...,n$ el signo de $CM(x_0,x_1,...,x_k)$ es igual a $(-1)^{k+1}$.*

Proposición IV.4. *[11] Sea $X=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ un conjunto finito de cardinal $n+1$ y d una distancia en X. Denotando $d(x_i,x_j)$ por d_{ij} para todo $0\leq i,j\leq n$, (X,d) es inyectable isométricamente en $\mathbb{R}^n$ si, y sólo si, la matriz $n\times n$ con valores $x_{ij}=\frac{d_{0i}^2+d_{0j}^2-d_{ij}^2}{2}$ $(1\leq i,j\leq n)$ es definida positiva.*

En el caso de una relación borrosa reflexiva y simétrica, su matriz A asociada $n\times n$ tiene unos en la diagonal, así que para todo $i=1,2,...,n$, se tiene

$$1=x_{ii}=\frac{d_{0i}^2+d_{0i}^2-d_{ii}^2}{2}=\frac{2d_{0i}^2}{2}=d_{0i}^2.$$

y, por lo tanto,

$$d_{0i}=1.$$

Así en este caso el determinante de Cayley-Menger de d es

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 1 & 0 & d_{12}^2 & ... & d_{1n}^2 \\ 1 & 1 & d_{12}^2 & 0 & \dots & d_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & d_{1n}^2 & d_{2n}^2 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Además, de

$$x_{ij}=\frac{d_{0i}^2+d_{0j}^2-d_{ij}^2}{2}=\frac{2-d_{ij}^2}{2}$$

se obtiene

$$d_{ij}=\sqrt{2}\sqrt{1-x_{ij}}\ \ \textit{para todo}\ 1\leq i,j\leq n.$$

En términos de los elementos de A, entonces

$$CM(x_0,x_1,...,x_n) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2(1-x_{12}) & ... & 2(1-x_{1n}) \\ 1 & 1 & 2(1-x_{12}) & 0 & \dots & 2(1-x_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 2(1-x_{1n}) & 2(1-x_{2n}) & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

y se obtiene la siguiente caracterización geométrica de las relaciones borrosas reflexivas y simétrica con matriz asociada definida positiva.

Proposición IV.5. *Una relación borrosa reflexiva y simétrica A en un conjunto $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ finito es definida positiva si, y sólo si, es una relación de $T_{\sqrt{1-x}}$-indistinguibilidad y en $X'=X\cup\{x_0\}$ la distancia asociada d (i.e.: $d_{ij}=\sqrt{2}\sqrt{1-x_{ij}}$ si $i,j>0$ y $d_{0i}=1$ para $i>0$) es inyectable isométricamente en $\mathbb{R}^n$.*

En la inmersión, x_0 puede enviarse al origen de coordenadas x_0' y las imágenes x_i' de $x_i, i>0$ corresponden a los extremos de los vectores $\overrightarrow{x_0'x_i'}$ con lo que la proposición anterior se puede enunciar de modo más claro.

Proposición IV.6. *Una relación borrosa $A=(x_{ij})$ reflexiva y simétrica en un conjunto $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ de cardinal finito n es definida positiva si, y sólo si, es una relación de $T_{\sqrt{1-x}}$-indistinguibilidad y X con la distancia $d(x_i,x_j)=\sqrt{2}\sqrt{1-x_{ij}}$, $1\leq i,j\leq n$, se puede inyectar isométricamente en $\mathbb{R}^n$ de tal modo que las imágenes de los puntos de X están situados sobre la hiperesfera $\mathbb{S}^{n-1}$.*

En particular, para un conjunto X de cardinal 3 esto significa que el determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2(1-x_{12}) & 2(1-x_{13}) \\ 1 & 1 & 2(1-x_{12}) & 0 & 2(1-x_{23}) \\ 1 & 1 & 2(1-x_{13}) & 2(1-x_{23}) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$8(x_{12}x_{13}x_{23}-x_{12}^2-x_{13}^2-x_{23}^2+1)$$

debe ser mayor que 0. Esto es equivalente a que A sea $T_{\arccos}$-transitiva y la Proposición III.3 se puede reinterpretar del siguiente modo.

Proposición IV.7. *Las siguientes afirmaciones sobre una relación borrosa reflexiva y simétrica R en un conjunto X son equivalentes.*

- *R es tres-definida semipositiva.*
- *R es una relación de $T_{\arccos}$-indistinguibilidad.*
- *$\sqrt{1-R}$ es una pseudodistancia en X y todo subconjunto de cardinal 3 de X se puede inyectar isométricamente en $\mathbb{R}^3$ de tal modo que las imágenes de los puntos de X están situados en la esfera $\mathbb{S}^2$.*

Esta última proposición también muestra la relación entre $T_{\arccos}$ y $T_{\sqrt{1-x}}$. En [13] se demostró que si una relación borrosa reflexiva y simétrica es tres-definida semipositiva, entonces es $T_{\sqrt{1-x}}$-transitiva. Es un resultado interesante que no se sigue de forma directa de la $T_{\arccos}$-transitividad porque las dos t-normas no son comparables: $T_{\arccos}(0{,}7,0{,}8)=0{,}13>0{,}10=T_{\sqrt{1-x}}(0{,}7,0{,}8)$ y $T_{\arccos}(0{,}8,0{,}8)=0{,}28<0{,}45=T_{\sqrt{1-x}}(0{,}8,0{,}8)$. El resultado anterior clarifica la situación.

IV-B. Inmersión en $\mathbb{S}^n$

Mientras que en la subsección anterior se ha obtenido la caracterización de una relación de tolerancia definida positiva A mediante el estudio de la inyectabilidad de la métrica generada por A y el generador aditivo $t(x)=\sqrt{1-x}$ de la

t-norma $T_{\sqrt{1-x}}$ en un espacio euclídeo, en esta subsección la caracterización se obtendrá por el estudio de la inyectabilidad de la métrica generada por el generador aditivo $t(x) = \arccos x$ de la t-norma $T_{\arccos}$ en una hiperesfera. Esto generaliza las interpretaciones geométricas de la Proposición III.3.

Sea $\mathbb{S}^n = \{\vec{v} = (x_0, x_1, ...x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = 1\}$ la hiperesfera en $\mathbb{R}^{n+1}$ de centro el origen de coordenadas $\vec{0}$ y radio 1. La métrica esférica d es la métrica en $\mathbb{S}^n$ definida para todo $\vec{u} = (x_0, x_1, ...x_n), \vec{v} = (y_0, y_1, ..., y_n) \in \mathbb{S}^n$ por

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = \arccos(|\sum_{i=0}^{n} x_i \cdot y_i|) = \arccos < \vec{u}, \vec{v} >$$

donde $< \vec{u}, \vec{v} >$ es el producto escalar usual en $\mathbb{R}^{n+1}$. Es la longitud del mayor arco de círculo que une $\vec{u}$ con $\vec{v}$.

Proposición IV.8. *Sea $X = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ un conjunto finito de cardinal $n+1$ y d una distancia en X. Denotando $d(x_i, x_j)$ por d_{ij} para todo $0 \leq i, j \leq n$, (X, d) es inyectable isométricamente en $\mathbb{S}^n$ si, y sólo si, la matriz $n \times n$ con valores $x_{ij} = \cos d_{ij}$ es definida positiva.*

En este caso, la matriz A con valores x_{ij} es la matriz de una relación borrosa reflexiva y simétrica.

El determinante de Cayley-Menger de d es

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \arccos^2 x_{12} & ... & \arccos^2 x_{1n} \\ 1 & 1 & \arccos^2 x_{12} & 0 & \dots & \arccos^2 x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \arccos^2 x_{1n} & \arccos^2 x_{2n} & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Además,

$$x_{ij} = \cos d_{ij}.$$

De aquí que la siguiente proposición presenta una caracterización geométrica alternativa de las relaciones borrosas reflexivas y simétricas con la matriz asociada definida positiva.

Proposición IV.9. *Una relación borrosa reflexiva y simétrica A en un conjunto $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ finito es definida positiva si, y sólo si, es una relación de $T_{\arccos}$-indistinguibilidad y X con la distancia $d(x_i, x_j) = \arccos x_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$ se puede inyectar isométricamente en $\mathbb{S}^{n-1}$ con la métrica esférica.*

V. Conclusiones

En este trabajo se han dado dos caracterizaciones métricas de las relaciones borrosas reflexivas y simétricas definidas positivas mediante el uso de resultados conocidos de inyectabilidad en espacios euclídeos e hiperesferas con las distancias asociadas generadas por el generador aditivo de $T_{\arccos}$ y $T_{\sqrt{1-x}}$ según la Proposición II.9.

Los resultados obtenidos en la subsección IV-B permiten una elegante demostración geométrica de las Proposiciones III.8 y III.10. De forma esquemática: Es sabido que una relación de indistinguibilidad E que separe puntos en un conjunto X con $E(x, y) \neq 0$ para todo $x, y \in X$ transitiva respecto a una t-norma arquimediana continua determina una relación de estar entre métrica (metric betweenness relation) [6] en X que es lineal si, y sólo si, E es unidimensional [10]. En particular una relación de $T_{\arccos}$-indistinguibilidad unidimensional E en $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ determina una relación de estar entre lineal en X. Entonces $t(E) = \arccos(E)$ es una distancia que también determina una relación de estar entre lineal en X [2] y por lo tanto los puntos de X se pueden inyectar isométricamente en un arco de una hiperesfera. Junto al centro de dicha hiperesfera determinan un $n+1$-simplex contenido en un plano y por consiguiente cualquier terna de vectores $\overrightarrow{x_0x_1}$, $\overrightarrow{x_0x_2}$,...,$\overrightarrow{x_0x_n}$ son linealmente dependientes. (Esto también puede interpretarse como que todos los volúmenes de este simplex de dimensión mayor que 2 son 0).

Referencias

[1] D. Boixader, Some Properties Concerning the Quasi-inverse of a t-norm Mathware & Soft Computing 5 (1998) 5–12.

[2] D. Boixader, J. Recasens, Indistinguishability Operators with Respect to Different t-norms. Int. J. Uncertainty Fuzziness and Knowledge-based Systems 20 (2012) 167–183.

[3] C. Degang, Z. Deli, Structure of feature spaces related to fuzzy similarity relations as kernels. Fuzzy Sets and Systems 237 (2014) 90–95.

[4] L. Foulloy, E. Benoit, Building a class of fuzzy equivalence relations Fuzzy Sets and Systems 157(11) (2006) 1417–1437.

[5] J. Jacas, On the generators of T-indistinguishability operators. Stochastica 12 (1988) 49–63.

[6] K. Menger, Untersuchungen über allgemeine Metrik. Math. Ann. 100 (1928) 75–113.

[7] E.P., Klement, R. Mesiar, E. Pap, Triangular norms. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2000).

[8] B. Moser, On the T-transitivity of kernels Fuzzy Sets and Systems 157(13) (2006) 1787–1796.

[9] B. Moser, On representing and generating kernels by fuzzy equivalence relations, J. Mach. Learn. Res. 7 (2006) 2603–2620.

[10] J. Recasens, Indistinguishability Operators. Modelling Fuzzy Equalities and Fuzzy Equivalence Relations. Studies in Fuzziness and Soft Computing. Springer, 2011.

[11] I. J. Schoenberg, Remarks to Maurice Fréchet's article 'Sur la définition axiomatique d'une classe d'espace distanciés vectoriellement applicable sur l'espace de Hilbert', Ann. Math. 36 (1935) 724–732.

[12] P.H. Schouten, Mehrdimensionale Geometrie 2 (Die Polytope). Sammlung Schubert XXXVI, Leipzig (1905).

[13] M.S. Tomás, C. Alsina, J. Rubio-Martinez, Pseudometrics from three-positive semidefinite similarities Fuzzy Sets and Systems 157(17) (2006) 2347–2355.

[14] L. Valverde, On the Structure of F-indistinguishability Operators. Fuzzy Sets and Systems 17 (1985) 313–328.

[15] L.A. Zadeh, Similarity relations and fuzzy orderings. Inform. Sci. 3 (1971) 177–200.

Negaciones naturales asociadas a t-subnormas discretas

Sebastia Massanet*†, Juan Vicente Riera*†, Joan Torrens*†
* *Departamento de Ciencias Matemáticas e Informática*
Grupo de investigación en Soft Computing, Procesamiento de Imágenes y Agregación (SCOPIA)
Universidad de las Islas Baleares, 07122 Palma, España
†*Instituto de Investigación Sanitaria de las Islas Baleares (IdISBa), 07010 Palma, España*
{s.massanet, jvicente.riera, jts224}@uib.es

***Resumen*—En las últimas décadas, las operaciones definidas sobre cadenas finitas, usualmente llamadas operaciones discretas, han experimentado un gran interés por sus aplicaciones en muchos campos de la ciencia. Una de estas operaciones son las llamadas t-subnormas discretas que son una generalización de las t-normas discretas y que tienen una especial relevancia en aplicaciones que usan etiquetas lingüísticas. En este trabajo, se estudian las negaciones naturales asociadas a t-subnormas discretas incidiendo en su estructura y en algunas de sus propiedades. En particular, se caracterizan algunos casos concretos de negaciones discretas que pueden ser la negación natural asociada a una t-subnorma discreta. En este trabajo, los conceptos de negación débil y simétrica, que resultan ser equivalentes en el caso discreto, desempeñarán un papel clave.**

***Index Terms*—función de agregación discreta, t-subnorma discreta, negación natural.**

I. Introducción

En muchas situaciones prácticas en las que los cálculos y los razonamientos deben de ser reducidos a un número finito de posibles valores, a menudo cualitativos, el enfoque lingüístico borroso es un marco adecuado para modelar dicha información. Esto es debido, en este caso, a que los términos cualitativos usados por los expertos son habitualmente representados por variables lingüísticas en lugar de valores numéricos. En este tipo de enfoques, las variables lingüísticas se valoran en cadenas finitas totalmente ordenadas tales como:

$$L = \{\text{Extremadamene Malo}, \text{Muy Malo}, \text{Malo}, \text{Regular},$$
$$\text{Bueno}, \text{Muy Bueno}, \text{Extremadamente Bueno}\},$$

que pueden ser todas representadas por la cadena finita $L_n = \{0, 1, \ldots, n\}$. Consecuentemente, muchos investigadores han centrado sus esfuerzos en el estudio de operaciones definidas sobre L_n, o abreviadamente operaciones discretas (ver [7], [8], [11], [18] y concretamente [23] como trabajo pionero en este ámbito).

Entre las diferentes operaciones discretas, las funciones de agregación discretas destacan por su importancia debido a la necesidad de fusionar un conjunto inicial de datos en uno final que los represente. Existen muchos ejemplos de posibles aplicaciones de las funciones de agregación entre los que destacan los procesos de decisión, las evaluaciones subjetivas, el procesamiento de imágenes o el reconocimiento de patrones, entre otros. Por ello, el estudio de dichas funciones ha ido en aumento en los últimos años como se evidencia con la publicación de diferentes monográficos sobre dicha temática (ver [2], [3], [12]). En muchos casos, el estudio de funciones de agregación discretas se lleva a cabo suponiendo la verificación de alguna propiedad adicional, como puede ser el caso de la suavidad, que es considerada en este entorno como la homóloga a la continuidad en el intervalo unidad, o equivalentemente la propiedad de 1-Lipschitz. En esta línea de investigación, muchas familias de funciones de agregación discretas han sido también estudiadas o incluso caracterizadas. Por ejemplo, las t-normas y t-conormas suaves han sido caracterizadas en [24] (ver también [23]), las t-subnormas suaves en [20], las medias ponderadas ordinales en [16], las uninormas en $\mathcal{U}_{\text{mín}}$ y $\mathcal{U}_{\text{máx}}$ y nulnormas en [18], las uninormas discretas idempotentes en [6], las uninormas y nulnormas no conmutativas en [19] y [8] respectivamente, las cópulas en [22] y las cuasi-cópulas en [1].

Las funciones de agregación discretas se pueden clasificar en cuatro grandes familías dependiendo de su relación con la función mínimo y la función máximo: conjuntivas cuando se encuentran por debajo del mínimo, disyuntivas cuando se encuentran por encima del máximo, funciones promedio o compensatorias cuando se encuentran entre el mínimo y el máximo y mixtas en cualquier otro posible caso. En este artículo, trabajaremos con funciones de agregación discretas conjuntivas y en particular, con la familia de t-subnormas discretas. Estas operaciones generalizan la familia de t-normas discretas (ver [7], [15], [24]) y pueden ser vistas como un caso particular de subgrupo topológico ordenado [5]. Las t-subnormas sobre $[0, 1]$ juegan un papel muy relevante en la construcción de sumas ordinales de t-normas continuas por la izquierda así como en otros métodos de construcción (ver [14]). Además, los estudios sobre generadores aditivos y multiplicativos de estos operadores (ver [9], [21], [25]) así como la verificación de determinadas propiedadades tales como la cancelatividad [17] o la verificación de la condición de Lipschitz justifican la importacia del estudio de las t-subnormas.

Recientemente, una linea de investigación de las t-subnormas sobre $[0, 1]$ ha sido dedicada a su negación natural asociada. El concepto de negación natural asociada fue estudiado en [4] para el caso de t-normas continuas por la

izquierda, mientras que en [13] se investigaron en profundidad las t-subnormas con negación natural asociada fuerte. En este último trabajo, fue demostrado que tales t-subnormas son de hecho t-normas. Además se investigaron las relaciones entre diferentes propiedades algebraicas y analíticas como la cancelatividad condicional, la propiedad Arquimediana, la continuidad por la izquierda o sus elementos nilpotentes. Por ello, y siguiendo esta linea de investigación, en este artículo queremos desarrollar un estudio similar para el caso de t-subnormas discretas. La negación natural asociada a estos operadores discretos será ampliamente analizada y se presentarán varias ideas sobre su estructura.

Este trabajo se organizará de la siguiente manera: con la intención de que sea lo más autocontenido posible, en la sección II se presentaran algunos conceptos básicos sobre operaciones discretas, y en concreto sobre t-subnormas y t-normas discretas. En la sección III se estudiaran las negaciones débiles y simétricas, dos subfamilias de negaciones discretas que veremos que en el contexto discreto son equivalentes En la sección IV, el concepto de 0-función de una t-subnorma discreta es introducido e investigado caracterizando aquellas 0-funciones que satisfacen la condición de ser una negación discreta. Además, entre otras importantes propiedades, se demuestra que las negaciones débiles son las únicas negaciones discretas que son la negación natural asociada a una t-norma discreta. Finalmente, este trabajo finaliza con la sección V en la que se exponen algunas conclusiones y posibles líneas de trabajo futuro.

II. Preliminares

Supondremos que el lector está familiarizado con los conceptos más relevantes sobre funciones de agregación, negaciones borrosas, t-normas (ver [15]) y también sobre t-normas discretas, esto es, t-normas definidas sobre una cadena finita (ver [24]). Por ello, solo recordaremos las definiciones y resultados esenciales necesarios para una correcta comprensión de este trabajo.

Es conocido (ver [24]) que para el estudio de funciones de agregación binarias todas las cadenas finitas con el mismo número de elementos son equivalentes. Por ello, utilizaremos la más simple de ellas con $n+1$ elementos:

$$L_n = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$$

y, para todo $a, b \in L_n$ con $a \leq b$, utilizaremos la notación $[a, b]$ para denotar la subcadena dada por $[a, b] = \{x \in L_n \mid a \leq x \leq b\}$.

Definición 1 (**[24]):**

- Una función $f : L_n \to L_n$ se dice que es *suave* cuando $\mid f(x) - f(x-1) \mid \leq 1$ para todo $x \in L_n$ con $x \geq 1$.
- Una operación binaria F sobre L_n se dice que es *suave* cuando sus secciones, vertical y horizontal, lo son.

La importancia de la condición de suavidad radica en el hecho de que generalmente esta característica es usada en el caso discreto de manera equivalente a la continuidad en el intervalo $[0, 1]$, propiedad equivalente a la de divisibilidad (para una t-norma T, $x \leq y$ si y solo si existe $z \in L_n$ tal que $T(y, z) = x$), ver también [24].

Proposición 2 (**[24]):** La única negación suave (equivalentemente fuerte o estrictamente decreciente) sobre L_n es la negación clásica dada por

$$N(x) = n - x \quad \text{para todo} \quad x \in L_n.$$

Proposición 3 (**[24]):** Consideremos $m+1$ elementos de la cadena L_n dados por $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_{m-1} < a_m = n$ y sea T_i una t-norma definida sobre la cadena $[a_{i-1}, a_i]$ para todo $i = 1, \ldots, m$. Entonces, la operación binaria sobre L_n dada por $T(x, y) =$

$$\begin{cases} T_i(x, y) & \text{si existe un } i \text{ tal que } a_{i-1} \leq x, y \leq a_i, \\ \min\{x, y\} & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

es siempre una t-norma en L_n usualmente llamada *suma ordinal* de las t-normas $T_1, \ldots, T_m$.

Proposición 4 (**[24]):** Existe una y solo una t-norma Arquimediana y suave sobre L_n dada por la expresión

$$T(x, y) = \max\{0, x + y - n\} \tag{1}$$

conocida habitualmente como la t-norma de Łukasiewicz.

Además, toda t-norma suave se puede caracterizar como una suma ordinal de t-normas de Łukasiewicz del siguiente modo tal y como indica el siguiente resultado:

Proposición 5 (**[24]):** Una t-norma T sobre L_n es suave si y solo si existe un número natural m con $1 \leq m \leq n$ y un subconjunto J de L_n,

$$J = \{0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_{m-1} < a_m = n\}$$

tal que T viene dada por $T(x, y) =$

$$\begin{cases} \max\{a_k, x + y - a_{k+1}\} & \text{si existe } a_k \in J \\ & \text{con } a_k \leq x, y \leq a_{k+1}, \\ \min\{x, y\} & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Un concepto que generaliza la noción de t-norma es el de t-subnorma.

Definición 6: Sea $T : L_n^2 \to L_n$ una operación binaria sobre L_n. Se dice que T es una *t-subnorma* cuando T es asociativa, conmutativa, creciente en cada variable y verifica $T(x, y) \leq \min\{x, y\}$ para todo $x, y \in L_n$.

Obviamente, cualquier t-norma sobre L_n es también una t-subnorma pero no viceversa. Por ejemplo, la menor t-subnorma sobre L_n es la cero t-subnorma ($T(x, y) = 0$ para todo $x, y \in L_n$) que claramente no es una t-norma sobre L_n.

III. Algunas propiedades de la negaciones discretas

Como la única negación suave sobre L_n es la clásica, expresada por $N(x) = n - x$, nos podemos plantear el hecho de investigar otras negaciones diferentes a ésta. En este sentido, si consideramos la posibilidad de que la negación no sea suave, podemos encontrar muchas negaciones discretas tal como veremos a continuación. Las siguientes definiciones son adaptaciones sobre L_n de las propuestas en [4] y [6].

Definición 7: Sea $N : L_n \to L_n$ una negación discreta.

- N es una *negación débil* si $x \leq N^2(x)$ para todo $x \in L_n$.
- N se dice *simétrica* cuando el conjunto

$$F_N = \{(n,0)\} \cup \{(x,y) \in L_n^2 \mid N(x+1) \leq y \leq N(x)\}$$

es simétrico, esto es, $(x,y) \in F_N$ si y solo si $(y,x) \in F_N$.

En el caso de negaciones definidas sobre el intervalo $[0,1]$, las negaciones débiles y simétricas no coinciden en general, y solo coinciden en el caso en que N sea continua por la izquierda (ver [4]). El siguiente ejemplo ilustra este hecho.

Ejemplo 8: Las negaciones simétricas son aquellas negaciones N cuyo grafo es simétrico con respecto a la función identidad. Así, cada posible región constante de N se corresponde con un punto de discontinuidad y viceversa (ver [4]). En este sentido, si la función no es continua por la izquierda en esos puntos, la propiedad $x \leq N^2(x)$ puede fallar. Por ejemplo, la negación dada por

$$N(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0{,}25, \\ 1{,}25 - x & \text{si } 0{,}25 < x < 1, \\ 0 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Es fácil probar que N es simétrica, pero claramente no es una negación débil ya que para todo x tal que $0 < x \leq 0{,}25$ se verifica que $N^2(x) = N(1) = 0 < x$.

En el caso discreto ambos conceptos coinciden siempre como se verá en la siguiente proposición. La demostración de la misma es una adaptación de la considerada en el lema 2 de [6]. Hemos querido incluir la demostración de este resultado en aras de una mayor comprensión del mismo.

Proposición 9: Sea $N : L_n \to L_n$ una negación discreta. Las siguientes propiedades son equivalentes:

i) N es simétrica.
ii) N es una negación débil.
iii) Para todo $(x,y) \in L_n^2$ se verifica:

$$y \leq N(x) \iff x \leq N(y).$$

Demostración. $(i) \implies (ii)$. Para todo $x \in L_n$ tenemos por definición que $(x, N(x)) \in F_N$. Como N es simétrica se tiene que $(N(x), x) \in F_N$ hecho que implica que $x \leq N(N(x))$. Esto es, N es una negación débil.

$(ii) \implies (iii)$. Consideremos $(x,y) \in L_n^2$ tal que $x \leq N(y)$, el decrecimiento de N implica que $N(x) \geq N(N(y)) \geq y$. Similarmente, de $y \leq N(x)$ se sigue que $x \leq N(y)$.

$(iii) \implies (i)$. Queremos probar que F_N es simétrica. Consideremos $(x,y) \in F_N$, entonces $N(x+1) \leq y \leq N(x)$ y por tanto $x \leq N(y)$. Por otra parte, si $N(y+1) > x$, entonces

$$x+1 \leq N(y+1) \implies y+1 \leq N(x+1) \implies y < N(x+1),$$

que contradice el hecho que $(x,y) \in F_N$. Por tanto, concluimos que $N(y+1) \leq x$ y así $(y,x) \in F_N$, demostrando que F_N es simétrica. ■

Existen muchos ejemplos de negaciones discretas débiles (o simétricas) sobre L_n. En el siguiente ejemplo presentamos una familia paramétrica de negaciones discretas que abarcan desde la negación drástica hasta la negación clásica.

Ejemplo 10: Consideremos $\alpha \in L_n$ y sea N_α dada por

$$N_\alpha(x) = \begin{cases} n & \text{si } x = 0, \\ \alpha - x & \text{si } 0 < x < \alpha, \\ 0 & \text{si } x \geq \alpha. \end{cases}$$

Claramente N_α es una negación débil para todo $\alpha \in L_n$. Además, si $\alpha = 0$ obtenemos N_0 la negación drástica, mientras que si $\alpha = n$ obtenemos la negación clásica $N_n(x) = n - x$.

IV. T-subnormas discretas y sus negaciones asociadas

En esta sección queremos investigar la región cero de una t-subnorma discreta similarmente a como se ha estudiado en el caso de t-subnormas definidas sobre el intervalo unidad. Para ello empezaremos dando la siguiente definición propuesta en [13] para el caso $[0,1]$.

Definición 11: Para cada t-subnorma discreta $T : L_n \times L_n \to L_n$, llamaremos *0-función asociada* (denotada por N_T) a aquella dada por

$$N_T(x) = \text{máx}\{z \in L_n \mid T(x,z) = 0\}.$$

Contrariamente a lo que ocurre para el caso de las t-normas, la 0-función asociada de una t-subnorma no necesita ser una negación discreta porque $N_T(n) = \text{máx}\{z \in L_n \mid T(n,z) = 0\}$ podría ser diferente de 0 (cuando T es una t-subnorma propia, n no es el elemento neutro de T). Cuando N_T sea una negación discreta, la llamaremos *negación natural asociada* de la t-subnorma T. Además, cabe destacar que

1. Si $n = 1$, la t-subnorma cero (con 0-función asociada dada por $N(x) = 1$ para $x \in \{0,1\}$, no es una negación), y la t-norma mínimo (con la negación clásica como negación natural asociada) son las únicas t-subnormas sobre $L_1 = \{0,1\}$.
2. Cuando $n = 2$ hay exactamente siete t-subnormas sobre L_2 que pueden ser fácilmente construidas, de las cuales solo dos de ellas son t-normas. En cualquier caso, las únicas posibidades de 0-funciones asociadas son:
   - La función constante $N(x) = 2$ para todo $x \in L_2 = \{0,1,2\}$.
   - $N(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \in \{0,1\}, \\ 1 & \text{si } x = 2. \end{cases}$
   - La negación clásica $N(x) = 2 - x$.
   - La negación drástica $N(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{si } x \in \{1,2\}. \end{cases}$

   Claramente, solo los dos últimos casos son negaciones discretas.

De acuerdo a los resultados anteriores, supondremos a partir de ahora que $n \geq 3$. Así, para $n \geq 3$ podemos encontrar también ejemplos de t-subnormas, diferentes de la t-subnorma cero, cuya 0-función asociada no es una negación discreta tal como se puede ver en el siguiente ejemplo.

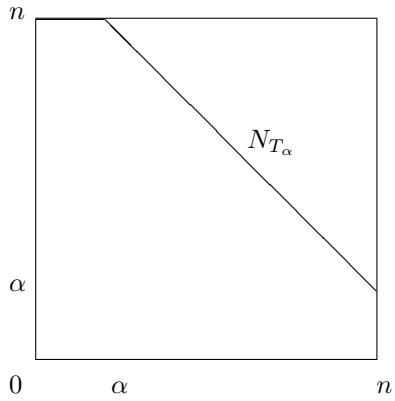


Figura 1. 0-función asociada N_{T_α} del ejemplo 12.

Ejemplo 12: Consideremos $\alpha \in L_n$ y la función $T_\alpha : L_n^2 \to L_n$ dada por

$$T_\alpha(x,y) = \max\{0, x+y-n-\alpha\} \qquad \text{para todo} \quad x,y \in L_n.$$

Entonces T_α es siempre un t-subnorma suave (ver [20]) con $T_\alpha(n,n) = n-\alpha$. En particular, T_α es una t-subnorma propia si y solo si $\alpha > 0$. Además, su 0-función asociada vendrá dada por:

$$N_{T_\alpha}(x) = \max\{z \in L_n \mid T_\alpha(x,z) = 0\}$$
$$= \max\{z \in L_n \mid x+z-n-\alpha \leq 0\}.$$

Esto es,

$$N_{T_\alpha}(x) = \min\{n, n+\alpha-x\} = \begin{cases} n & \text{si } x \leq \alpha, \\ n+\alpha-x & \text{si } x > \alpha. \end{cases}$$

Por tanto, es obvio que N_{T_α} es una negación discreta solo cuando $\alpha = 0$ en cuyo caso T_α es de hecho la t-norma de Łukasiewicz. Para los otros casos se tiene que $N_{T_\alpha}(n) = \alpha > 0$. Podemos ver dibujada la función N_{T_α} en la figura 1.
En el caso discreto tenemos una fácil caracterización de las t-subnormas que verifican que N_T es una negación.

Lema 13: Sea $T : L_n^2 \to L_n$ una t-subnorma discreta. La 0-función asociada a T es una negación discreta si y solo si $T(n,1) = 1$.

Demostración. Si N_T es una negación discreta entonces $N_T(n) = \max\{z \in L_n \mid T(x,n) = 0\} = 0$ y consecuentemente $T(n,1) > 0$. Como T siempre está por debajo del mínimo entonces se debe verificar que $T(n,1) = 1$.

Recíprocamente, si $T(n,1) = 1$ entonces $N_T(n) = 0$ y N_T es una negación discreta. ■

Además, N_T resulta ser una negación débil y esta propiedad caracteriza de hecho las negaciones que estan asociadas a una t-subnorma satisfaciendo $T(n,1) = 1$ (equivalentemente aquellas que estan asociadas a alguna t-norma) de la siguiente manera:

Proposición 14: Sea $N : L_n \to L_n$ una negación discreta. Los siguientes ítems son equivalentes:

i) Existe una t-norma T tal que $N = N_T$.
ii) Existe una t-subnorma T verificando $T(n,1) = 1$ tal que $N = N_T$.
iii) N es una negación débil.

Demostración. Es evidente que $(i) \Longrightarrow (ii)$. Para demostrar que $(ii) \Longrightarrow (iii)$ supongamos que existe alguna t-subnorma T con $T(n,1) = 1$ tal que $N = N_T$. En este caso tenemos $N(x) = \max\{z \in L_n \mid T(x,z) = 0\}$ y por tanto $T(x, N(x)) = 0$ hecho que implica directamente que

$$N^2(x) = N(N(x)) = \max\{z \in L_n \mid T(N(x), z) = 0\} \geq x.$$

Finalmente, para ver que $(iii) \Longrightarrow (i)$, consideremos N una negación débil y tomemos la función dada por

$$T(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq N(x), \\ \min\{x,y\} & \text{si } y > N(x), \end{cases} \tag{2}$$

y veamos que T es una t-norma[1], que tendrá claramente a N como negación natural asociada. Notar que la función T dada por la ecuación (2) es creciente en ambas variables y para todo $x > 0$ tenemos $T(n,x) = \min\{n,x\} = x$, mientras que $T(n,0) = 0$ por definición. Así, T tiene por elemento neutro n. Como N es una negación débil, por la proposición 9 se tiene que $y \leq N(x)$ si y solo si $x \leq N(y)$ y esto implica que T también es conmutativa. Finalmente, es fácil ver (aunque es un cálculo tedioso) que también se verifica la propiedad asociativa y así obtenemos que T es una t-norma. ■

De acuerdo a la proposición anterior, cuando una negación discreta N es la negación asociada a alguna t-subnorma también es la negación asociada a alguna t-norma. Sin embargo, puede haber muchas más t-subnormas que t-normas que tienen una negación débil específica como su negación asociada (ver por ejemplo la proposición 17). Pero este no es el caso cuando la negación asociada sea suave, esto es, cuando se considera la negación clásica $N(x) = n - x$ como demostraremos en el siguiente resultado, que puede ser interpretado como el homólogo para el caso discreto del teorema 3.3 de [13].

Proposición 15: Sea $T : L_n^2 \to L_n$ una t-subnorma discreta con negación natural asociada $N_T(x) = n - x$. Entonces, necesariamente T es una t-norma.

Demostración. Solo es necesario ver que $n \in L_n$ es el elemento neutro de T. Supongamos que existe un $x \in L_n$ tal que $T(n,x) = x' < x$. Entonces se tiene que $n - x' > n - x$ y consecuentemente $T(x, n-x') > 0$. Denotemos por $y = T(x, n-x')$, entonces

$$0 = T(n-x', x') = T(n-x', T(x,n))$$
$$= T(T(n-x', x), n) = T(y, n),$$

que es una contradicción ya que por el lema 13 se tiene $T(n,y) \geq T(n,1) = 1$ para todo $y > 0$. Consecuentemente, debe ser $T(n,x) = x$ para todo $x \in L_n$ y por tanto T es una t-norma. ■

Como consecuencia de la proposición anterior algunos resultados conocidos para t-subnormas sobre $[0,1]$ que tienen una negación fuerte asociada (ver [13], [14]), pueden ser

[1]Para cualquier negación débil N, la t-norma T dada por la ecuación (2) es conocida habitualmente como *mínimo nílpotente* con respecto a N.

demostrados aquí para el caso discreto, tal como veremos en la siguiente proposición.

Proposición 16: Sea $T : L_n^2 \to L_n$ una t-subnorma discreta con negación natural asociada $N_T(x) = n - x$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

i) T es condicionalmente cancelativa.
ii) T es estrictamente creciente en su región positiva.
iii) T es suave.
iv) T es la t-norma de Łukasiewicz.

Demostración. Daremos solo un esbozo de la demostración. Es obvio que $(i) \Longrightarrow (ii)$.

Para demostrar que $(ii) \Longrightarrow (iii)$, consideremos $x, y \in L_n$ con $x < y$. Se tiene que $n - y < n - x$ y así, $T(y, n - x) > 0$. Sea $z = T(y, n - x)$. Entonces, usando un razonamiento similar al caso $[0, 1]$ (ver teorema 2 de [14]) se demuestra que debe verificarse $T(y, n - z) = x$. Esto es, existe algún $z \in L_n$ tal que $T(y, z) = x$ y T satisface la propiedad de divisibilidad que es equivalente a la condición de que T sea una t-norma suave (ver la proposición 7.3.3 de [24]).

$(iii) \Longrightarrow (iv)$. Como T tiene por negación asociada $N_T(x) = n - x$, debe de ser una t-norma y la única t-norma suave con esta condición es la t-norma de Łukasiewicz.

Finalmente, la implicación $(iv) \Longrightarrow (i)$ es trivial. ■

La proposición 15 nos permite caracterizar todas las t-subnormas que tienen por negación natural la familia paramétrica de negaciones discretas considerada en el ejemplo 10. Para ello,

Proposición 17: Sea $T : L_n^2 \to L_n$ una t-subnorma discreta. Se verifican los siguientes resultados:

i) N_α es la negación natural asociada a T si y solo si T es una suma ordinal de una t-norma T' sobre $[0, \alpha]$ con la negación clásica $N(x) = \alpha - x$ como negación asociada y una t-subnorma T'' sobre $[\alpha, 1]$.
ii) Si T es suave entonces N_α es la negación natural asociada a T si y solo si T es suma ordinal de la t-norma de Łukasiewicz sobre $[0, \alpha]$ y una t-subnorma suave T'' sobre $[\alpha, 1]$.

Demostración. Probemos el primer ítem (i). Supongamos que N_α es la negación natural asociada a T. Considerando la restricción de T en el cuadrado $[0, \alpha]^2$, claramente obtenemos una t-subnorma, $T' = T_{/[0,\alpha]^2}$, sobre la cadena finita $[0, \alpha]$ con negación natural asociada $N(x) = \alpha - x$ para todo $x \in [0, \alpha]$. Aplicando la proposición 15 se deduce que T' debe de ser una t-norma y consecuentemente tenemos, en particular, que $T(\alpha, \alpha) = \alpha$. En este caso, es bien sabido que T debe de ser una suma ordinal de una t-norma T' sobre $[0, \alpha]$ y una t-subnorma T'' sobre $[\alpha, 1]$.

Recíprocamente, es claro que cualquier t-subnorma expresada como una suma ordinal de una t-norma T' sobre $[0, \alpha]$ con negación asociada $N(x) = \alpha - x$ y una t-subnorma T'' sobre $[\alpha, 1]$, tiene a N_α como negación natural asociada.

Finalmente, notar que el ítem (ii) es consecuencia inmediata del ítem previo y de la proposición 16. ■

La estructura de las t-subnormas caracterizadas en la proposición 17 puede ser vista en la figura 2.

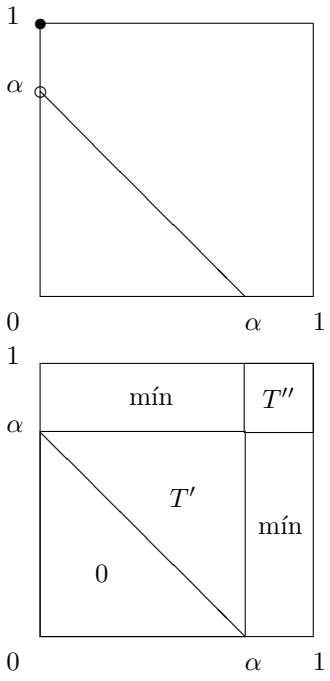


Figura 2. Negaciones N_α (arriba) de la familia parametrizada dada en el ejemplo 10 y la estructura de las t-subnormas (abajo) teniendo a N_α como negación natural asociada y caracterizadas en la proposición 17-(i).

V. Conclusiones y trabajo futuro

En este trabajo, se ha presentado un estudio en profundidad sobre las negaciones naturales asociadas a t-subnormas discretas. En primer lugar, hemos demostrado la equivalencia entre negaciones débiles y negaciones simétricas en el entorno discreto, resultado que, en general, no se verifica en el intervalo unidad $[0, 1]$ salvo que la negación borrosa sea continua por la izquierda. Después hemos introducido el concepto de 0-función de una t-subnorma discreta (a partir de la definición dada para el caso $[0, 1]$) y se han caracterizado los casos en que esta función es de hecho una negación discreta. A partir de esta investigación, como consecuencia de las propiedades de sus negaciones naturales asociadas, se han demostrado varios resultados sobre la relación existente entre t-subnormas discretas y t-normas discretas. De particular importancia es la proposición 14 que demuestra que las negaciones débiles son las únicas negaciones discretas que son las negaciones naturales asociadas a una t-norma discreta.

Como trabajo futuro, queremos analizar este tema desde otra perspectiva, esto es, si fijamos una negación débil N, ¿qué t-normas T pueden ser consideradas para conseguir una nueva t-norma T' tal que $N_{T'} = N$ y $T'(x, y) = T(x, y)$ para todo $y > N(x)$? Equivalentemente, caracterizar aquellas t-normas T cuyo operador

$$T'(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq N(x), \\ T(x, y) & \text{si } y > N(x), \end{cases}$$

es una t-norma. Este problema se ha abordado ya en [4] para el caso $[0, 1]$ pero no ha sido investigado todavía en el entorno

discreto.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por el proyecto TIN2016-75404-P, AEI/FEDER, UE.

Referencias

[1] I. Aguiló, J. Suñer and J. Torrens, Matrix representation of discrete quasi-copulas, Fuzzy Sets and Systems, 159 (2008) 1658-1672.
[2] G. Beliakov, A. Pradera and T. Calvo, Aggregation Functions: A Guide for Practicioners, Springer, Berlin Heidelberg (2007).
[3] T. Calvo, G. Mayor, R. Mesiar (editors); "Aggregation operators. New trends and applications", Studies in Fuzziness and Soft Computing, 97. Physica-Verlag, Heidelberg, (2002).
[4] R. Cignoli, F. Esteva, L. Godo and F. Montagna, On a class of left-continuous t-norms, Fuzzy Sets and Systems, 131 (2002) 283–296.
[5] A.H. Clifford, Naturally ordered commutative semigroups, Amer. J. Math., 76 (1954) 631-646.
[6] B. De Baets, J. Fodor, D. Ruiz-Aguilera and J. Torrens, Idempotent uninorms on finite ordinal scales, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 17 (2009) 1-14.
[7] B. De Baets and R. Mesiar, Discrete triangular norms, in: Topological and Algebraic Structures in Fuzzy Sets, A Handbook of Recent Developments in the Mathematics of Fuzzy Sets (S. Rodabaugh and E.-P. Klement, eds.), Trends in Logic 20, Kluwer Academic Publishers, 2003, pp. 389-400.
[8] J.C. Fodor, Smooth associative operations on finite ordinal scales, IEEE Trans. on Fuzzy Systems, 8 (2000) 791-795.
[9] R. Ghiselli Ricci, Representation of continuous triangular subnorms, in Proceedings of the IPMU-04, Perugia, Italy (2004) pp. 1105-1110.
[10] R. Ghiselli Ricci, R. Mesiar and A. Mesiarová, Lipschitzianity of triangular subnorms, in Proceedings of the IMPU-06, Paris (2006) pp. 671-677.
[11] L. Godo and V. Torra, On aggregation operators for ordinal qualitative information, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 8 (2000) 143-154.
[12] M. Grabisch, J.L. Marichal, R. Mesiar and E. Pap, Aggregation functions, in the series: *Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 127*, Cambridge University Press, (2009)
[13] B. Jayaram, T-subnorms with strong associated negation: Some properties, Fuzzy Sets and Systems, 323 (2017) 94–102.
[14] S. Jenei, Continuity of left-continuous triangular norms with strong induced negations and their boundary conditions, Fuzzy Sets and Systems, 124 (2001) 35–41.
[15] E.P. Klement, R. Mesiar and E. Pap, Triangular norms, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2000).
[16] A. Kolesárová, G. Mayor and R. Mesiar, Weighted ordinal means, Information Sciences, 177 (2007) 3822-3830.
[17] K. C. Maes, A. Mesiarová-Zemánková, Cancellativity properties for t-norms and t-subnorms, Information Sciences, 179 (2009) 1221-1233.
[18] M. Mas, G. Mayor and J. Torrens, $t-$Operators and uninorms on a finite totally ordered set, International Journal of Intelligent Systems, 14 (1999) 909-922.
[19] M. Mas, M. Monserrat and J. Torrens, On left and right uninorms on a finite chain, Fuzzy Sets and Systems, 146 (2004) 3-17.
[20] M. Mas, M. Monserrat and J. Torrens, Smooth t-subnorms on finite scales, Fuzzy Sets and Systems, 167 (2011) 82-91.
[21] G. Mayor and J. Monreal, Additive generators of discrete conjunctive aggregation operations, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 15 (2007) 1046-1052.
[22] G. Mayor, J. Suñer and J. Torrens, Copula-like operations on finite settings, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 13 (2005) 468-477.
[23] G. Mayor and J. Torrens, On a class of operators for expert systems, International Journal of Intelligent Systems, 8 (1993) 771-778.
[24] G. Mayor and J. Torrens, Triangular norms in discrete settings, in: E.P. Klement and R. Mesiar (Eds.), *Logical, Algebraic, Analytic, and Probabilistic Aspects of Triangular Norms*. Elsevier, Amsterdam, 2005, pp. 189–230.
[25] A. Mesiarová, Continuous triangular subnorms, Fuzzy Sets and Systems, 142 (2004) 75-83.

Estudio del Modus Tollens para implicaciones borrosas

Isabel Aguiló, Jaume Suñer, Joan Torrens
Soft Computing, Image Processing and Aggregation Research Group (SCOPIA)
Department of Mathematics and Computer Science
University of the Balearic Islands. 07122 Palma de Mallorca, Spain.
Balearic Islands Health Research Institute (IdISBa). 07010 Palma de Mallorca, Spain.
isabel.aguilo@uib.es, jaume.sunyer@uib.es, jts224@uib.es

***Resumen*—En la lógica borrosa y el razonamiento aproximado, la propiedad del Modus Tollens se tranforma en una desigualdad funcional involucrando una t-norma, una implicación borrosa y una negación. En este trabajo ampliamos dicha desigualdad substituyendo la t-norma por una uninorma conjuntiva, dando lugar al llamado U-Modus Tollens. Estudiamos esta nueva propiedad para implicaciones derivadas de uninormas, demostrando que existen numerosas soluciones entre las implicaciones residuadas o RU-implicaciones.**

***Index Terms*—Función de implicación borrosa, Modus Tollens, uninorma, implicación residuada, RU-implicación.**

I. Introducción

Las funciones de implicación borrosas se usan habitualmente, tanto para modelar los condicionales borrosos como también en el proceso de inferencia borrosa. De esta forma, la importancia de las funciones de implicación borrosas radica principalmente en sus aplicaciones que se extienden a muchos campos, y no se limitan únicamente al razonamiento aproximado y al control borroso (ver por ejemplo [3], [5], [14]). Ese es también el motivo de que resulte importante disponer de una gama de funciones de implicación borrosas tan amplia como sea posible (ver [25]), así como caracterizar aquellas que cumplen determinadas propiedades que resultan importantes en las aplicaciones.

Entre estas propiedades destacan las reglas de inferencia básicas dadas por el Modus Ponens y el Modus Tollens. En el ámbito de la lógica borrosa, dichas reglas se traducen en sendas desigualdades funcionales que se escriben respectivamente como

$$T(x, I(x, y)) \leq y \quad \text{para todos} \quad x, y \in [0, 1], \tag{1}$$

y

$$T(N(y), I(x, y)) \leq N(x) \quad \text{para todos} \quad x, y \in [0, 1], \tag{2}$$

donde T es una t-norma, I es una función de implicación borrosa y N una negación.

Debido a su importancia, ambas reglas de inferencia han sido extensivamente estudiadas por diversos autores (ver por ejemplo [2], [3], [12], [14], [22]–[24], [26]). Los primeros estudios se realizaron para implicaciones derivadas de t-normas y t-conormas. En concreto, las implicaciones residuadas y las (S, N)-implicationes fueron estudiadas en [2], [22], [23] y las QL y D-implicationes en [24]. Como generalización de estas clases de implicaciones, se han introducido otras derivadas de uninormas, en especial las RU-implicaciones y las (U, N)-implicaciones (ver por ejemplo [1], [4], [6], [13], [18]–[20]). Recientemente, el Modus Ponens y el Modus Tollens se han estudiado también para estos dos tipos de implicaciones derivadas de uninormas (ver [12] y [11] respectivamente).

De hecho, aún cuando las uninormas se introdujeron inicialmente en el ámbito de las funciones de agregación (ver [8], [27]), también han sido estudiadas como operadores lógicos dado que siempre son conjuntivas o disyuntivas. En particular, las uninormas conjuntivas son utilizadas a menudo como conjunciones borrosas y, en este sentido, substituir en las reglas del Modus Ponens y del Modus Tollens la t-norma T por una uninorma conjuntiva U resulta natural e interesante a la vez. En esta línea, dicha substitución en el Modus Ponens fue ya considerada en [15], [16] dando lugar a la propiedad llamada U-Modus Ponens (o también U-condicionalidad). Lo primero que se deriva de estos trabajos es que las implicaciones usuales, como las derivadas de t-normas y t-conormas o las implicaciones de Yager, no satisfacen la U-condicionalidad. Así, los candidatos posibles para satisfacer el U-Modus Ponens aparecen entre las implicaciones derivadas de uninormas. Se ha estudiado y resuelto ya para el caso de RU-implicaciones en [15], [16] y se ha iniciado su estudio para el caso de (U, N)-implicaciones en [17].

Por el contrario, no se ha realizado un estudio similar para el caso del Modus Tollens. Precisamente, en este trabajo queremos rellenar ese hueco y estudiar la generalización del Modus Tollens que se obtiene substituyendo la t-norma T por una uninorma U, dando lugar a la propiedad que llamaremos U-Modus Tollens. Esto es, queremos estudiar la propiedad

$$U(N(y), I(x, y)) \leq N(x) \quad \text{para todos} \quad x, y \in [0, 1], \tag{3}$$

donde U es una uninorma, I es una función de implicación borrosa y N una negación.

En cuanto a la organización del trabajo, tras esta introducción empezamos con un capítulo de preliminares dedicado a que el artículo sea tan autocontenido como sea posible. La sección 3 presenta la definición y primeras propiedades del Modus Tollens respecto de una uninorma U. La sección 4 estudia el U-Modus Tollens para RU-implicaciones derivadas

de tres tipos de uninormas: las de $\mathcal{U}_{\text{mín}}$, las representables y las idempotentes. Finalmente, la sección 5 incluye las conclusiones y algunas propuestas de trabajo futuro.

II. Preliminares

Supondremos que el lector está familiarizado con los resultados básicos sobre t-normas, t-conormas, negaciones y funciones de implicación borrosas (para detalles sobre t-normas, véase [9]; sobre implicaciones, véase [3], [5], [7]). A continuación recordaremos solo algunos conceptos sobre funciones de implicación borrosas y sobre uninormas con el objetivo de que el trabajo sea lo más autocontenido posible.

II-A. Funciones de implicación borrosas

Definición 1: ([3], [7]) Una operación binaria $I : [0,1]^2 \to [0,1]$ es una *función de implicación borrosa*, o una *implicación borrosa*, si satisface:

(I1) $I(x,z) \geq I(y,z)$ cuando $x \leq y$, para todo $z \in [0,1]$.

(I2) $I(x,y) \leq I(x,z)$ cuando $y \leq z$, para todo $x \in [0,1]$.

(I3) $I(0,0) = I(1,1) = 1$ e $I(1,0) = 0$.

Nótese que, de la definición, se desprende que $I(0,x) = 1$ e $I(x,1) = 1$ para todo $x \in [0,1]$ mientras que los valores simétricos $I(x,0)$ e $I(1,x)$ no se derivan de la definición.

Definición 2: ([3], [7]) Sea I una implicación borrosa. La función N_I definida por $N_I(x) = I(x,0)$ para todo $x \in [0,1]$, se llama la *negación natural* de I y es siempre una negación borrosa.

A continuación recordamos algunas de las propiedades más habituales de las implicaciones borrosas que utilizaremos a lo largo del trabajo:

- El *principio de neutralidad* por la izquierda:

$$I(1,y) = y \quad \text{para todo} \quad y \in [0,1]. \qquad (NP)$$

- El *principio de identidad*:

$$I(x,x) = 1 \quad \text{para todo } x \in [0,1]. \qquad (IP)$$

- La *contraposición* respecto de una negación N:

$$I(x,y) = I(N(y),N(x)) \quad \text{para todos} \quad x,y \in [0,1]. \qquad CP(N)$$

II-B. Uninormas

Definición 3: ([8], [27]) Una *uninorma* es una aplicación $U : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ asociativa, conmutativa, creciente en cada variable y tal que existe un elemento $e \in [0,1]$, llamado *elemento neutro*, tal que $U(e,x) = x$ para todo $x \in [0,1]$.

Evidentemente, una uninorma con elemento neutro $e = 1$ es una t-norma y una uninorma con elemento neutro $e = 0$ es una t-conorma. Para cualquier otro valor $e \in]0,1[$ la operación se comporta como una t-norma en $[0,e]^2$, como una t-conorma en $[e,1]^2$ y toma valores entre el mínimo y el máximo en el conjunto $A(e)$ dado por

$$A(e) = [0,e[\times]e,1] \cup]e,1] \times [0,e[.$$

Denotaremos de forma habitual una uninorma con elemento neutro e y t-norma y t-conorma subyacentes T y S, respectivamente, por $U \equiv \langle T,e,S\rangle$. Cualquier uninorma satisface que $U(0,1) \in \{0,1\}$; cuando $U(1,0) = 0$, se dice que la uninorma U es *conjuntiva*, mientras que, cuando $U(1,0) = 1$, se dice que U es *disyuntiva*.

Existen muchas clases diferentes de uninormas. Las más habituales pueden hallarse en el artículo recopilatorio [10]. Recordemos aquí la estructura de tres de las clases más usadas de uninormas conjuntivas.

Proposición 1: ([8], [10]) Sea $U : [0,1]^2 \to [0,1]$ una uninorma con elemento neutro $e \in]0,1[$. Si $U(0,1) = 0$, entonces la sección $x \mapsto U(x,1)$ es continua excepto para $x = e$ si y solo si U viene dada por $U(x,y) =$

$$\begin{cases} eT\left(\frac{x}{e},\frac{y}{e}\right) & \text{si } (x,y) \in [0,e]^2, \\ e + (1-e)S\left(\frac{x-e}{1-e},\frac{y-e}{1-e}\right) & \text{si } (x,y) \in [e,1]^2, \\ \text{mín}(x,y) & \text{si } (x,y) \in A(e), \end{cases}$$

donde T es una a t-norma y S es una t-conorma.

Denotaremos por $\mathcal{U}_{\text{mín}}$ a esta clase de uninormas, y por $U \equiv \langle T,e,S\rangle_{\text{mín}}$ a una uninorma de $\mathcal{U}_{\text{mín}}$ con elemento neutro e y t-norma y t-conorma subyacentes T y S, respectivamente, como .

Las uninormas idempotentes fueron completamente caracterizadas para el caso general en [21] de la siguiente forma.

Proposición 2: ([10], [21]) U es una uninorma idempotente con elemento neutro $e \in [0,1]$ si y solo si existe una función no creciente $g : [0,1] \to [0,1]$, simétrica respecto de la función identidad, con $g(e) = e$, tal que $U(x,y) =$

$$\begin{cases} \text{mín}(x,y) & \text{si } y < g(x) \text{ o } (y = g(x) \text{ y } x < g^2(x)), \\ \text{máx}(x,y) & \text{si } y > g(x) \text{ o } (y = g(x) \text{ y } x > g^2(x)), \\ x \text{ o } y & \text{si } y = g(x) \text{ y } x = g^2(x), \end{cases}$$

y U es conmutativa en los puntos (x,y) tales que $y = g(x)$ con $x = g^2(x)$.

Denotaremos por $U \equiv \langle g,e\rangle_{\text{ide}}$ a una uninorma idempotemte U con elemento neutro e y función asociada g, y a la clase de todas las uninormas idempotentes, por $\mathcal{U}_{\text{ide}}$.

Obviamente, para estas uninorrmas, la t-norma subyacente es el mínimo y la t-conorma subyacente es el máximo.

Definición 4: ([8], [10]) Diremos que una uninorma U, con elemento neutro $e \in]0,1[$, es *representable* si existe una función estrictamente creciente $h : [0,1] \to [-\infty,+\infty]$ (llamada *generador aditivo* de U, que es único excepto una constante multiplicativa $k > 0$), con $h(0) = -\infty$, $h(e) = 0$ y $h(1) = +\infty$, tal que U viene dada por

$$U(x,y) = h^{-1}(h(x) + h(y))$$

para todos $(x,y) \in [0,1]^2 \setminus \{(0,1),(1,0)\}$. Se tiene que $U(0,1) = U(1,0) = 0$ o $U(0,1) = U(1,0) = 1$.

Denotaremos por $U \equiv \langle e,h\rangle_{\text{rep}}$ a una uninorma representable con elemento neutro $e \in]0,1[$ y generador aditivo, y a la clase de todas la uninormas representables, por $\mathcal{U}_{\text{rep}}$.

Por otra parte, existen diversas clases de funciones de implicación derivadas de uninormas. Recordamos aquí el caso de las RU-implicaciones.

Definición 5: ([6]) Sea U una uninorma. La *operación residuada* obtenida a partir de U es la operación binaria dada por

$$I_U(x,y) = \sup\{z \in [0,1] \mid U(x,z) \leq y\}$$

para todos $x, y \in [0,1]$.

Proposición 3: ([6]) Sea U una uninorma y I_U su operación residuada. Entonces I_U es una implicación si y solo si $U(x,0) = 0$ para todo $x < 1$. En tal caso, I_U recibe el nombre de *RU-implicación*.

Esto incluye todas las uninormas conjuntivas, pero también muchas de disyuntivas, por ejemplo, en las clases de las uninormas representables (véase [6]) y las idempotentes (véase [18]). Sin embargo, en el caso de trabajar con uninormas continuas por la izquierda, claramente se obtiene que I_U es una implicación si y solo si U es conjuntiva.

III. Modus Tollens respecto de una uninorma

Como ya hemos comentado el objetivo principal de este trabajo es el estudio del Modus Tollens substituyendo la t-norma T por una uninorma U, de una forma similar a como se hizo para el Modus Ponens en [15], [16]. Damos a continuación la definición formal.

Definición 6: Diremos que una función de implicación borrosa I y una negación N satisfacen el *Modus Tollens respecto de una uninorma U*, o simplemente el *U-Modus Tollens*, si

$$U(N(y), I(x,y)) \leq N(x) \quad \text{para todos} \quad x, y \in [0,1]. \quad (4)$$

Notemos que la definición se ha dado para una uninorma en general y no para una que sea conjuntiva (que es el objetivo real puesto que debe generalizar la conjunción o t-norma). Esto es debido a que no es necesario dado que dicha propiedad sobre U se deriva directamente de la definición como sigue.

Proposición 4: Sean I una función de implicación borrosa y N una negación que satisfacen el Modus Tollens respecto de una uninorma U. Entonces la uninorma U ha de ser necesariamente conjuntiva.

De la definición resulta claro que el U-Modus Tollens no depende sólo de la uninorma y la implicación, sino también, y en especial, de la negación utilizada en la ecuación (4). Ilustramos este hecho en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1: Veamos cómo se comporta el U-Modus Tollens en los casos extremos de considerar la negación más pequeña y la más grande.

i) Consideremos la negación más pequeña $N = N_{D_1}$ dada por

$$N_{D_1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Notemos que en este caso (4) siempre se satisface para todo $y > 0$ dado que la uninorma U es conjuntiva. Mientras que para $y = 0$ y $x > 0$ tenemos que

$$U(N(0), I(x,0)) = U(1, N_I(x)) \leq N(x) = 0,$$

de donde se deduce que $N_I(x) = 0$ para todo $x > 0$. En resumen, una implicación I y la negación N_{D_1} satisfacen el Modus Tollens respecto de una uninorma conjuntiva U si y sólo si N_I es la propia negación N_{D_1}.

ii) Consideremos ahora la negación más grande $N = N_{D_2}$ dada por

$$N_{D_2}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

En este caso se puede ver, de forma parecida, que una implicación I y la negación N_{D_2} satisfacen el Modus Tollens respecto de una uninorma conjuntiva U si y sólo si $I(1,y) = 0$ para todo $y < 1$.

De forma similar al caso de t-normas, cuando la uninorma U es continua por la izquierda se puede dar una caracterización sencilla de las soluciones.

Proposición 5: Sean I una función de implicación borrosa, N una negación y U una uninorma conjuntiva. Si U es continua por la izquierda, I, N satisfacen el Modus Tollens respecto de U si y sólo si

$$I(x,y) \leq I_U(N(y), N(x)) \quad \text{para todos } x, y \in [0,1],$$

donde I_U indica la implicación residuada derivada de la uninorma U.

Sin embargo, la condición anterior puede ser difícil de comprobar según los casos. Queremos estudiar con más profundidad la condición del Modus Tollens para dar resultados más específicos según sean U y N. Un primer análisis de la definición anterior permite dar algunos resultados generales que listamos en la siguiente proposición.

Proposición 6: Sean I una función de implicación borrosa y N una negación que satisfacen el Modus Tollens respecto de una uninorma conjuntiva U. Sea e el elemento neutro de U, entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $U(N(y), I(1,y)) = 0$ para todo $y \in [0,1]$.
2. $N_I(x) \leq N(x)$ para todo $x \in [0,1]$. Además, para todo $x \in [0,1]$ tal que $N_I(x) \geq e$ ha que ser $N(x) = 1$.
3. Sea $\alpha_N = \sup\{x \in [0,1] \mid N(x) \geq e\}$. Entonces, se satisface una y sólo una de las siguientes condiciones:
   - $N(x) < e$ para todo $x > 0$ (es decir, $\alpha_N = 0$),
   - $\alpha_N > 0$ y se tiene $I(1,y) = 0$ para todo $y < \alpha_N$.
4. Si I satisface (NP), ha de ser necesariamente $\alpha_N = 0$.
5. Si I satisface (IP) y $N(x) < 1$ para todo $x > 0$, ha de ser necesariamente $\alpha_N = 0$.

A partir del apartado 3) de la proposición anterior, se deduce que si $\alpha_N > 0$ (y eso se da por ejemplo siempre que N sea continua) las implicaciones habituales derivadas de t-normas y t-conormas (R, (S,N), QL y D-implicaciones), así como las implicaciones de Yager no satisfacen nunca el U-Modus Tollens (ya que para todas ellas se satisface (NP)). En cambio, para diversos tipos de implicaciones derivadas de uninormas, en especial las RU-implicaciones, si se tiene, o se puede tener, $I(1,y) = 0$ para todo $y < 1$.

Dedicaremos por tanto la próxima sección al estudio del U-Modus Tollens para RU-implicaciones. Antes, damos algunos resultados para implicaciones en general en el caso de

negaciones con $\alpha_N = 0$, es decir , tales que $N(x) < e$ para todo $x > 0$. El primero de ellos hace referencia a que, si U es de $\mathcal{U}_{\text{mín}}$, el U-Modus Tollens está garantizado para todos los valores con $x \leq y$ y sólo hace falta verificar que se satisface para el resto de valores, es decir, para $y < x$.

Proposición 7: Sean I una función de implicación borrosa, N una negación con $\alpha_N = 0$ y U una uninorma de $\mathcal{U}_{\text{mín}}$ con elemento neutro e. Entonces I, N satisfacen el Modus Tollens respecto de U si y sólo si

$$U(N(y), I(x, y)) \leq N(x) \quad \text{para todos } y < x.$$

Pasamos ahora a estudiar el caso en que la implicación satisface (NP), que es el caso de la mayoria de implicaciones derivadas de t-normas y t-conormas.

Proposición 8: Sean I una función de implicación borrosa que satisface (NP), N una negación y U una uninorma conjuntiva con elemento neutro e. Si I, N satisfacen el Modus Tollens respecto de U, entonces son ciertas las siguientes propiedades:

1. $U(N(y), y) = 0$ para todo $y \in [0, 1]$.
2. $N(x) = 0$ para todo $x \geq e$ y $N(x) < e$ para todo $x > 0$.
3. $U(N(y), I(e, y)) = 0$ para todo $y \in [0, 1]$.
4. Si N es estrictamente decreciente en el intervalo $]0, e[$, ha de ser $I(x, y) < e$ para todos $y < x < e$.

Podemos dar ahora una caracterización de las soluciones del U-Modus Tollens para el caso en que I satisfaga (NP), U sea de $\mathcal{U}_{\text{mín}}$ y N sea estrictamente decreciente en el intervalo $]0, e[$.

Teorema 1: Sean I una función de implicación borrosa que satisface (NP), $U \equiv \langle T_U, e, S_U \rangle_{\text{mín}}$ y N una negación estrictamente decreciente en $]0, e[$. Entonces I, N satisfacen el Modus Tollens respecto de U, si y sólo si se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $U(N(y), I(e, y)) = 0$ para todo $y \in [0, 1]$.
2. $N(x) = 0$ para todo $x \geq e$ y $N(x) < e$ para todo $x > 0$.
3. $I(x, y) < e$ para todos $y < x < e$.
4. I' y N' satisfacen el Modus Tollens respecto de la t-norma T_U para todos $y < x$, donde I' y N' vienen dadas respectivamente por

$$I'(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \\ \frac{I(ex, ey)}{e} & \text{si } y < x \end{cases} \tag{5}$$

$$N'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{N(ex)}{e} & \text{en cualquier otro caso,} \end{cases} \tag{6}$$

Ejemplo 2: Consideremos la uninorma de $\mathcal{U}_{\text{mín}}$, $U \equiv \langle T_U, e, S_U \rangle_{\text{mín}}$ donde $T_U = T_{\mathbf{LK}}$ es la t-norma de Łukasiewicz y S_U es una t-conorma cualquiera. Sea N_e la negación dada por

$$N_e(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ e - x & \text{si } 0 < x < e \\ 0 & \text{si } x \geq e. \end{cases}$$

Por último, consideremos la implicación:

$$I_e(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \text{ o } y = 1 \\ \text{máx}(e - x, y) & \text{si } 0 < x \leq e \text{ y } 0 \leq y \leq e \\ y & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Es fácil ver que estos operadores satisfacen todas las condiciones del teorema 1 y por lo tanto I_e, N_e satisfacen el Modus Tollens respecto de la uninorma U.

Nota 1: Notemos que en el ejemplo anterior, al igual que en el teorema 1, la t-conorma S_U puede ser cualquiera y lo mismo sucede con los valores de la implicación I fuera del rectángulo $[0, e[^2$ con la única condición de que satisfaga (NP).

IV. U-Modus Tollens para RU-implicaciones

En el apartado anterior hemos visto que si trabajamos con negaciones N con $\alpha_N > 0$ (y ésto incluye las negaciones continuas), entonces se requiere que las implicaciones satisfagan $I(1, y) = 0$ para los valores de $y < \alpha_N$. Esta propiedad se satisface en RU-implicaciones derivadas, por ejemplo, de uninormas representables y también de algunas idempotentes. Por este motivo queremos estudiar en este apartado el U-Modus Tollens para RU-implicaciones. Lo haremos para RU-implicaciones derivadas de los tres tipos de uninormas conjuntivas recordados en los preliminares y lo dividiremos en una sección para cada caso.

IV-A. RU-implicaciones derivadas de uninormas en $\mathcal{U}_{\text{mín}}$

Veremos que en este caso tampoco son posibles negaciones continuas y volvemos a necesitar negaciones con $\alpha_N = 0$. En lo que sigue tomaremos U_0 una uninorma de $\mathcal{U}_{\text{mín}}$ de la forma $U_0 \equiv \langle T_0, e_0, S_0 \rangle_{\text{mín}}$ i I_{U_0} su implicación residuada (ver [6] para detalles sobre su estructura). Entonces tenemos los siguientes resultados.

Proposición 9: Sea I_{U_0} la implicación borrosa derivada de una uninorma $U_0 \equiv \langle T_0, e_0, S_0 \rangle_{\text{mín}}$, N una negación y $U \equiv \langle T_U, e, S_U \rangle$ una uninorma conjuntiva. Si I_{U_0}, N satisfacen el Modus Tollens respecto de U, entonces son ciertas las siguientes propiedades:

1. $U(N(y), y) = 0$ para todo $y \leq e_0$.
2. $\alpha_N = 0$ (es decir, $N(x) < e$ para todo $x > 0$).
3. $N(x) = 0$ para todo $x \geq e$.
4. Si $e_0 < e$, T_U es continua y $U(e_0, e_0) = e_0$, se satisface $N(x) < e_0$ para todo $x > 0$ y $N(x) = 0$ para todo $x \geq e_0$.

Para caracterizar las soluciones en este caso distinguiremos dos posibilidades según sea el orden de los elementos neutros e y e_0.

Teorema 2: Sea I_{U_0} la implicación borrosa derivada de una uninorma $U_0 \equiv \langle T_0, e_0, S_0 \rangle_{\text{mín}}$, N una negación y U una uninorma conjuntiva con elemento neutro $e = e_0$. Entonces I_{U_0}, N satisfacen el Modus Tollens respecto de U, si y sólo si se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $N(x) = 0$ para todo $x \geq e$ y $N(x) < e$ para todo $x > 0$.

2. I_{T_0} y N' satisfacen el Modus Tollens respecto de la t-norma T_U para todos $y < x$, donde I_{T_0} es la implicación residuada derivada de la t-norma T_0 y N' viene dada por la ecuación (6).

Teorema 3: Sea I_{U_0} la implicación borrosa derivada de una uninorma $U_0 \equiv \langle T_0, e_0, S_0\rangle_{\text{mín}}$, N una negación y U una uninorma conjuntiva con elemento neutro e con $e < e_0$. Supongamos que U_0 viene dada por $U_0(x,y) =$

$$\begin{cases} eT_0'\left(\frac{x}{e}, \frac{y}{e}\right) & \text{si } x,y \in [0,e] \\ e + (e_0 - e)T_0''\left(\frac{x-e}{e_0-e}, \frac{y-e}{e_0-e}\right) & \text{si } x,y \in [e,e_0] \\ e_0 + (1-e_0)S_0\left(\frac{x-e_0}{1-e_0}, \frac{y-e_0}{1-e_0}\right) & \text{si } x,y \in [e_0,1] \\ \text{mín}(x,y) & \text{en cualquier otro caso,} \end{cases}$$

siendo T_0', T_0'' t-normas. Entonces I_{U_0}, N satisfacen el Modus Tollens respecto de U, si y sólo si se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $N(x) = 0$ para todo $x \geq e$ y $N(x) < e$ para todo $x > 0$.
2. $I_{T_0'}$ y N' satisfacen el Modus Tollens respecto de la t-norma T_U para todos $y < x$, donde $I_{T_0'}$ es la implicación residuada derivada de la t-norma T_0' y N' viene dada por la ecuación (6).

Teorema 4: Sea I_{U_0} la implicación borrosa derivada de una uninorma $U_0 \equiv \langle T_0, e_0, S_0\rangle_{\text{mín}}$, N una negación y U una uninorma conjuntiva con elemento neutro e con $e_0 < e$. Supongamos que U viene dada por $U(x,y) =$

$$\begin{cases} e_0T_U'\left(\frac{x}{e_0}, \frac{y}{e_0}\right) & \text{si } x,y \in [0,e_0] \\ e_0 + (e - e_0)T_U''\left(\frac{x-e_0}{e-e_0}, \frac{y-e_0}{e-e_0}\right) & \text{si } x,y \in [e_0,e] \\ e + (1-e)S_U\left(\frac{x-e}{1-e}, \frac{y-e}{1-e}\right) & \text{si } x,y \in [e,1] \\ \text{mín}(x,y) & \text{en cualquier otro caso,} \end{cases}$$

siendo T_U', T_U'' t-normas. Entonces I_{U_0}, N satisfacen el Modus Tollens respecto de U, si y sólo si se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $N(x) = 0$ para todo $x \geq e_0$ y $N(x) < e_0$ para todo $x > 0$.
2. I_{T_0} y N' satisfacen el Modus Tollens respecto de la t-norma T_U' para todos $y < x$, donde I_{T_0} es la implicación residuada derivada de la t-norma T_0 y N' viene dada por la ecuación (6).

Nota 2: Notemos que cuando $U_0(e,e) = e$ y T_0 es continua entonces la uninorma $U_0 \equiv \langle T_0, e_0, S_0\rangle_{\text{mín}}$ viene dada como en el teorema 3, ya que entonces T_0 resulta ser suma ordinal de dos t-normas. Análogamente, la uninorma U viene dada como en el teorema 4 siempre que $U(e_0,e_0) = e_0$ y T_U sea continua.

Ejemplo 3: En el caso $e_0 < e$ consideremos por ejemplo uninormas $U_0 \equiv \langle T_0, e_0, S_0\rangle_{\text{mín}}$ y U como en el teorema 4 donde $T_0 = T_U' = T_{\mathbf{LK}}$ la t-norma de Łukasiewicz y N la negación dada por

$$N(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ e_0 - x & \text{si } 0 < x < e_0 \\ 0 & \text{si } x \geq e_0. \end{cases}$$

Con estas restricciones se satisfacen las condiciones del teorema y I_{U_0}, N satisfacen el U-Modus Tollens respecto de la uninorma U.

IV-B. RU-implicaciones derivadas de uninormas representables

No daremos en este apartado caracterizaciones generales como en el anterior, pero sí para casos concretos. En particular, veremos que en este caso sí se pueden hallar soluciones con $\alpha_N > 0$, incluso con negaciones fuertes. Concretamente, en este apartado U_0 denotará una uninorma representable de la forma $U_0 \equiv \langle e_0, h_0\rangle_{\text{rep}}$ y I_{U_0} su implicación residuada (ver [3], [6] para detalles sobre su estructura). Recordemos que entonces la función

$$N_{h_0}(x) = h_0^{-1}(-h_0(x)) \quad \text{para todo } x \in [0,1]$$

es siempre una negación fuerte que se conoce como la negación asociada a la uninorma U_0.

Teorema 5: Sea I_{U_0} la implicación borrosa derivada de una uninorma representable $U_0 \equiv \langle e_0, h_0\rangle_{\text{rep}}$, N_{h_0} su negación asociada y U una uninorma conjuntiva, continua por la izquierda con elemento neutro e. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- I_{U_0}, N_{h_0} satisfacen el Modus Tollens respecto de U.
- $I_{U_0}(x,y) \leq I_U(N_{h_0}(y), N_{h_0}(x))$ para todos $x,y \in [0,1]$.
- $U(x,y) \leq U_0(x,y)$ para todos $x,y \in [0,1]$.

Ejemplo 4: Sea $U_0 \equiv \langle e, h_0\rangle_{\text{rep}}$ una uninorma representable con elemento neutro $e \in]0,1[$. Es conocido entonces que la t-norma subyacente T_U y la t-conorma S_U son estrictas. Consideremos las uninormas de $\mathcal{U}_{\text{mín}}$ dadas por

$$U \equiv \langle T_U, e, S_U\rangle_{\text{mín}} \qquad \text{y} \qquad U' \equiv \langle \text{mín}, e, S_U\rangle_{\text{mín}}.$$

Es obvio que $U \leq U_0$ pero $U' \not\leq U_0$ y por tanto, a partir del teorema anterior, deducimos que I_{U_0}, N_{h_0} satisfacen el U-Modus Tollens respecto de U pero no respecto de U'.

IV-C. RU-implicaciones derivadas de uninormas idempotentes

Igual que en el apartado anterior, veremos que en este caso también se pueden hallar soluciones con negaciones fuertes. Concretamente, en este apartado U_0 denotará una uninorma idempotente de la forma $U_0 \equiv \langle e_0, g_0\rangle_{\text{ide}}$ y I_{U_0} su implicación residuada (ver [18] para detalles sobre su estructura). Recordemos que en este caso, para que I_{U_0} sea realmente una implicación, ha de ser $g_0(0) = 1$ aunque U_0 puede ser incluso disyuntiva.

Teorema 6: Sea N_0 una negación fuerte con punto fijo e_0, I_{U_0} la implicación borrosa derivada de una uninorma idempotente $U_0 \equiv \langle e_0, N_0\rangle_{\text{ide}}$ y U una uninorma conjuntiva, continua por la izquierda con elemento neutro e. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- I_{U_0}, N_0 satisfacen el Modus Tollens respecto de U.
- $I_{U_0}(x,y) \leq I_U(N_0(y), N_0(x))$ para todos $x,y \in [0,1]$.
- $U(x,y) \leq U_0(x,y)$ para todos $x,y \in [0,1]$.

V. Conclusiones y trabajo futuro

En los procesos de inferencia borrosa resulta imprescindible utilizar conjunciones, implicaciones (y negaciones) que satisfagan el Modus Ponens y el Modus Tollens. Aún cuando generalmente las conjunciones se modelizan mediante t-normas, cada vez es más habitual introducir también el uso de uninormas conjuntivas. En este sentido, generalizar el Modus Ponens (Tollens) respecto de una de esas uninormas se convierte en un punto interesante de estudio.

De forma similar a como se hizo para el Modus Ponens en [15]–[17], en este trabajo se realiza un estudio del Modus Tollens respecto de uninormas conjuntivas. Se dan diversas propiedades necesarias para su cumplimiento y caracterizaciones de las soluciones en diversos casos concretos. Se estudia también el caso de RU-implicaciones derivadas de uninormas de $\mathcal{U}_{\text{mín}}$, de uninormas representables y de uninormas idempotentes.

Como trabajo futuro, quedan muchos flecos por analizar, como son un estudio más exhaustivo de los casos de RU-implicaciones derivadas de uninormas representables e idempotentes, extender dicho estudio a RU-implicaciones derivadas de otros tipos de uninormas (ver [10]) y también a (U, N)-implicaciones derivadas de uninormas (ver [3]).

Acknowledgment

This paper has been partially supported by the Spanish Grant TIN2016-75404-P, AEI/FEDER, UE.

Referencias

[1] I. Aguiló, J. Suñer, J. Torrens, "A characterization of residual implications derived from left-continuous uninorms," Information Sciences, 180, 3992–4005, 2010.

[2] C. Alsina, E. Trillas, "When (S, N)-implications are (T, T_1)-conditional functions?," Fuzzy Sets and Systems, 134, 305–310, 2003.

[3] M. Baczyński, B. Jayaram, Fuzzy Implications. Studies in Fuzziness and Soft Computing, vol. 231. Springer, Berlin Heidelberg, 2008.

[4] M. Baczyński, B. Jayaram, "(U,N)-implications and their characterizations," Fuzzy Sets and Systems, 160, 2049–2062, 2009.

[5] M. Baczyński, B. Jayaram, S. Massanet, and J. Torrens, "Fuzzy implications: Past, present, and future", in Springer Handbook of Computational Intelligence, J. Kacprzyk and W. Pedrycz, Eds. Springer Berlin Heidelberg, 2015, pp. 183–202.

[6] B. De Baets, J. C. Fodor, "Residual operators of uninorms," Soft Computing 3, 89–100, 1999.

[7] J. Fodor, M. Roubens. Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.

[8] J. C. Fodor, R. R. Yager, A. Rybalov, "Structure of Uninorms," International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-based Systems, 5, 411–427, 1997.

[9] E.P. Klement, R. Mesiar, E. Pap. Triangular norms. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

[10] M. Mas, S. Massanet, D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, "A survey on the existing classes of uninorms," Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 29, 1021–1037, 2015.

[11] M. Mas, J. Monreal, M. Monserrat, J.V. Riera, J. Torrens, "Modus Tollens on fuzzy implication functions derived from uninorms," in Fuzzy Logic and Information Fusion. To Commemorate the 70th Birthday of Professor Gaspar Mayor. In the series: Studies in Fuzziness and Soft Computing, vol. 339, T. Calvo and J. Torrens, Eds. Springer, Switzerland, 2016, pp. 49–64.

[12] M. Mas, M. Monserrat, D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, "RU and (U, N)-implications satisfying Modus Ponens," International Journal of Approximate Reasoning, 73, 123–137, 2016.

[13] M. Mas, M. Monserrat, J. Torrens, "Two types of implications derived from uninorms," Fuzzy Sets and Systems, 158, 2612–2626, 2007.

[14] M. Mas, M. Monserrat, J. Torrens, E. Trillas, "A survey on fuzzy implication functions," IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 15(6), 1107–1121, 2007.

[15] M. Mas, D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, "On a generalization of the Modus Ponens: U-conditionality," in Proceedings of IPMU-2016, Part I, CCIS 610, J.P. Carvalho et al. Eds. 2016, pp. 1–12.

[16] M. Mas, D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, "On some classes of RU-implications satisfying U-Modus Ponens," in Aggregation functions in theory and in practice. In the series: Advances in Intelligent Systems and Computing, 581, V. Torra, R. Mesiar and B. De Baets, Eds. 2018, pp. 71–82.

[17] M. Mas, D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, "Generalized Modus Ponens for (U, N)-implications," in Jesús Medina, Manuel Ojeda-Aciego, José Luis Verdegay Galdeano, David A. Pelta, Inma P. Cabrera, Bernadette Bouchon-Meunier, Ronald R. Yager (Eds.), Proceedings of IPMU 2018, Part I, Communications in Computer and Information Science, vol. 853 (2018) pp. 649–660.

[18] D. Ruiz, J. Torrens, "Residual implications and co-implications from idempotent uninorms," Kybernetika 40, 21–38, 2004.

[19] D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, "Distributivity of residual implications over conjunctive and disjunctive uninorms," Fuzzy Sets and Systems, 158, 23–37, 2007.

[20] D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, "S- and R-implications from uninorms continuous in $]0, 1[^2$ and their distributivity over uninorms," Fuzzy Sets and Systems, 160, 832–852, 2009.

[21] D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, B. De Baets, J. Fodor, "Some remarks on the characterization of idempotent uninorms," in Computational Intelligence for Knowledge-Based Systems Design. Lecture Notes in Computer Science, vol. 6178, E. HÃllermeier, R. Kruse, F. Hoffmann, Eds. Springer, Berlin, Heidelberg, 2010, pp. 425–434.

[22] E. Trillas, C. Alsina, A. Pradera, "On MPT-implication functions for fuzzy logic," Revista de la Real Academia de Ciencias. Serie A. Matemáticas (RACSAM) 98(1), 259–271, 2004.

[23] E. Trillas, C. Alsina, E. Renedo, A. Pradera, "On contra-symmetry and MPT-conditionality in fuzzy logic," International Journal of Intelligent Systems, 20, 313–326, 2005.

[24] E. Trillas, C. Campo, S. Cubillo, "When QM-operators are implication functions and conditional fuzzy relations," International Journal of Intelligent Systems, 15, 647–655, 2000.

[25] E. Trillas, M. Mas, M. Monserrat, J. Torrens, "On the representation of fuzzy rules," International Journal of Approximate Reasoning, 48, 583–597, 2008.

[26] E. Trillas, L. Valverde, "On Modus Ponens in fuzzy logic," in 15th International Symposium on Multiple-Valued Logic, pp. 294–301. Kingston, Canada, 1985.

[27] R. R. Yager, A. Rybalov, "Uninorm aggregation operators," Fuzzy Sets and Systems, 80, 111–120, 1996.

Modus Ponens generalizado para (U, N)-implicaciones

Margarita Mas, Daniel Ruiz-Aguilera, Joan Torrens
Soft Computing, Procesamiento de Imágenes y Agregación (SCOPIA)
Departament de Ciències Matemàtiques i Informàtica
Universitat de les Illes Balears. 07122 Palma, España.
Institut d'Investigació Sanitària de les Illes Balears (IdISBa). 07010 Palma, España.
mmg448@uib.es, daniel.ruiz@uib.es, jts224@uib.es

***Resumen*—El Modus Ponens resulta ser una propiedad esencial en los procesos de inferencia que se llevan a cabo tanto en el razonamiento aproximado como en el control borroso. De este modo es necesario que la conjunción y la implicación borrosa utilizadas en dichos procesos de inferencia verifiquen la desigualdad inherente a la propiedad del Modus Ponens. Habitualmente la conjunción borrosa se modeliza mediante una t-norma aunque, cada vez más, se sustituye la t-norma por una uninorma conjuntiva. En este trabajo se estudia cuándo las (U, N)-implicaciones verifican el Modus Ponens respecto de una uninorma conjuntiva U en general, de forma similar a cómo se hizo para RU-implicaciones en [21], [22]. En la inecuación funcional derivada del Modus Ponens se ven involucradas dos uninormas diferentes y una negación borrosa dando lugar a diversas posibilidades. De esta manera, en esta comunicación se presenta solo un primer paso en este estudio ya que, dependiendo de las clases a las que pertenecen dichas uninormas, aparecen numerosos casos a estudiar.**

***Index Terms*—Función de implicación borrosa, (U, N)-implicación, Modus Ponens, t-norma, uninorma, negación natural asociada.**

I. Introducción

Las funciones de implicación borrosas se utilizan habitualmente en el razonamiento aproximado y en el control borroso para modelizar los condicionales borrosos y también para realizar inferencias. Cuando se considera la regla composicional de inferencia de Zadeh, el Modus Ponens resulta ser esencial en el proceso. Al trasladar dicha regla de inferencia al ámbito borroso se obtiene la desigualdad funcional:

$$T(x, I(x, y)) \leq y \quad \text{para todos} \quad x, y \in [0, 1], \qquad (1)$$

donde T es una t-norma continua e I es una función de implicación borrosa.

Debido a la importancia del Modus Ponens, diversos investigadores han ido realizando un estudio exhaustivo de aquellas t-normas T y funciones de implicación borrosas I que verifican la ecuación (1) a lo largo de los años (véase por ejemplo [2], [4], [17], [20], [30]–[33]). Los principales resultados en este campo se han dado para implicaciones derivadas de t-normas y t-conormas. Así, las implicaciones residuadas y las (S, N)-implicaciones se analizaron en detalle en [2], [30], [31], mientras que las QL y D-implicaciones se investigaron en [32]. Una recopilación de estos resultados y una completación de los mismos se puede hallar en la sección 7.4 del libro [4].

Sin embargo, existen otros tipos de implicaciones a considerar (véase [3], [4], [24]). Entre estos otros tipos podemos destacar las implicaciones derivadas de funciones de agregación más generales que las t-normas y las t-conormas. En particular, las implicaciones derivadas de uninormas se han estudiado de manera exhaustiva (véase por ejemplo [1], [5], [9], [18], [26]–[28]). De hecho, el Modus Ponens ha sido analizado recientemente para dos tipos concretos de implicaciones derivadas de uninormas: las RU-implicaciones y las (U, N)-implicaciones (véase [17]).

Aunque las uninormas se introdujeron inicialmente en el ámbito de las funciones de agregación (véase [11], [34]), se han estudiado también como operadores lógicos debido al hecho de que son siempre conjuntivas o disyuntivas. Dada su estructura, las uninormas se pueden ver claramente como generalizaciones de las t-normas y t-conormas simultáneamente y, en este sentido, se ha comprobado ya su utilidad en muchos campos como son los sistemas expertos borrosos (véase [10]), las redes neuronales (véase [6]) y la lógica borrosa en general (véase [25] y las referencias allí citadas). En particular, las uninormas conjuntivas se utilizan cada vez más como conjunciones borrosas y, en este sentido, sustituir en el Modus Ponens la t-norma T por una uninorma conjuntiva U resulta natural.

Siguiendo en esta línea, el caso de sustituir la t-norma T por una uninorma conjuntiva U, dando lugar al llamado U-Modus Ponens (o también U-condicionalidad), ha sido recientemente propuesto por los autores en [21], [22]. En estos trabajos se demuestra que la implicación considerada en el U-Modus Ponens tiene que verificar determinadas propiedades que son características de algunos tipos de implicaciones derivadas de uninormas: las RU-implicaciones y las (U, N)-implicaciones. En este sentido, el presente trabajo puede ser visto como una continuación de los artículos mencionados [21], [22] ya que, en estos artículos se investigó el U-Modus Ponens para el caso de las RU-implicaciones, mientras que en la presente comunicación hacemos lo mismo para el caso de las (U, N)-implicaciones.

El trabajo está organizado de la siguiente manera: tras la introducción, dedicamos la sección 2 a recordar algunos preliminares para lograr que el trabajo sea lo más autocontenido posible. La sección 3 está dedicada al Modus Ponens respecto

de una uninorma U, incluyendo algunos resultados generales para (U,N)-implicaciones. Se demuestra en particular que la uninorma disyuntiva U' utilizada para construir la (U,N)-implicación solo puede pertenecer a unas pocas clases de uninormas de entre las más usuales, a saber, las representables, las idempotentes y las continuas en $]0,1[^2$. Se realiza un estudio exhaustivo para el caso de uninormas representables mientras que, para los otros dos casos, se dan simplemente diversos ejemplos. Finalmente, el trabajo concluye con la sección 4 dedicada a establecer algunas conclusiones y trabajo futuro.

II. Preliminares

Supondremos que el lector está familiarizado con los resultados básicos sobre t-normas, t-conormas y negaciones (para más detalles véase [14]). Supondremos también conocidos los resultados básicos sobre implicaciones (véase [4], [20]). A continuación recordaremos solo algunos conceptos sobre uninormas que utilizaremos a lo largo del trabajo. En cualquier caso, más detalles sobre uninormas y sus clases más estudiadas pueden hallarse en el reciente artículo recopilatorio [16].

Definición 1: Una *uninorma* es una aplicación $U:[0,1]^2\to[0,1]$ asociativa, conmutativa, creciente en cada variable y tal que existe un elemento $e\in[0,1]$, llamado *elemento neutro*, tal que $U(e,x)=x$ para todo $x\in[0,1]$.

Evidentemente, una uninorma con elemento neutro $e=1$ es una t-norma y una uninorma con elemento neutro $e=0$ es una t-conorma. Para cualquier otro valor $e\in]0,1[$, la operación se comporta como una t-norma en $[0,e]^2$, como una t-conorma en $[e,1]^2$ y toma valores entre el mínimo y el máximo en el conjunto $A(e)$ dado por

$$A(e)=[0,e[\times]e,1]\cup]e,1]\times[0,e[.$$

Denotaremos de forma habitual una uninorma con elemento neutro e y t-norma y t-conorma subyacente, T y S respectivamente, por $U\equiv\langle T,e,S\rangle$. Cualquier uninorma verifica que $U(0,1)\in\{0,1\}$ y cuando $U(1,0)=0$ se dice que la uninorma U es *conjuntiva*, mientras que cuando $U(1,0)=1$ se dice que U es *disyuntiva*. Recordemos aquí la estructura de tres de las clases más usadas de uninormas conjuntivas.

Teorema 2: ([11]) Sea $U:[0,1]^2\to[0,1]$ una uninorma con elemento neutro $e\in]0,1[$.

(a) Si $U(0,1)=0$, entonces la sección $x\mapsto U(x,1)$ es continua excepto en $x=e$ si y solo si U viene dada por $U(x,y)=$

$$\begin{cases} eT\left(\frac{x}{e},\frac{y}{e}\right) & \text{si } (x,y)\in[0,e]^2,\\ e+(1-e)S\left(\frac{x-e}{1-e},\frac{y-e}{1-e}\right) & \text{si } (x,y)\in[e,1]^2,\\ \min(x,y) & \text{si } (x,y)\in A(e),\end{cases}$$

donde T es una t-norma y S es una t-conorma.

(b) Si $U(0,1)=1$, entonces la sección $x\mapsto U(x,0)$ es continua excepto en $x=e$ si y solo si U viene dada por la estructura anterior cambiando el mínimo por el máximo en $A(e)$.

Denotaremos por $\mathcal{U}_{\min}$ al conjunto de uninormas de la forma dada en (a) y por $\mathcal{U}_{\max}$ al conjunto de uninormas de la forma dada en (b). Asimismo, una uninorma de $\mathcal{U}_{\min}$ con t-norma subyacente T, t-conorma subyacente S y elemento neutro e la denotaremos por $U\equiv\langle T,e,S\rangle_{\min}$ y, de forma similar, a una uninorma de $\mathcal{U}_{\max}$ la denotaremos por $U\equiv\langle T,e,S\rangle_{\max}$.

Las uninormas idempotentes fueron analizadas primero en [7] y posteriormente caracterizadas en [8] para el caso de tener alguna continuidad lateral, y en [15] para el caso general. El resultado definitivo fue establecido en [29] como sigue.

Teorema 3: ([29]) U es una uninorma idempotente con elemento neutro $e\in[0,1]$ si y solo si existe una función decreciente $g:[0,1]\to[0,1]$, simétrica respecto de la identidad, con $g(e)=e$ y tal que $U(x,y)=$

$$\begin{cases} \min(x,y) & \text{si } y<g(x) \text{ o } (y=g(x) \text{ y } x<g^2(x)),\\ \max(x,y) & \text{si } y>g(x) \text{ o } (y=g(x) \text{ y } x>g^2(x)),\\ x \text{ o } y & \text{si } y=g(x) \text{ y } x=g^2(x),\end{cases}$$

siendo conmutativa en los puntos (x,y) tales que $y=g(x)$ con $x=g^2(x)$.

Una uninorma idempotente U con elemento neutro e y función asociada g, la denotaremos por $U\equiv\langle g,e\rangle_{\text{ide}}$ y la clase de todas las uninormas idempotentes la denotaremos por $\mathcal{U}_{\text{ide}}$. Obviamente, para esta clase de uninormas, la t-norma subyacente es siempre la t-norma mínimo y la t-conorma subyacente es siempre la t-conorma máximo.

Definición 4: Diremos que una uninorma U con elemento neutro $e\in]0,1[$ es *representable* si existe una función estrictamente creciente $h:[0,1]\to[-\infty,+\infty]$ (llamada *generador aditivo* de U, que es único salvo una constante multiplicativa $k>0$), con $h(0)=-\infty$, $h(e)=0$ y $h(1)=+\infty$, tal que U viene dada por

$$U(x,y)=h^{-1}(h(x)+h(y))$$

para todo $(x,y)\in[0,1]^2\setminus\{(0,1),(1,0)\}$ y $U(0,1)=U(1,0)=0$ o $U(0,1)=U(1,0)=1$.

Una uninorma representable con elemento neutro $e\in]0,1[$ y generador aditivo h la denotaremos por $U\equiv\langle e,h\rangle_{\text{rep}}$ y denotaremos la clase de todas las uninormas representables por $\mathcal{U}_{\text{rep}}$. Claramente, esta clase está contenida en la clase de uninormas continuas en $]0,1[^2$ que fue caracterizada en [12] (véase [16] para la versión actual y para más detalles).

Teorema 5: ([16]) Sea U una uninorma continua en $]0,1[^2$ con elemento neutro $e\in]0,1[$. Se verifica uno de los dos casos siguientes:

(a) Existen $u\in[0,e[$, $\lambda\in[0,u]$, dos t-normas continuas T_1 y T_2 y una uninorma representable R tales que U viene dada

por $U(x,y) =$

$$\begin{cases} \lambda T_1\left(\frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\lambda}\right) & \text{si } x,y \in [0,\lambda], \\ \lambda + (u-\lambda)T_2\left(\frac{x-\lambda}{u-\lambda}, \frac{y-\lambda}{u-\lambda}\right) & \text{si } x,y \in [\lambda,u], \\ u + (1-u)R\left(\frac{x-u}{1-u}, \frac{y-u}{1-u}\right) & \text{si } x,y \in]u,1[, \\ 1 & \text{si } \min(x,y) \in]\lambda,1] \\ & \text{ y } \max(x,y) = 1, \\ \lambda \text{ o } 1 & \text{si } (x,y) = (\lambda,1) \\ & \text{ o } (x,y) = (1,\lambda), \\ \min(x,y) & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases} \quad (2)$$

(b) Existen $v \in]e,1]$, $\omega \in [v,1]$, dos t-conormas continuas S_1 y S_2 y una uninorma representable R tales que U viene dada por $U(x,y) =$

$$\begin{cases} vR\left(\frac{x}{v}, \frac{y}{v}\right) & \text{si } x,y \in]0,v[, \\ v + (\omega-v)S_1\left(\frac{x-v}{\omega-v}, \frac{y-v}{\omega-v}\right) & \text{si } x,y \in [v,\omega], \\ \omega + (1-\omega)S_2\left(\frac{x-\omega}{1-\omega}, \frac{y-\omega}{1-\omega}\right) & \text{si } x,y \in [\omega,1], \\ 0 & \text{si } \max(x,y) \in [0,\omega[\\ & \text{ y } \min(x,y) = 0, \\ \omega \text{ o } 0 & \text{si } (x,y) = (0,\omega) \\ & \text{ o } (x,y) = (\omega,0), \\ \max(x,y) & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases} \quad (3)$$

Denotaremos por $\mathcal{U}_{\cos}$[1] la clase de todas las uninormas continuas en $]0,1[^2$. La subclase formada por todas aquellas de la forma (2) la denotaremos por $\mathcal{U}_{\cos,\min}$ y una uninorma concreta de esta clase la denotaremos por $U \equiv \langle T_1, \lambda, T_2, u, (R,e)\rangle_{\cos,\min}$. Análogamente, la subclase formada por las uninormas de la forma (3) será denotada por $\mathcal{U}_{\cos,\max}$ y una uninorma concreta de esta clase la denotaremos por $U \equiv \langle (R,e), v, S_1, \omega, S_2\rangle_{\cos,\max}$.

Definición 6: Una operación binaria $I : [0,1]^2 \to [0,1]$ es una *función de implicación borrosa*, o una *implicación borrosa*, si satisface:

- (I1) $I(x,z) \geq I(y,z)$ cuando $x \leq y$, para todo $z \in [0,1]$.
- (I2) $I(x,y) \leq I(x,z)$ cuando $y \leq z$, para todo $x \in [0,1]$.
- (I3) $I(0,0) = I(1,1) = 1$ e $I(1,0) = 0$.

Nótese que, de la definición, se desprende que $I(0,x) = 1$ e $I(x,1) = 1$ para todo $x \in [0,1]$ mientras que los valores simétricos $I(x,0)$ e $I(1,x)$ no se derivan de la definición.

Definición 7: Sea I una implicación borrosa. La función N_I definida por $N_I(x) = I(x,0)$ para todo $x \in [0,1]$, se llama la *negación natural* de I y es siempre una negación borrosa.

Por otra parte, existen diversas clases de funciones de implicación derivadas de uninormas. Recordamos aquí el caso de las (U,N)-implicaciones.

[1]Aquí el subíndice "cos" corresponde a las iniciales de: "*c*ontinuous *o*pen *s*quare".

Definición 8: Sea U una uninorma y N una negación borrosa. El (U,N)-*operador* derivado de U y N es la operación binaria definida por

$$I_{U,N}(x,y) = U(N(x),y) \text{ para todos } x,y \in [0,1].$$

Es conocido que, con esta definición, $I_{U,N}$ es una función de implicación borrosa si y solo si U es disyuntiva y entonces se conoce con el nombre de (U,N)-*implicación*. Algunas propiedades de las (U,N)-implicaciones han sido estudiadas para diversos tipos de uninormas entre las que destacan las ya recordadas en estos preliminares, pero también otras como las uninormas *localmente internas* o *compensatorias* y las uninormas con operadores subyacentes continuos (para más detalles véase [4], [5], [17], [19], [28]). Recientemente, el Modus Ponens respecto de una t-norma T se ha estudiado en detalle en [17] para implicaciones derivadas de uninormas.

III. U-Modus Ponens para (U,N)-implicaciones

En esta sección queremos estudiar el Modus Ponens respecto de una uninorma U, o simplemente el U-Modus Ponens, para la clase de las (U,N)-implicaciones. Empezamos estableciendo de manera formal la definición del U-Modus Ponens.

Definición 9: Sea I una implicación borrosa y U una uninorma. Diremos que I verifica el *Modus Ponens* respecto de U (o simplemente el U-Modus Ponens), o también que I es un U-*condicional* si

$$U(x,I(x,y)) \leq y \quad \text{para todos } x,y \in [0,1]. \quad (4)$$

Nuestra intención es estudiar la desigualdad anterior en el caso en que la implicación I sea una (U,N)-implicación. Es ya conocido (véase [21]) que si I y U verifican la inecuación (4), U tiene que ser necesariamente conjuntiva. Por lo tanto, en todo lo que sigue, consideraremos que U es una uninorma conjuntiva, U' es una uninorma disyuntiva y N una negación borrosa a partir de las cuales derivamos la (U,N)-implicación $I_{U',N}$. Damos primero algunas propiedades necesarias para que se verifique el U-Modus Ponens.

Proposición 10: Sea U una uninorma conjuntiva con elemento neutro $e \in]0,1[$ y U' una uninorma disyuntiva con elemento neutro $e' \in]0,1[$. Sea N una negación borrosa y sea $I_{U',N}$ la correspondiente (U,N)-implicación. Si $I_{U',N}$ verifica el U-Modus Ponens respecto de U, se verifican las siguientes propiedades:

i) $U'(N(e),y) \leq y$ para todo $y \in [0,1]$. En particular, se tiene que cumplir $N(e) \leq e'$.
ii) $U'(N(x),y) \leq e$ para todos x,y tales que $e \leq y < x$. En particular, se tiene que cumplir $U'(0,y) < e$ para todo y tal que $e \leq y < 1$.
iii) $U(x,N(x)) \leq e'$ para todo $x \in [0,1]$. En particular, si N tiene e_N como punto fijo, entonces $U(e_N,e_N) \leq e'$.
iv) La negación borrosa N verifica $N(x) < 1$ para todo $x > 0$.

La proposición anterior muestra algunas condiciones necesarias sobre las uninormas U, U' y sobre la negación N para que la correspondiente $I_{U',N}$ verifique el U-Modus Ponens. A

partir de ahora, nos restringiremos al caso en que la uninorma U' es localmente interna en la frontera, esto es, U' verifica $U'(0,y) \in \{0,y\}$ para todo $y > e'$ (véase [13], [16]). Notemos sin embargo que esta condición no es en absoluto restrictiva ya que todas las clases habituales de uninormas son localmente internas en la frontera. Eso incluye, no solo las clases recordadas en los preliminares, sino también las localmente internas y las uninormas con operadores subyacentes continuos (véase [16]).

El siguiente resultado actualiza la proposición anterior en el caso en que la uninorma U' sea localmente interna en la frontera.

Proposición 11: Sea U una uninorma conjuntiva con elemento neutro $e \in]0,1[$ y U' una uninorma disyuntiva, localmente interna en la frontera, con elemento neutro $e' \in]0,1[$. Sea N una negación continua y sea $I_{U',N}$ la correspondiente (U,N)-implicación. Si $I_{U',N}$ verifica el U-Modus Ponens respecto de U entonces:

- Se tiene que cumplir $U'(0,y) = 0$ para todo $y < 1$.
- La negación natural asociada a $I_{U',N}$ tiene que ser la negación drástica N_D dada por $N_D(x) = 0$ para todo $x > 0$.
- U' no puede ser de $\mathcal{U}_{\text{máx}}$.
- Si U' es de $\mathcal{U}_{\text{cos,máx}}$, digamos $U' \equiv \langle (R,e'), v, S_1, \omega, S_2 \rangle_{\text{cos,máx}}$, entonces se tiene que cumplir $\omega = 1$.
- Si U' es idempotente, digamos $U' \equiv \langle g', e' \rangle_{\text{ide}}$, entonces se tiene que cumplir $g'(0) = 1$.

Nota 12: A partir de la proposición anterior tenemos que la uninorma disyuntiva U' usada en la construcción de $I_{U',N}$ no puede ser cualquiera. Sin embargo, notemos que aún quedan otras posibilidades de entre las clases de uninormas consideradas en los preliminares. Concretamente, U' puede ser de cualesquiera de las siguientes clases:

- uninormas representables, o
- uninormas idempotentes con $g'(0) = 1$, o
- uninormas de $\mathcal{U}_{\text{cos,máx}}$ con $\omega = 1$, o
- uninormas de $\mathcal{U}_{\text{cos,mín}}$ con $\lambda = 0$ ($\lambda = 0$ es necesario para asegurar que la uninorma U' sea disyuntiva).

Antes de tratar con cada una de estas clases de forma separada presentamos en esta sección algunos resultados generales adicionales.

Obviamente la (U,N)-implicación $I_{U',N}$ depende completamente no solo de la uninorma U', sino también de la negación N usada en su construcción. Recordemos que ya hemos visto que la negación N no puede tomar el valor 1 en puntos $x > 0$ si queremos que se verifique el U-Modus Ponens. Por el contrario, N puede tomar el valor 0 en subintervalos no triviales como indica la siguiente proposición.

Proposición 13: Sea U' una uninorma disyuntiva en alguna de las clases descritas en la nota 12. Si $N = N_D$ es la negación borrosa drástica, entonces $I_{U',N}$ viene dada por la menor implicación borrosa posible

$$I_{U',N}(x,y) = I_0(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \text{ o } y = 1, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso,} \end{cases}$$

que verifica siempre el U-Modus Ponens respecto de cualquier uninorma conjuntiva U.

En lo que queda de sección vamos a considerar solo el caso en que la negación N sea al menos continua, que es en realidad el caso más habitual[2]. En esta situación, vemos que también se puede descartar la clase de uninormas de $\mathcal{U}_{\text{cos,máx}}$.

Proposición 14: Sea U una uninorma conjuntiva con elemento neutro $e \in]0,1[$ y U' una uninorma disyuntiva con elemento neutro $e' \in]0,1[$. Sea N una negación continua y sea $I_{U',N}$ la correspondiente (U,N)-implicación. Si $I_{U',N}$ verifica el U-Modus Ponens respecto de U entonces U' no puede ser de $\mathcal{U}_{\text{cos,máx}}$.

Recordemos que cuando la negación borrosa considerada N es continua ha de tener un punto fijo que denotaremos por e_N. En este caso tenemos hasta tres valores clave en nuestro estudio. A saber, los elementos neutros de U, U' y el punto fijo de N, es decir, e, e' y e_N respectivamente. La siguiente proposición establece la relación de orden posible entre los mismos según los casos.

Proposición 15: Sea U una uninorma conjuntiva con elemento neutro $e \in]0,1[$ y U' una uninorma disyuntiva con elemento neutro $e' \in]0,1[$. Sea N una negación continua con punto fijo e_N y sea $I_{U',N}$ la correspondiente (U,N)-implicación. Si $I_{U',N}$ verifica el U-Modus Ponens respecto de U entonces,

- Si $e' < e_N$, necesariamente se tiene que cumplir $e' < e_N < e$, y
- Si $e' = e_N$, necesariamente se tiene que cumplir $e' = e_N \leq e$.

Notemos que el caso $e' > e_N$ no está incluido en la proposición anterior. Ello es debido a que en dicho caso, no hay restricciones iniciales para la posición de e con respecto a los valores $e' > e_N$.

El siguiente paso en nuestra investigación será realizar un estudio del U-Modus Ponens para (U,N)-implicaciones derivadas de uninormas de cada una de las clases posibles teniendo en cuenta los resultados anteriores. Esto es, un caso para (U,N)-implicaciones derivadas de uninormas representables disyuntivas U', otro para las derivadas de uninormas U' de $\mathcal{U}_{\text{cos,mín}}$ con $\lambda = 0$ y otro para las derivadas de uninormas idempotentes U' con $g'(0) = 1$.

III-A. Caso en el que U' es una uninorma representable

Vamos a tratar en esta sección con uninormas disyuntivas representables del tipo $U' \equiv \langle e', h' \rangle_{\text{rep}}$. En este caso la correspondiente (U,N)-implicación derivada de U' y la negación N viene dada por

$$I_{U',N}(x,y) = h'^{-1}(h'(N(x)) + h'(y))$$

para todos $x, y \in [0,1]$, con el convenio $+\infty - \infty = +\infty$. Recordemos también que, a partir de una uninorma representable disyuntiva $U' \equiv \langle e', h' \rangle_{\text{rep}}$, se obtiene la negación

[2]Recordemos que las negaciones continuas son las más utilizadas en lógica borrosa y que contienen, en particular, a las negaciones fuertes (aquellas que son involutivas) y también a las estrictas (aquellas que son estrictamente decrecientes y continuas).

fuerte $N_{h'}(x) = h'^{-1}(-h'(x))$ para todo $x \in [0,1]$, que es usualmente conocida como la negación fuerte *asociada a* U'.

Teniendo en cuenta estas consideraciones, se pueden obtener en este caso los siguientes resultados parciales.

Proposición 16: Sea U una uninorma conjuntiva con elemento neutro $e \in]0,1[$, $U' \equiv \langle e', h' \rangle_{\text{rep}}$ disyuntiva, N una negación borrosa e $I_{U',N}$ la correspondiente (U,N)-implicación. Si $U \leq U'$ y $N \leq N_{h'}$ entonces $I_{U',N}$ verifica el U-Modus Ponens respecto de U.

En el caso en que la negación considerada N coincida con la negación fuerte asociada $N_{h'}$, la condición $U \leq U'$ se convierte en necesaria y suficiente como se ve en el siguiente resultado.

Proposición 17: Sea U una uninorma conjuntiva con elemento neutro $e \in]0,1[$, $U' \equiv \langle e', h' \rangle_{\text{rep}}$ disyuntiva, $N = N_{h'}$ la negación fuerte asociada a U' e $I_{U',N}$ la correspondiente (U,N)-implicación. Entonces $I_{U',N}$ verifica el U-Modus Ponens respecto de U si y solo si $U \leq U'$.

Damos a continuación algunos ejemplos de (U,N)-implicaciones, basadas en uninormas disyuntivas representables, que verifican el U-Modus Ponens.

Ejemplo 18: A partir de resultados anteriores podemos presentar los siguientes ejemplos de (U,N)-implicaciones que verifican el U-Modus Ponens.

i) Sea $U' \equiv \langle e', h' \rangle_{\text{rep}}$ una uninorma representable disyuntiva con elemento neutro $e' \in]0,1[$ y $N = N_{h'}$ la negación fuerte *asociada a* U'. En estos casos, es sabido que la t-norma $T_{U'}$ y la t-conorma $S_{U'}$ subyacentes son estrictas. Consideremos entonces las uninormas de $\mathcal{U}_{\text{mín}}$ dadas por

$$U_0 \equiv \langle T_{U'}, e', S_{U'} \rangle_{\text{mín}} \quad \text{y} \quad U_1 \equiv \langle \text{mín}, e', S_U \rangle_{\text{mín}},$$

donde S_U es cualquier t-conorma. Entonces resulta claro que $U_0 \leq U'$ pero en cambio $U_1 \not\leq U'$. De esta manera, a partir de la proposición 17, tenemos que $I_{U',N}$ verifica el U-Modus Ponens respecto de U_0 pero no lo verifica respecto de U_1.

ii) Tomemos en este caso la uninorma dada por $U'(x,y) =$

$$\begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \in \{(1,0),(0,1)\}, \\ \frac{xy}{(1-x)(1-y)+xy} & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Se sabe que U' es una uninorma disyuntiva representable con elemento neutro $e' = \frac{1}{2}$ y generador aditivo $h'(x) = \log\left(\frac{x}{1-x}\right)$ (ver [11]). Más aún, su negación asociada es la negación clásica $N_c(x) = 1 - x$. De este modo, si tomamos la uninorma de $\mathcal{U}_{\text{mín}}$ dada por $U(x,y) =$

$$\begin{cases} 2xy & \text{si } x,y \leq 1/2, \\ 2x + 2y - 2xy - 1 & \text{si } x,y \geq 1/2, \\ \text{mín}(x,y) & \text{en cualquier otro caso,} \end{cases}$$

podemos ver fácilmente que $U \leq U'$ y, considerando cualquier negación borrosa N tal que $N \leq N_c$, la correspondiente (U,N)-implicación $I_{U',N}$ verifica el U-Modus Ponens respecto de U (aplicando simplemente la proposición 16).

Precisamente, debido a las restricciones de espacio, en las secciones siguientes nos limitaremos a dar sendos ejemplos de (U,N)-implicaciones verificando el U-Modus Ponens, basadas en uninormas disyuntivas pertenecientes a la clase correspondiente. Dejaremos en cambio el estudio exhaustivo de estos casos para un trabajo futuro.

III-B. Caso en el que U' es una uninorma de $\mathcal{U}_{\text{cos,mín}}$ con $\lambda = 0$

Damos en este caso el siguiente ejemplo que demuestra la existencia de numerosas (U,N)-implicaciones verificando el U-Modus Ponens basadas en uninormas disyuntivas de $\mathcal{U}_{\text{cos,mín}}$ con $\lambda = 0$.

Ejemplo 19: Consideremos U' una uninorma disyuntiva de $\mathcal{U}_{\text{cos,mín}}$ con $\lambda = 0$, digamos $U' \equiv \langle 0, T, u, (R, e') \rangle_{\text{cos,mín}}$. Consideremos cualquier uninorma U de $\mathcal{U}_{\text{mín}}$ con elemento neutro $e = u$ cualquier negación borrosa continua N con punto fijo $e_N = u$ y tal que $N(x) < 1$ para todo $x > 0$. Entonces, la (U,N)-implicación derivada de U' y de N verifica siempre el U-Modus Ponens respecto de U.

III-C. Caso en el que U' es una uninorma idempotente con $g(0) = 1$

El siguiente ejemplo muestra que existen numerosas (U,N)-implicaciones que verifican el U-Modus Ponens, en este caso basadas en uninormas idempotentes disyuntivas con $g(0) = 1$.

Ejemplo 20: Consideremos una negación fuerte N con punto fijo $e \in]0,1[$ y sean U y U' las uninormas idempotentes dadas respectivamente por:

$$U(x,y) = \begin{cases} \text{mín}(x,y) & \text{si } y \leq N(x), \\ \text{máx}(x,y) & \text{si } y > N(x), \end{cases}$$

y

$$U'(x,y) = \begin{cases} \text{mín}(x,y) & \text{si } y < N(x), \\ \text{máx}(x,y) & \text{si } y \geq N(x). \end{cases}$$

Claramente tenemos que U es conjuntiva, U' es disyuntiva y la (U,N)-implicación derivada de U' y N verifica el U-Modus Ponens respecto de U.

IV. Conclusiones y trabajo futuro

El Modus Ponens es la regla borrosa básica comúnmente utilizada en el razonamiento aproximado y el control borroso para manejar inferencias borrosas. De este modo, es lógico requerir a la conjunción y a la implicación borrosas que se vayan a usar en los procesos de inferencia, que verifiquen la inecuación funcional asociada al Modus Ponens. Habitualmente, se usa una t-norma para modelizar la conjunción borrosa pero, cada vez más, se utiliza también una uninorma conjuntiva en su lugar, lo que nos lleva a considerar el llamado U-Modus Ponens.

Dicha propiedad ya ha sido estudiada para implicaciones residuadas derivadas de uninormas (RU-implicaciones) en [21], [22]. Siguiendo en la misma línea, en este trabajo hemos iniciado el estudio para (U,N)-implicaciones, es decir para

implicaciones derivadas de uninormas disyuntivas y negaciones borrosas. Hemos visto que, de entre las clases de uninormas disyuntivas más habituales, solo existen soluciones en los casos de (U, N)-implicaciones derivadas de uninormas representables, de uninormas en $\mathcal{U}_{\cos,\text{mín}}$ con $\lambda = 0$ y de uninormas idempotentes con $g(0) = 1$. Hemos dado ejemplos en cada uno de los tres casos, aunque, mientras que el caso relativo a uninormas representables ha sido resuelto con detalle, un estudio exhaustivo de los otros dos casos se ha dejado para un trabajo futuro.

Queremos especificar que como trabajo futuro, además del ya mencionado, pretendemos extender nuestro estudio a otros tipos de implicaciones como son las h y (h, e)-implicaciones recientemente introducidas en [23]. Finalmente, es nuestra intención desarrollar también un estudio similar de una generalización mediante uninormas de la regla de inferencia del Modus Tollens.

Agradecimientos: Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por el proyecto TIN2016- 75404-P AEI/FEDER, UE.

Referencias

[1] I. Aguiló, J. Suñer, J. Torrens, "A characterization of residual implications derived from left-continuous uninorms," Information Sciences, 180, 3992–4005, 2010.

[2] C. Alsina, E. Trillas, "When (S, N)-implications are (T, T_1)-conditional functions?," Fuzzy Sets and Systems, 134, 305–310, 2003.

[3] M. Baczyński, G. Beliakov, H. Bustince Sola, A Pradera, Eds., Advances in Fuzzy Implication Functions, in Studies in Fuzziness and Soft Computing, vol. 300, Springer, Berlin Heidelberg, 2013.

[4] M. Baczyński, B. Jayaram, Fuzzy Implications. Studies in Fuzziness and Soft Computing, vol. 231. Springer, Berlin Heidelberg, 2008.

[5] M. Baczyński, B. Jayaram, "(U,N)-implications and their characterizations," Fuzzy Sets and Systems, 160, 2049–2062, 2009.

[6] J.M. Benítez, J.L. Castro, I. Requena, "Are artificial neural networks black boxes?," IEEE Transactions on Neural Networks 8, 1156–1163, 1997.

[7] E. Czogala, J. Drewniak, "Associative monotonic operations in fuzzy set theory," Fuzzy Sets and Systems 12, 249–269, 1984.

[8] B. De Baets, "Idempotent uninorms," European Journal of Operational Research 118, 631–642, 1999.

[9] B. De Baets, J. C. Fodor, "Residual operators of uninorms," Soft Computing 3, 89–100, 1999.

[10] B. De Baets, J. Fodor, "Van Melle's combining function in MYCIN is a representable uninorm: an alternative proof," Fuzzy Sets and Systems 104, 133-136, 1999.

[11] J. C. Fodor, R. R. Yager, A. Rybalov, "Structure of Uninorms," International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-based Systems, 5, 411–427, 1997.

[12] S. Hu, Z. Li, "The structure of continuous uni-norms," Fuzzy Sets and Systems 124, 43–52, 2001.

[13] G. Li, H.W. Liu, "On properties of uninorms locally internal on the boundary," Fuzzy Sets and Systems 332, 116–128, 2018.

[14] E.P. Klement, R. Mesiar, E. Pap. Triangular norms. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

[15] J. Martín, G. Mayor, J. Torrens, "On locally internal monotonic operators," Fuzzy Sets and Systems 137, 27–42, 2003.

[16] M. Mas, S. Massanet, D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, "A survey on the existing classes of uninorms," Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 29, 1021–1037, 2015.

[17] M. Mas, M. Monserrat, D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, "RU and (U, N)-implications satisfying Modus Ponens," International Journal of Approximate Reasoning, 73, 123–137, 2016.

[18] M. Mas, M. Monserrat, J. Torrens, "Two types of implications derived from uninorms," Fuzzy Sets and Systems, 158, 2612–2626, 2007.

[19] M. Mas, M. Monserrat, J. Torrens, "A characterization of (U, N), RU, QL and D-implications derived from uninorms satisfying the law of importation," Fuzzy Sets and Systems 161, 1369–1387, 2010.

[20] M. Mas, M. Monserrat, J. Torrens, E. Trillas, "A survey on fuzzy implication functions," IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 15(6), 1107–1121, 2007.

[21] M. Mas, D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, "On a generalization of the Modus Ponens: U-conditionality," in Proceedings of IPMU-2016, Part I, CCIS 610, J.P. Carvalho et al. Eds. 2016, pp. 1–12.

[22] M. Mas, D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, "On some classes of RU-implications satisfying U-Modus Ponens," in Aggregation functions in theory and in practice. In the series: Advances in Intelligent Systems and Computing, 581, V. Torra, R. Mesiar and B. De Baets, Eds. 2018, pp. 71–82.

[23] S. Massanet, J. Torrens, "On a new class of fuzzy implications: h-implications and generalizations," Information Science 181, 2111–2127, 2011.

[24] S. Massanet, J. Torrens, "An overview of construction methods of fuzzy implications," in [3], pp. 1–30, 2013.

[25] G. Metcalfe, F. Montagna, "Substructural Fuzzy Logics," The Journal of Symbolic Logic 72, 834–864, 2007.

[26] D. Ruiz, J. Torrens, "Residual implications and co-implications from idempotent uninorms," Kybernetika 40, 21–38, 2004.

[27] D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, "Distributivity of residual implications over conjunctive and disjunctive uninorms," Fuzzy Sets and Systems, 158, 23–37, 2007.

[28] D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, "S- and R-implications from uninorms continuous in $]0, 1[^2$ and their distributivity over uninorms," Fuzzy Sets and Systems, 160, 832–852, 2009.

[29] D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, B. De Baets, J. Fodor, "Some remarks on the characterization of idempotent uninorms," in Computational Intelligence for Knowledge-Based Systems Design. Lecture Notes in Computer Science, vol. 6178, E. Hllermeier, R. Kruse, F. Hoffmann, Eds. Springer, Berlin, Heidelberg, 2010, pp. 425–434.

[30] E. Trillas, C. Alsina, A. Pradera, "On MPT-implication functions for fuzzy logic," Revista de la Real Academia de Ciencias. Serie A. Matemáticas (RACSAM) 98(1), 259–271, 2004.

[31] E. Trillas, C. Alsina, E. Renedo, A. Pradera, "On contra-symmetry and MPT-conditionality in fuzzy logic," International Journal of Intelligent Systems, 20, 313–326, 2005.

[32] E. Trillas, C. Campo, S. Cubillo, "When QM-operators are implication functions and conditional fuzzy relations," International Journal of Intelligent Systems, 15, 647–655, 2000.

[33] E. Trillas, L. Valverde, "On Modus Ponens in fuzzy logic," in 15th International Symposium on Multiple-Valued Logic, pp. 294–301. Kingston, Canada, 1985.

[34] R. R. Yager, A. Rybalov, "Uninorm aggregation operators," Fuzzy Sets and Systems, 80, 111–120, 1996.

Caracterizaciones y equivalencias de algunas familias de funciones de implicación borrosas generadas a partir de cópulas

Sebastia Massanet*†, Ana Pradera‡, Daniel Ruiz-Aguilera*†, Joan Torrens*†
* *Grupo de investigación en Soft Computing, Procesamiento de Imágenes y Agregación (SCOPIA)*
Departamento de Ciencias Matemáticas e Informática
Universitat de les Illes Balears, 07122 Palma, España
†*Instituto de Investigación Sanitaria de las Islas Baleares (IdISBa), 07010 Palma, España*
‡ *Departamento de Ciencias de la Computación, Arquitectura de Computadores,*
Lenguajes y Sistemas Informáticos y Estadística e Investigación Operativa
Universidad Rey Juan Carlos, 28933 Móstoles, Madrid, España
E-mails: s.massanet@uib.es, ana.pradera@urjc.es, daniel.ruiz@uib.es, jts224@uib.es

***Resumen*—Este trabajo es un resumen de los artículos [5] y [6] publicados en Fuzzy Sets and Systems para su presentación en la Multiconferencia CAEPIA'18 KeyWorks.**

***Index Terms*—Función de implicación borrosa, cópula, implicación probabilística, implicación de supervivencia, implicación S-probabilística, implicación de S-supervivencia.**

I. Resumen

La caracterización y representación de los conectivos lógicos borrosos es una de las principales líneas de investigación en el campo teórico en lógica borrosa. Como consecuencia de este estudio, se ha conseguido caracterizar de forma axiomática un gran número de familias de conectivos lógicos borrosos. Por un lado, en el campo de las funciones de agregación, se han caracterizado varias familias de t-normas y t-conormas, cópulas y uninormas, entre otros operadores. Por otro lado, hay que destacar el esfuerzo de muchos investigadores en la caracterización de las familias de funciones de implicación borrosa. Así, se han caracterizado las (S,N)-implicaciones con N una negación borrosa continua, las R-implicaciones generadas a partir de t-normas continuas por la izquierda, sus respectivas generalizaciones derivadas de uninormas, las implicaciones f y g-generadas de Yager o las h-implicaciones, entre otras. La importancia de estos operadores radica en el gran número de aplicaciones que tienen en campos tan diversos como el razonamiento aproximado, el control borroso, el procesamiento de imágenes o la minería de datos. Se pueden consultar todas estas aplicaciones, en [1] y [2].

Una de las razones por las que las funciones de implicación borrosas son tan utilizadas es la flexibilidad existente en su definición:

Definición 1: Una operación binaria $I : [0,1]^2 \to [0,1]$ se llama una *función de implicación borrosa* si satisface:

(I1) $I(x_1,y) \geq I(x_2,y)$ cuando $x_1 \leq x_2$, para todo $y \in [0,1]$.

(I2) $I(x,y_1) \leq I(x,y_2)$ cuando $y_1 \leq y_2$, para todo $x \in [0,1]$.

(I3) $I(0,0) = I(1,1) = 1$ e $I(1,0) = 0$.

Esta definición permite la existencia de una infinidad de familias de funciones de implicación borrosas. Cada una de estas familias satisface alguna propiedades adicionales que son útiles para algunas de las aplicaciones anteriormente mencionadas. De esta manera, dependiendo de la aplicación considerada, se puede escoger la función de implicación borrosa que satisface las propiedades adicionales deseables. Sin embargo, esta necesidad de disponer de un repertorio extenso de estos operadores ha tenido un efecto no deseado. En los últimos años, se han propuesto multitud de familias, algunas de una complejidad notable, cuya caracterización se desconoce. Esto ha provocado la aparición de familias, que aunque fueron presentadas como nuevas familias, después de estudiarlas en profundidad y obtener su caracterización, se demostró que tenían intersección o incluso que coincidían con familias ya conocidas. Por tanto, es de suma importancia caracterizar las familias de funciones de implicación borrosas introducidas hasta la fecha para conocer el comportamiento de cada familia y su relación con las demás.

Este ha sido el objetivo de los artículos [5] y [6]. En estos trabajos, se han caracterizado cuatro familias de funciones de implicación borrosas derivadas de cópulas y que fueron introducidas en [3] y [4] con la idea de combinar tanto la imprecisión modelada mediante los conceptos borrosos como la aleatoriedad proveniente de la teoría de probabilidades. Estas familias son las siguientes:

1) *Implicaciones probabilísticas*:

$$I_C(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ \frac{C(x,y)}{x} & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

donde C es una cópula que satisface $C(x_1,y)x_2 \geq C(x_2,y)x_1$ para todo $x_1 \leq x_2$ e $y \in [0,1]$.

2) *Implicaciones de supervivencia*:

$$I^*_C(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ \frac{x+y-1+C(1-x,1-y)}{x} & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

donde C es una cópula que satisface $C(1-x_1,1-y)x_2-C(1-x_2,1-y)x_1 \geq (1-y)(x_2-x_1)$ para todo $x_1 \leq x_2$ e $y \in [0,1]$.

3) *Implicaciones S-probabilísticas*: $\tilde{I}_C(x,y) = C(x,y) - x + 1$ donde C es una cópula.
4) *Implicaciones de S-supervivencia*: $\tilde{I}^*_C(x,y) = y + C(1-x, 1-y)$ donde C es una cópula.

Concretamente, en [5] se obtiene la caracterización de las implicaciones S-probabilísticas y de las implicaciones de S-supervivencia. En dicha caracterización, juegan un papel importante tanto el concepto de negación natural de una implicación dada por $N_I(x) = I(x,0)$, como las propiedades adicionales siguientes:

- El *principio de neutralidad por la izquierda*,

$$I(1,y) = y, \quad y \in [0,1]. \qquad (\mathbf{NP})$$

- El *2-crecimiento*,

$$I(x_2,y_1)+I(x_1,y_2) \leq I(x_1,y_1)+I(x_2,y_2), \ (\mathbf{2-IC})$$

para todo $x_1 \leq x_2$ e $y_1 \leq y_2$.

En este punto, la caracterización es la siguiente:

Teorema 2: Sea $I : [0,1]^2 \to [0,1]$ una función binaria. Entonces las afirmaciones siguientes son equivalentes:

i) I satisface **(NP)**, **(2-IC)**, $N_I(x) = N_c(x) = 1 - x$ e $I(0,y) = I(x,1) = 1$ para todo $x, y \in [0,1]$.
ii) I es una implicación material generada por una co-cópula D y la negación borrosa N_c, i.e., $I(x,y) = D(1-x,y)$.
iii) I es una implicación S-probabilística generada por una cópula C.
iv) I es una implicación de S-supervivencia generada por una cópula C'.

Además, las expresiones de D, C y C' son únicas y vienen dadas por

$$\begin{aligned} D(x,y) &= I(1-x,y), \\ C(x,y) &= I(x,y) + x - 1, \\ C'(x,y) &= I(1-x,1-y) + y - 1, \end{aligned}$$

para todo $x, y \in [0,1]$.

La relevancia de este resultado radica en el hecho que se demuestra que las familias de implicaciones S-probabilisticas y de S-supervivencia son en realidad la misma y además, coinciden con las implicaciones materiales generadas por una co-cópula y N_c. Así, cualquier futuro estudio relativo a estas implicaciones puede centrarse en una sola de estas familias y los resultados pueden ser fácilmente reescritos en términos de las otras familias.

Un estudio similar se lleva a cabo en [6] para las familias de implicaciones probabilísticas e implicaciones de supervivencia. En dicho trabajo, se obtienen las caracterizaciones de estas familias demostrando de nuevo que ambas familias coinciden. El siguiente resultado aporta dicha caracterización.

Teorema 3: Sea $I : [0,1]^2 \to [0,1]$ una función binaria. Entonces las afirmaciones siguientes son equivalentes:

i) I es una implicación probabilística derivada de una cópula C.
ii) I es una implicación de supervivencia derivada de una cópula C'.
iii) I satisface **(I1)**, **(NP)**, $I(0,y) = 1$ para todo $y \in [0,1]$, la propiedad

$$x_2 I(x_2,y_1) + x_1 I(x_1,y_2) \leq x_1 I(x_1,y_1) + x_2 I(x_2,y_2)$$

para todo $x_1 \leq x_2$ e $y_1 \leq y_2$ y

$$N_I(x) = N_{D_1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Además, las expresiones de C y C' son únicas y vienen dadas por

$$\begin{aligned} C(x,y) &= xI(x,y), \\ C'(x,y) &= x + y - 1 + (1-x)I(1-x,1-y), \end{aligned}$$

para todo $x, y \in [0,1]$.

La coincidencia de estas dos familias puede demostrarse de forma alternativa usando el concepto de cópula de supervivencia C^* que a partir de una cópula C, se construye como $C^*(x,y) = x+y-1+C(1-x,1-y)$ para todo $x, y \in [0,1]$.

Teorema 4: Sea C una cópula y sea I una función binaria. Entonces I es una implicación probabilística derivada de la cópula C si, y sólo si, I es una implicación de supervivencia derivada de la cópula C^*. Esto es, $I_C = I^*_{C^*}$ o, equivalentemente, $I_{C^*} = I^*_C$.

En resumen, las caracterizaciones obtenidas en los artículos [5] y [6] han permitido, por una parte, reducir cinco familias de funciones de implicación borrosas a dos únicas familias y por otra parte, clarificar su estructura y propiedades adicionales. Esto permitirá simplificar el estudio de dichas familias y facilitar su aplicación en cualquier campo donde las funciones de implicación borrosa han demostrado su utilidad.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por los proyectos TIN2015-66471-P, TIN2016-75404-P AEI/FEDER, UE y TIN2016-81731-REDT.

Referencias

[1] M. Baczyński and B. Jayaram. *Fuzzy Implications*, volume 231 of *Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Springer, Berlin Heidelberg, 2008.
[2] M. Baczyński, B. Jayaram, S. Massanet, and J. Torrens. Fuzzy implications: Past, present, and future. In J. Kacprzyk and W. Pedrycz, editors, *Springer Handbook of Computational Intelligence*, pages 183–202. Springer Berlin Heidelberg, 2015.
[3] P. Grzegorzewski. Survival implications. In S. Greco et al., editor, *Advances on Computational Intelligence - 14th International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems, IPMU 2012. Proceedings, Part II*, volume 298 of *Communications in Computer and Information Science*, pages 335–344. Springer, 2012.
[4] P. Grzegorzewski. Probabilistic implications. *Fuzzy Sets and Systems*, 226:53–66, 2013.
[5] S. Massanet, A. Pradera, D. Ruiz-Aguilera, and J. Torrens. From three to one: Equivalence and characterization of material implications derived from co-copulas, probabilistic S-implications and survival S-implications. *Fuzzy Sets and Systems*, 323:103–116, 2017.
[6] S. Massanet, A. Pradera, D. Ruiz-Aguilera, and J. Torrens. Equivalence and characterization of probabilistic and survival implications. *Fuzzy Sets and Systems*, 2018. Artículo en prensa. DOI=10.1016/j.fss.2018.06.014.

XIX Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy (XIX ESTYLF)

ESTYLF 2:
APLICACIONES I

Toma de decisiones a gran escala usando evaluación parcial de criterios. Caso aplicado a evaluación de conferencias

Jeronimo Duran, Rosana Montes y Francisco Herrera
Andalusian Research Institute on Data Science and Computational Intelligence, DaSCI
Universidad de Granada, Granada, España
Correos: jeronimoduran@correo.ugr.es, rosana@ugr.es, herrera@decsai.ugr.es

***Resumen*—Los eventos de divulgación son un medio de difusión muy importante para la comunidad científica, pues son esos espacios donde se dan a conocer los avances y las nuevas propuestas de investigación. El éxito de los medios de divulgación está directamente relacionado con la percepción que tienen los asistentes hacia dichos eventos. El poder evaluar estos eventos tomando en cuenta a los asistentes resulta interesante, por lo que se propone un modelo de evaluación que utiliza etiquetas lingüísticas, siendo este el recurso más adecuado para captar la opinión de los asistentes. Estos eventos, al ser masivos, se clasifica como un problema de toma de decisión a gran escala (LSGDM) que utilizan el modelo lingüístico de representación 2-tuplas para tener una toma de decisión en grupo con la mínima pérdida de información. La propuesta incluye una valoración parcial de criterios, es decir, el numero de criterios a valorar puede variar durante el proceso de toma de decisión. MULTIMOORA permite generar un ranking de alternativas, y al realizar un análisis de los rankings obtenidos, podemos identificar cuales son los indicadores que se deben tomar en cuenta para que los eventos de divulgación tengan éxito, y se genere un plan de mejora continua de dichos eventos.**

I. Introducción

La evaluación de eventos de divulgación científica ha sido abordada en la literatura especializada teniendo en cuenta indicadores que se obtienen a priori o a posteriori de dicho evento. Es habitual la clasificación de conferencias como CORE A, CORE B o CORE C, como el que otorga *The CORE Conference Ranking* [1]. Como propuesta para evaluar conferencias científicas de forma automática [1] [2], se puede tomar en cuenta el número de citas de los trabajos publicados en sus actas, el prestigio de la conferencia, el ratio de aceptación o la reputación de los miembros del comité del programa entre otros factores. Por otro lado, charlas, talleres y seminarios –que también son eventos divulgativos– no entran dentro del anterior esquema de evaluación basados en publicaciones de actas, pero cuentan con otros indicadores de evaluación como el número de asistentes, la reputación de los ponentes y la claridad de la charla entre otros. El conocer durante el transcurso del evento cuales son su fortalezas y debilidades, genera información de gran valor para los organizadores y permitiría que las ediciones futuras sean de mejor calidad y aceptación.

En la actualidad se está implementado una nueva tipología de proyectos científicos, en donde se hace partícipe a la ciudadanía, quienes aportan a las actividades de investigación científica esfuerzo intelectual, herramientas y recursos propios. El concepto que define lo anterior se conoce como Ciencia Ciudadana (CC)[2]. Este tipo de proyectos de investigación potencian la difusión de sus resultados y la participación a gran escala de la sociedad. Para la evaluación de eventos de divulgación científica en ciencia ciudadana se deben considerar otros factores (diferentes a los usados tradicionalmente), como por ejemplo aquellos criterios de calidad que resultan interesantes para los propios asistentes.

Frecuentemente las instituciones educativas realizan actividades de divulgación académica como conferencias y seminarios, cuya temática va acorde a las carreras que se ofertan en cada centro. Estos eventos no son evaluados en su mayoría, por lo que se desconoce el grado de aceptación por parte de la comunidad universitaria. Es importante el saber cuál es el grado de satisfacción que tiene la comunidad universitaria que asiste a este tipo de eventos, por lo que el contar con una herramienta que les permita recopilar la opinión de los asistentes es de gran importancia.

En todos los casos anteriores (conferencias, seminarios, eventos de ciencia ciudadana) se debe tomar en cuenta la opinión de los asistentes, pues son ellos quieres emiten su punto de vista sobre el evento y realizan la labor de publicitar dichos eventos dentro y fuera de las instituciones. Al emitir su valoración de una charla, están asignado valores a los indicadores definidos en un modelo de evaluación, siendo ésta un área de oportunidad para diseñar un modelo lingüístico de evaluación [3] que recoja esas valoraciones y permita emitir una valoración lingüística del éxito o fracaso del evento. Puesto que potencialmente se puede tener un número elevado de participantes, el modelo lingüístico se debe resolver como un Large Scale Group Decisión Making (LSGDM).

El presente trabajo propone que en la evaluación de un evento los participantes determinen cuales son los criterios más importantes de acuerdo con su punto de vista así como la escala lingüística con la que desean evaluar dichos criterios.

[1] http://www.core.edu.au/conference-portal

[2] http://www.ibercivis.es/informe-del-observatorio-de-la-ciencia-ciudadana-2017/

El uso de un enfoque lingüístico difuso facilita la expresión de una opinión pues permite utilizar lenguaje natural.

El documento se estructura de la siguiente forma. En la Sección II se describen de manera breve los modelos utilizados en el diseño de nuestra propuesta de evaluación parcial de criterios. La Sección III de forma descriptiva desarrolla el modelo propuesto y se ejemplifica con un caso de uso. Las conclusiones y trabajos futuros se exponen en Sección IV.

II. Preliminares

Se proporcionan las definiciones formales de los modelos representación de la información lingüística, representación lingüística de 2-tupas y la técnica de resolución de toma de decisión MULTIMOORA.

A. Toma de decisión dinámica a gran escala

El uso de modelos de toma de decisiones a gran escala (Large Scale Group Decision Making, LSGDM) [4] se ha enfocado como la simplificación de las opiniones de un gran grupo de expertos, tomados en muestras más pequeñas y tratando de conservar la heterogeneidad en sus opiniones. Tras realizar la agrupación o *clustering* [5], se les presenta el conjunto de alternativas que son evaluadas en este caso mediante relaciones de preferencia difusa. En la literatura se propone la elección dinámica de alternativas [6] [7], en donde se realiza un consenso entre expertos para determinar el o los criterios que serán añadidos o eliminados del sistema de evaluación o de toma de decisiones. Son propuestas interesantes que pueden ser incorporadas al modelo de evaluación de eventos propuesto, Al contar con un gran volumen de participantes en los eventos, se tiene un problema de toma de decisión a gran escala, en donde para poder determinar el grado de aceptación de los participantes se trabajará mediante *clusters* de preferencia.

B. Representación de la información lingüística

Una jerarquía lingüística (Linguistic Hierarchies, LH [8] se define como la unión de un conjunto de términos lingüísticos equidistantes entre si, cuya granularidad de incertidumbre es impar; éstos se representan en niveles $n(t)$, donde t es un nivel válido de jerarquía.

$$LH = \cup_t \; S^{n(t)}(t), \;\; t \in \{1,\ldots,h\} \quad h = 3$$
$$S^{n(t)}(t) = \{s_0^{n(t)},\ldots,s_{\nu_t}^{n(t)}\} \quad \nu_t = n(t)-1, \;\; \nu_t \in \mathbb{N}.$$

Para realizar las transiciones entre cada uno de los niveles sucesivos, el término $S^{n(t+1)}$ es definido por el punto medio de cada par de términos que pertenecen al nivel t anterior. los conjunto de etiquetas antiguo son utilizados como puntos de referencia. El conjunto conformado por los puntos de referencia t se define como:

$$FP_t = \{fp_t^0,\ldots,fp_t^{2\nu_t}\}$$

Las reglas básicas de la jerarquías lingüísticas cuentan con limitantes, que no permiten trabajar bajo contextos que utilizan conjuntos de términos con 5, 7 y 9 etiquetas. Las jerarquías lingüísticas extendidas (Extended Linguistic Hierarchies, ELH) [9] es un modelo que permite utilizar conjuntos de términos con $\nu_1 = 5$, $\nu_2 = 7$ y $\nu_3 = 9$ valores y admite la representación lingüística 2-tuplas para evitar la pérdida de información. Es un modelo en donde se tiene un conjunto términos lingüísticos $S^{n(t)}(t)$ ordenado según su granularidad $n(t)$. Cada conjunto corresponde a un nivel t, quien realizará una transición entre los niveles sucesivos.

En éste nuevo conjunto de términos lingüísticos con t^* (nivel donde van los cálculos) se mantienen los puntos de referencia definidos en LH.

$$n(t^*) = \left(\prod_{t=1}^{h} \nu_t\right) + 1 = \nu_{t^*} + 1$$

Es posible simplificar el término $n(t^*)$, calculando el mínimo común múltiplo (MCM) del valor de las granularidades del conjunto de términos en el ELH de la siguiente forma:

$$n(t^*) = LCM(\nu_1,\nu_2,\nu_3)+1 = LCM(2,4,6)+1 = 13$$

La expresión anterior nos muestra que los cálculos realizados pertenecen a S^{13}, que corresponde al MCM común entre los términos. En el EHL cada punto $fp_{t^*}^i \in [0,1]$ se localiza en:

$$j = \frac{i \cdot \nu_{t^*}}{\nu_t} \rightarrow FP_t \subset FP_{t^*} \;\; \forall t = \{1,\ldots,h\}$$

El uso de múltiples escalas lingüísticas no modifica el esquema de toma de decisión, solamente agrega un paso de *Unificación*. En el proceso de unificación, se traducen los datos lingüísticos de entrada mediante una función TF_{t*}^t que transforma y convierte un término $s_j \in S^{n(t)}$ en su equivalente s_k expresado en $S^{n(t^*)}$ con $t < t^*$. De ésta forma se tiene la representación de cualquier valor del conjunto de términos lingüísticos. La función de transformación que se utiliza en la unificación esta dada por:

$$TF_{t^*}^t(s_j^{n(t)},\alpha_j) = \Delta\left(\frac{\nu^{-1}(s_j^{n(t)},\alpha_j)\cdot(n(t^*)-1)}{n(t)-1}\right) = (s_k^{n(t^*)},\alpha_k) \quad (1)$$

Como ejemplo de unificación para datos procedentes de distintas escalas tenemos:

$$n(1)=3\,;(s_1^3,0) \Rightarrow TF_{13}^3 = \Delta(\tfrac{1\cdot 12}{2}) = (s_6^{13},0)$$
$$n(2)=5\,;(s_3^5,0) \Rightarrow TF_{13}^5 = \Delta(\tfrac{3\cdot 12}{4}) = (s_9^{13},0)$$
$$n(3)=7\,;(s_4^7,0) \Rightarrow TF_{13}^7 = \Delta(\tfrac{4\cdot 12}{6}) = (s_8^{13},0)$$

De ésta forma ya se puede trabajar con datos homogéneos, independientemente de que su representación original sea en una escala diferente.

C. Representación lingüística de 2-tuplas

La 2-tuplas [10] (s_i, α) es la representación de un término lingüístico $s_i \in S = \{s_0, \ldots, s_g\}$ válido para cálculos en procesos de computación.

1) Sea $s_i \in S$ un término lingüístico cuya semántica es proporcionada por una función de membresía difusa.
2) Sea $\alpha \in [-0.5, 0.5)$ el valor de *traducción simbólica* que indica la función de membresía difusa que representa el término mas cercano, cuando $s_i \in S$ no coincide de forma exacta con la información lingüística calculada.
3) Los cálculos que se realizan de manera simbólica, operan con los índices de los términos lingüísticos y obtiene un valor $\beta \in [0, g]$.

La transformación de un termino lingüístico $s_i \in S$ en un término lingüístico 2-tuplas, se realiza añadiendo a la traducción simbólica del término lingüístico un cero:

$$s_i \in S \longrightarrow (s_i, 0)$$

Sea (s_i, α) un valor lingüístico 2-tuplas. Se tiene una función Δ^{-1} que traduce un término 2-tuplas en un número $\beta \in [0, g]$:

$$\begin{array}{l} \Delta^{-1} : S \times [-0.5, 0.5) \rightarrow [0, g] \\ \Delta^{-1}(s_i, \alpha) \;=\; i + \alpha \;=\; \beta \end{array} \tag{2}$$

Sea $\beta \in [0, g]$ el resultado de un cálculo simbólico. El término equivalente 2-tupas se obtiene mediante la función Δ definida como:

$$\begin{array}{l} \Delta : [0, g] \rightarrow S \times [-0.5, 0.5) \\ \Delta(\beta) \;=\; (s_i, \alpha),\ con \begin{cases} s_i & i = round(\beta), \\ \alpha = \beta - i \end{cases} \end{array} \tag{3}$$

Donde *round* es la función que asigna el entero más cercano $i \in \{0, 1, \ldots, g\}$ o puede ser utilizado como operador de redondeo, s_i denomina la etiqueta cuyo índice es el mas cercano al valor β y el valor de la traslación simbólica esta representada por α.

Sea $x = \{(s_1, \alpha_1), \ldots, (s_n, \alpha_n)\}$ un conjunto de valores lingüísticos representados como 2-tuplas, W un vector de ponderación $\{w_i | i = 1, \ldots, n\}$, y W' su versión normalizada como $\sum_{i=1}^{n} w_i' = 1$. Tenemos la media aritmética ponderada $\bar{x}^e$ definida como:

$$\bar{x}^e(x) = \Delta\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta^{-1}(s_i, \alpha_i) \cdot w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}\right) = \Delta\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \beta_i w_i'\right). \tag{4}$$

D. MULTIMOORA 2-tuplas

El método ITL-MULTIMOORA [11] permite la solución de problemas de toma de decisión y ha sido aplicado con información lingüística 2-tuplas intervaluar, que permite representar datos complejos o incompletos. En nuestra propuesta lo hemos adaptamos para el uso 2-tuplas.

El método MULTIMOORA parte de valoraciones lingüisticas de expertos P_k $(k = 1, 2, ..., p)$, A_i $(i = 1, 2, ..., m)$ alternativas y n criterios de evaluación $C_j (j = 1, 2, ..., n)$.

Para desarrollar el MULTIMORA se parte de una de matriz de decisión como la siguiente:

$$X_k = \begin{bmatrix} x_{11}^k & x_{12}^k & \ldots & x_{1n}^k \\ x_{21}^k & x_{22}^k & \ldots & x_{2n}^k \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ x_{m1}^k & x_{m2}^k & \ldots & x_{mn}^k \end{bmatrix}$$

En $x_{ij}^k \in S$, donde $S = \{s_i | i = 0, 1, 2, \ldots, g\}$ representa la evaluación lingüística de A_i con respecto al criterio C_j dado por el experto P_k. Sea W_j los pesos proporcionados por cada uno de los expertos, donde w_j^k es un valor de peso asignada a C_j por P_k.

El modelo ITL-MULTIMOORA se desarrolla en los siguientes pasos:

Paso 1 Se convierten la matrices de decisión $X_k = (x_{ij}^k)_{m \times n}$ a matrices de decisión lingüística 2-tuplas:

$$\tilde{R}_k = (\tilde{r}_{ij}^k)_{m \times n} = \left((x_{ij}^k, 0)\right)_{m \times n} \text{ donde } \; x_{ij}^k \in S.$$

Paso 2 Se calculan la normalización para las P matrices $\tilde{R}_k' = (\tilde{r}_{ij}')_{m \times n}$. Utilizando la siguiente expresión

$$\tilde{r}_{ij}' = \frac{w_j, (\Delta^{-1}(r_{ij}^k, 0))}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} (\Delta^{-1}(r_{ij}^k, 0))}} \tag{5}$$

Paso 3 Para mejorar el proceso, se incorporan las evaluaciones de los expertos cuando es el caso de maximizar, y se sustraen cuando el caso es minimizar los criterios asociados a cada alternativa:

$$\tilde{y}_i = \sum_{j=1}^{q} \tilde{r}_{ij}' - \sum_{j=q+1}^{n} \tilde{r}_{ij}' \tag{6}$$

donde $j = 1, 2, \ldots, q$ son los criterios que serán maximizados, $j = q+1, q+2, \ldots, n$ son los valores que serán minimizados y $\tilde{y}_i$ es la evaluación general de la alternativa A_i con respecto a todos los criterios evaluados.

Paso 4 La utilidad global que tiene la i-ésima alternativa se puede expresar de la siguiente forma:

$$\tilde{u}_i = \tilde{a}_i / \tilde{b}_i \tag{7}$$

donde $\tilde{a}_i = \prod_{j=1}^{q} \tilde{r}_{ij}'$ denota el producto del j-ésimo criterio que van a maximizarse , y $\tilde{b}_i = \prod_{j=q+1}^{n} \tilde{r}_{ij}'$ que es el producto de criterios serán minimizados, siendo $n - q$ el número de criterios que han de ser minimizados.

Paso 5 El *ranking* de alternativas es dado por $\tilde{y}_i$ y $\tilde{u}_i$ para $i = 1, 2, \ldots, m$ en orden descendente.

III. Toma de decisiones a gran escala usando evaluación parcial de los criterios

Se propone un modelo de evaluación de charlas partiendo del concepto de LSGDM en donde nuestros grupos de expertos serán los asistentes a las charlas impartidas. Se les dará a elegir de un conjunto de criterios y escalas de evaluación, que serán las escalas lingüísticas de nuestro problema de toma de decisiones multi-experto multi-criterio, para que después emitirán su valoración sobre la charla usando la escala y los criterios previamente seleccionados por ellos.

A. Metodología MULTIMOORA con evaluación parcial de criterios

Dentro del marco del Seminario Herramientas en Tecnologías Orientadas a la Educación, celebrado del 19 al 21 de junio de 2018 en donde participaron ponentes de la Universidad de Granada y la Universidad de Guadalajara, los cuales dieron una serie de charlas (a_1, a_2, a_3) cuya finalidad era difundir información relevante en el ámbito educativo. Las charlas fueron dirigidas a la comunidad universitaria en general, teniendo como número máximo de asistentes 33; la concurrencia en cada una de las charlas fue variada, pero un gran número de los asistentes tuvieron una presencia constante. Al finalizar cada charla se les proporcionó un formulario en donde opinarían sobre tres aspectos del programa: ponente, contenidos y evento. Cada uno constaba de diferentes criterios los cuales serian elegidos por cada uno de los asistentes.

La finalidad de que los asistentes seleccionaran cuales eran los criterios más importantes de acuerdo con su juicio es identificar el peso que los asistentes les dan a cada criterio de forma individual. Dicha elección también nos proporciona información sobre que aspecto es el que más se valora. Además, se les proporcionó un espacio para que ellos pudieran agregar otros criterios diferentes a los proporcionadas en el formulario.

Durante el ejercicio se pudieron detectar nuevos criterios de evaluación que no se habían tomado en cuenta pero que si fueron considerados por la audiencia. Criterios como: Facilidad de palabra en el *cluster* de ponente, Exponer ideas, Aplicabilidad, Ejemplos prácticos y Tema en el *cluster* de contenidos, y Lugar/sala, y Ruido en el *cluster* de evento, los cuales se agregaron al esquema de evaluación final.

Finalmente los criterios de evaluación asignados a los *clusters* principales tomados para ésta propuesta fueron los siguientes:

1) Ponente: Vocalización (C_1), Claridad de las expresiones (C_2), Cercanía (C_3), Dominio del tema (C_4), Atención a la audiencia (C_5) Facilidad de palabra (C_6).
2) Contenidos: Calidad del contenido (C_7), Claridad de las transparencias (C_8), Adaptado al nivel (C_9), Exponer ideas (C_{10}), Aplicabilidad (C_{11}), Ejemplos prácticos (C_{12}), Tema (C_{13}).
3) Evento: Duración (C_{14}), Medios técnicos (C_{15}), Iluminación (C_{16}), Temperatura (C_{18}), Lugar/sala (C_{17}), Ruido (C_{19})

Dentro del mismo formulario se les proporcionaban tres escalas de evaluación: S^3=$\{$*poco, normal, mucho*$\}$, S^5=$\{$*poco, regular, normal, algo, mucho*$\}$, S^7=$\{$*nada, muy poco, regular, normal, algo, bastante, muchísimo*$\}$, y un espacio para que ellos pudieran proponer una escala diferente a las listadas.También se les proporciono la posibilidad de elegir la escala que ellos consideraran era la más adecuada para evaluar cada uno de los criterios. En su mayoría, los asistentes prefirieron utilizar la escala S^5 para valorar los ítems de su preferencia siendo el 62% del total. Seguido de la escala S^7 con el 25% y al final la escala S^3 con el 13%.

Al final, y de forma individual, se evaluaron cada una de las charlas con los criterios y escalas elegidos. El modelo MULTIMOORA nos permite generar un ranking con los criterios elegidos por los asistentes, permitiendo que nos muestre cuales son aquellas charlas que tienen una mejor aceptación por parte de los asistentes. Éste ranking se obtiene por medio de índices de ordenación, los cuales se calculan conforme a los pasos descritos en la Sección II-D.

B. Valoraciones obtenidas

Una vez recopilada y concentrada toda la información obtenida de la evaluación de cada una de las charlas, se comenzó con el proceso descrito en la Sección II-D. Se unifican las escalas, $s_k \in S^13$ utilizando Eq.(1), quedando simplificada de la siguiente forma:

$$TF^t_{t^*}(s_j^{n(t)}) = s_j^{n(t^*)} = s_k \tag{8}$$

En la Tabla IV se pueden observar todas las valoraciones obtenidas de las charlas proporcionadas por cada uno de los participantes. En ésta Tabla las valoraciones se encuentran unificados en la escala S^{13} tras la aplicación de Eq.(8).

Posteriormente los valores se transformaron en 2-tuplas y se realizó una agregación por experto usando peso uniforme. El resultado puede verse en la Tabla I.

Para el paso de normalización se requiere el cálculo previo de los pesos para los criterios como sigue:

$$\begin{aligned} & w_j = \textstyle\sum_i \delta(s_{ij}) \\ & con\ \delta(s_{ij}) = \begin{cases} 1 \text{ si existe } s_{ij} \\ 0 \text{ si no existe } s_{ij} \end{cases} \end{aligned} \tag{9}$$

La Tabla III muestras las valoraciones normalizadas que son expresadas sin dimensiones. La aplicación del método MULTIMOORA continua con la obtención de dos índices para cada una de las alternativas, índices que se utilizan para obtener un *ranking*. Los elementos mejor posicionados en el *ranking* están representados en la Tabla II. Para determinar las posiciones y mostrar la mejor opción se utilizó la teoría del dominio (*the theory of dominance* [12] en donde se comparan los ranking obtenidos (a, b, c). a¡b¡c, d-a-a es generalmente dominante que c-b-b, a-d-a es generalmente dominante que b-c-b, a-a-a es generalmente dominante que b-b-c.

El ranking que se obtuvo nos muestra que la alternativa a_1 es la que tiene mejor posicionamiento tiene con respecto a

A	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}	C_{16}	C_{17}	C_{18}	C_{19}
a_1	$(s_{12}, 0)$	$(s_9, -.33)$	$(s_{12}, 0)$	$(s_{11}, .22)$	$(s_{11}, .5)$	$(s_0, 0)$	$(s_{11}, .28)$	$(s_{12}, 0)$	$(s_{10}, .25)$	-	-	-	$(s_{12}, 0)$	$(s_9, .25)$	$(s_{10}, .33)$	-	-	-	-
a_2	$(s_9, .43)$	$(s_{10}, .46)$	$(s_8, 0)$	$(s_{11}, -.37)$	$(s_{10}, .5)$	$(s_{12}, 0)$	$(s_{11}, .47)$	$(s_{10}, 0)$	$(s_{10}, .19)$	$(s_{12}, 0)$	$(s_{12}, 0)$	$(s_6, 0)$	$(s_{11}, .5)$	$(s_8, -.4)$	$(s_9, .22)$	$(s_9, 0)$	$(s_2, 0)$	$(s_5, 0.12)$	$(s_0, 0)$
a_3	$(s_{10}, -.16)$	$(s_9, -.30)$	$(s_9, -.19)$	$(s_{11}, -.05)$	$(s_{10}, -.28)$	-	$(s_{10}, -.43)$	$(s_7, 0)$	$(s_{10}, -.42)$	-	-	-	-	$(s_7, .45)$	$(s_{10}, .14)$	-	-	$(s_6, 0)$	-

TABLE I

Matriz de 2-tuplas con las valoraciones por alternativa.

A	$\tilde{y}_i$	$\tilde{u}_i$	Valoración Media	Orden
a_1	2.60	0	$(s_{11}, 0.318)$	1
a_2	2.46	0	$(s_9, 0.428)$	3
a_3	2.31	0	$(s_9, -0.116)$	2

TABLE II

Resultado de la utilidad $\tilde{y}_i$ y el desempeño $\tilde{u}_i$ de cada alternativa, necesarios para determinar el ranking.

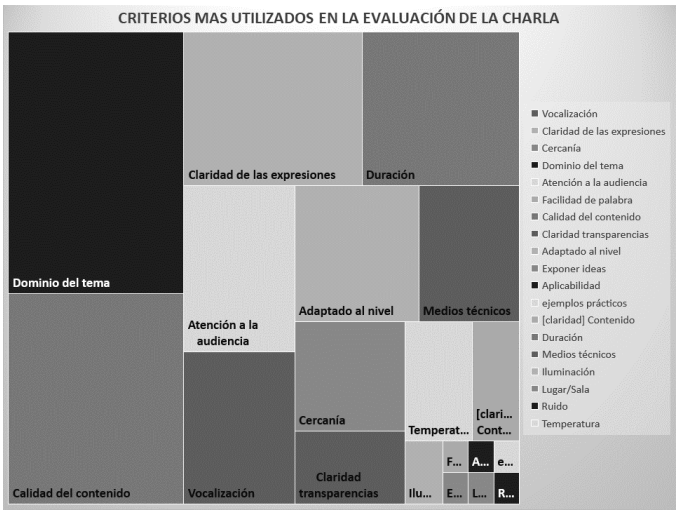


Fig. 1. Distribución de preferencia sobre los criterios a evaluar

las otras dos opciones. En donde los criterios elegidos por los asistentes, pertenecientes a diferentes *clusters*, tuvieron valores altos en comparativa con las alternativas a_2 y a_3. Para obtener información con la mínima pérdida, se utilizó el valor α proporcionado por la representación lingüística 2-tuplas, el cual nos facilito el posicionamiento en el ranking de aquellas opciones que se encontraban en la misma escala (s_9), cómo fué el caso de las alternativas a_2 y a_3, siendo la segunda mejor opción a_3 cuyo valoración es la mas cercana a la etiqueta del conjunto unificado.

Es importante resaltar que una mayor parte de los asistentes a las conferencias prefirieron seleccionar y evaluar criterios relacionados con los ponentes, los cual nos represento un 47.94% del total de las valoraciones obtenidas; en cuanto a los contenidos se obtuvo un 27.61% y para el evento 19.68% del total de las valoraciones. La Fig. 1 nos muestra en que proporción fueron elegidos cada uno de los criterios sin tomar en cuenta los *clusters*, siendo el criterio Dominio del tema (C_4) el que fue elegido por un gran número de asistentes.

IV. Conclusión

Los resultados que se obtuvieron al evaluar las charlas del seminario del caso de uso, nos mostraron que la evaluación de una charla no siempre encaja en los métodos tradicionales. El diseñar un modelo en donde se utilicen etiquetas lingüísticas, para que los asistentes puedan expresar su incertidumbre con semántica difusa, puede ayudar a crear un plan de mejora continua de los eventos de divulgación. Tomando en cuenta el auge que está teniendo la CC, se debe considerar que las opiniones sobre las charlas saldrán de la ciudadanía, por tal motivo el instrumento de evaluación le debe permitir cierto grado de libertad para que el decida cuales son los criterios de mayor importancia al momento de expresar su valoración.

Para trabajo futuros, se buscará diseñar alguna aplicación móvil que recoja éstas valoraciones y puedan ser incorporadas a un modelo de evaluación de CC.

Agradecimientos

Este trabajo fue parcialmente apoyado por el proyecto de investigación TIN2017-89517-P del Ministerio de Economía.

References

[1] W. Martins, M. Gonçalves, A. Laender, and G. Pappa, "Learning to assess the quality of scientific conferences: A case study in computer science," 2009, pp. 193–202.

[2] O.-S. Loizides and P. Koutsakis, "On evaluating the quality of a computer science/computer engineering conference," *Journal of Informetrics*, vol. 11, no. 2, pp. 541–552, 2017.

[3] C. Mi, X. Shan, Y. Qiang, Y. Stephanie, and Y. Chen, "A new method for evaluating tour online review based on grey 2-tuple linguistic," *Kybernetes*, vol. 43, no. 3, pp. 601–613, 2014.

[4] S. Alonso, I. Pérez, F. Cabrerizo, and E. Herrera-Viedma, "A fuzzy group decision making model for large groups of individuals," 2009, pp. 643–648.

[5] A. K. Jain, M. N. Murty, and P. J. Flynn, "Data clustering: A review," *ACM Comput. Surv.*, vol. 31, no. 3, pp. 264–323, 1999.

[6] I. J. Perez, F. J. Cabrerizo, and E. Herrera-Viedma, "A mobile decision support system for dynamic group decision-making problems," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part A: Systems and Humans*, vol. 40, no. 6, pp. 1244–1256, 2010.

[7] I. Pérez, F. Cabrerizo, and E. Herrera-Viedma, "Group decision making problems in a linguistic and dynamic context," *Expert Systems with Applications*, vol. 38, no. 3, pp. 1675–1688, 2011.

[8] F. Herrera and L. Martinez, "A model based on linguistic 2-tuples for dealing with multigranular hierarchical linguistic contexts in multi-expert decision-making," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, vol. 31, no. 2, pp. 227–234, 2001.

[9] E. Macarena, L. Jun, and M. Luis, "An extended hierarchical linguistic model for decision making problems," *Computational Intelligence*, vol. 27, no. 3, pp. 489–512, 2011.

[10] F. Herrera and L. Martínez, "A 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words," *IEEE Transactions on fuzzy systems*, vol. 8, no. 6, pp. 746–752, 2000.

[11] H.-C. Liu, J.-X. You, C. Lu, and M.-M. Shan, "Application of interval 2-tuple linguistic multimoora method for health-care waste treatment technology evaluation and selection," *Waste Management*, vol. 34, no. 11, pp. 2355–2364, 2014.

[12] W. Brauers and E. Zavadskas, "Robustness of multimoora: A method for multi-objective optimization," *Informatica*, vol. 23, no. 1, pp. 1–25, 2012.

A	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}	C_{16}	C_{17}	C_{18}	C_{19}
a_1	0.22	0.28	0.15	0.54	0.21	0	0.43	0.10	0.18	-	-	-	0.07	0.23	0.14	-	-	-	-
a_2	0.15	0.28	0.10	0.57	0.19	0.01	0.42	0.08	0.18	0.01	0.01	0.005	0.065	0.223	0.132	0.023	0.001	0.043	0
a_3	0.189	0.280	0.122	0.558	0.209	-	0.425	0.062	0.194	-	-	-	-	0.174	0.148	-	-	0.053	-

TABLE III
Normalización de las valoraciones.

A	P	LTS	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}	C_{16}	C_{17}	C_{18}	C_{19}
a_1	p_1	S^5	-	s_9	-	s_{12}	-	-	s_{12}	-	s_6	-	-	-	-	s_{12}	-	-	-	-	-
a_1	p_2	S^3	s_{12}	-	-	s_{12}	s_6	-	s_{12}	-	-	-	-	-	-	s_6	-	-	-	-	-
a_1	p_3	S^3	s_{12}	-	-	s_{12}	s_{12}	-	s_{12}	-	-	-	-	-	-	-	s_{12}	-	-	-	-
a_1	p_4	S^5	-	s_9	-	s_9	-	-	s_9	-	s_9	-	-	-	-	-	s_9	-	-	-	-
a_1	p_5	S^5	s_{12}	-	-	s_{12}	-	-	-	-	s_{12}	-	-	-	-	s_9	-	-	-	-	-
a_1	p_6	S^3	-	s_{12}	-	s_{12}	s_{12}	-	s_{12}	-	s_{12}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
a_1	p_7	S^7	-	s_{12}	-	s_{10}	s_{12}	-	s_{10}	s_{12}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
a_1	p_8	S^7	-	s_6	-	s_8	-	-	s_8	-	-	-	-	-	-	s_8	s_8	-	-	-	-
a_1	p_9	S^7	-	s_8	s_{12}	s_{10}	-	-	-	s_{12}	-	-	-	-	s_{12}	-	-	-	-	-	-
a_2	p_1	S^5	s_9	s_6	-	s_{12}	-	-	s_{12}	-	-	-	-	-	-	-	s_{12}	-	-	-	-
a_2	p_2	S^3	s_6	-	s_0	-	-	-	s_{12}	-	-	-	-	-	-	s_6	-	s_{12}	-	-	-
a_2	p_3	S^5	-	s_{12}	-	s_{12}	s_9	-	s_{12}	-	-	-	-	-	-	s_9	-	-	-	-	-
a_2	p_4	S^7	-	s_{10}	-	s_{12}	s_8	-	s_8	-	-	-	-	-	-	-	s_4	-	-	-	-
a_2	p_5	S^5	-	-	s_9	s_{12}	-	-	-	-	s_9	-	-	-	-	-	s_3	s_3	-	-	-
a_2	p_6	S^5	-	s_9	s_6	s_{12}	s_6	-	s_{12}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
a_2	p_7	S^7	-	s_{12}	s_{12}	-	-	-	s_{12}	-	-	-	-	-	-	s_{10}	-	-	-	s_4	-
a_2	p_8	S^7	s_8	s_{10}	-	s_{12}	-	-	s_8	-	-	-	-	-	-	s_8	-	-	-	-	-
a_2	p_9	S^5	s_9	-	-	s_{12}	-	-	-	-	-	-	-	-	s_9	s_9	-	-	-	s_9	-
a_2	p_{10}	S^3	s_{12}	-	s_6	s_6	-	-	s_6	-	-	-	-	-	-	s_6	-	-	-	-	-
a_2	p_{11}	S^5	s_{12}	s_9	-	s_9	-	-	s_{12}	-	s_9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
a_2	p_{12}	S^7	-	-	-	s_{12}	s_{12}	-	s_{12}	-	-	-	-	-	-	s_{10}	-	-	-	s_2	-
a_2	p_{13}	S^5	-	s_9	-	s_{12}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	s_9	s_9	-	-	s_3	-
a_2	p_{14}	S^7	s_8	-	-	s_{10}	-	-	-	-	s_8	-	-	-	-	s_8	-	s_{12}	-	-	-
a_2	p_{15}	S^5	-	s_{12}	-	s_{12}	s_{12}	-	s_{12}	-	s_{12}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
a_2	p_{16}	S^5	s_9	-	s_6	s_{12}	-	-	s_9	-	-	-	-	-	-	s_9	-	-	-	-	-
a_2	p_{17}	S^5	s_6	-	-	s_{12}	-	-	s_9	-	-	-	-	-	-	s_6	-	-	-	s_3	-
a_2	p_{18}	S^5	-	-	-	s_{12}	-	-	s_9	s_{12}	-	-	-	-	-	-	s_9	-	-	s_6	-
a_2	p_{19}	S^3	s_{12}	-	-	s_{12}	-	-	s_{12}	-	s_{12}	-	-	-	-	-	s_{12}	-	-	-	-
a_2	p_{20}	S^5	-	s_{12}	s_9	s_{12}	-	-	s_{12}	-	-	-	-	-	-	s_9	-	-	-	-	-
a_2	p_{21}	S^5	s_9	-	-	s_{12}	s_{12}	-	s_9	-	-	-	-	-	-	-	s_9	-	-	-	-
a_2	p_{22}	S^5	s_3	-	-	s_9	-	-	-	s_6	s_3	-	-	-	-	-	-	-	-	s_{12}	-
a_2	p_{23}	S^5	s_9	-	-	s_{12}	s_9	-	s_9	-	s_{12}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
a_2	p_{24}	S^3	s_{12}	s_{12}	-	s_{12}	-	-	s_{12}	-	-	-	-	-	-	s_6	-	-	-	-	-
a_2	p_{25}	S^5	-	s_9	-	s_{12}	-	-	-	s_{12}	-	-	-	-	s_{12}	s_9	-	-	-	-	-
a_2	p_{26}	S^5	s_3	s_3	-	s_{12}	-	-	-	-	-	-	-	-	s_9	-	s_{12}	-	-	-	-
a_2	p_{27}	S^5	-	-	-	s_{12}	s_9	-	-	-	-	-	-	-	s_9	s_{12}	-	-	-	s_0	-
a_2	p_{28}	S^7	-	-	s_{12}	-	s_{12}	-	s_{10}	s_{10}	s_{12}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
a_2	p_{29}	S^5	-	s_6	-	s_{12}	-	-	s_9	-	s_9	-	-	-	-	-	s_9	-	-	-	-
a_2	p_{30}	S^7	s_{10}	s_{12}	s_{12}	s_{12}	-	-	s_{12}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
a_2	p_{31}	S^7	-	-	-	s_8	-	-	-	-	-	-	s_{12}	s_6	s_{12}	-	-	-	s_2	-	-
a_2	p_{32}	S^5	-	-	-	s_{12}	s_6	-	s_{12}	-	s_{12}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	s_0
a_2	p_{33}	S^3	-	-	-	-	-	s_{12}	-	-	-	s_{12}	-	-	s_{12}	-	-	-	-	-	-
a_3	p_1	S^5	-	s_{12}	-	s_{12}	s_9	-	s_9	-	-	-	-	-	-	s_9	-	-	-	-	-
a_3	p_2	S^5	-	s_3	-	-	s_6	-	s_9	-	-	-	-	-	-	s_9	s_{12}	-	-	-	-
a_3	p_3	S^5	-	-	-	s_{12}	s_9	-	s_9	-	s_9	-	-	-	-	s_9	-	-	-	-	-
a_3	p_4	S^7	-	s_{10}	-	s_{10}	s_{12}	-	s_{10}	-	s_{10}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
a_3	p_5	S^5	-	s_{12}	-	s_{12}	s_9	-	s_{12}	-	-	-	-	-	-	s_9	-	-	-	-	-
a_3	p_6	S^5	-	-	-	s_{12}	s_9	-	s_{12}	-	s_{12}	-	-	-	-	-	s_{12}	-	-	-	-
a_3	p_7	S^5	s_{12}	s_{12}	s_{12}	s_{12}	-	-	s_{12}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
a_3	p_8	S^5	-	-	-	s_9	s_9	-	s_{12}	-	-	-	-	-	-	s_0	-	-	-	-	-
a_3	p_9	S^5	-	-	-	s_{12}	s_{12}	-	s_{12}	-	s_{12}	-	-	-	-	-	s_{12}	-	-	-	-
a_3	p_{10}	S^5	-	s_6	-	s_9	-	-	s_6	-	s_9	-	-	-	-	-	s_9	-	-	-	-
a_3	p_{11}	S^7	s_6	s_{10}	-	s_{10}	-	-	s_6	-	-	-	-	-	-	s_6	-	-	-	-	-
a_3	p_{12}	S^5	-	-	-	s_{12}	s_9	-	s_{12}	-	s_{12}	-	-	-	-	-	s_9	-	-	-	-
a_3	p_{13}	S^5	-	s_9	s_{12}	s_{12}	-	-	s_{12}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	s_9	-
a_3	p_{14}	S^5	-	-	-	s_9	-	-	-	s_6	-	-	-	-	-	s_0	s_3	-	-	s_3	-
a_3	p_{15}	S^5	s_9	s_6	-	s_{12}	s_{12}	-	-	-	-	-	-	-	-	s_9	-	-	-	-	-
a_3	p_{16}	S^5	-	s_9	s_6	s_9	s_{12}	-	-	-	-	-	-	-	-	s_9	-	-	-	-	-
a_3	p_{17}	S^7	-	s_{12}	s_{10}	s_{12}	s_{12}	-	s_{12}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
a_3	p_{18}	S^7	s_{10}	-	s_6	s_{12}	-	-	-	s_6	-	-	-	-	-	-	s_{12}	-	-	-	-
a_3	p_{19}	S^5	s_{12}	-	-	-	s_{12}	-	s_{12}	s_{12}	-	-	-	-	-	s_9	-	-	-	-	-
a_3	p_{20}	S^7	-	s_8	-	s_{10}	s_{12}	-	s_{10}	s_4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
a_3	p_{21}	S^5	s_{12}	s_{12}	-	s_{12}	-	-	-	-	s_9	-	-	-	-	s_3	-	-	-	-	-
		W	33%	54%	24%	90%	37%	2%	73%	16%	33%	2%	2%	2%	11%	48%	27%	5%	2%	16%	2%

TABLE IV
Valoraciones recibidas en las charlas tras la unificación a la escala S^{13}. Los pesos calculados hacen referencia al número de veces que se usó un criterio.

Escalas cualitativas: Aplicación de un nuevo enfoque basado en proximidades

Raquel González del Pozo
PRESAD, IMUVA
Dep. de Economía Aplicada
Universidad de Valladolid
Valladolid
raquel.gonzalez.pozo@uva.es

José Luis García Lapresta
PRESAD, BORDA, IMUVA
Dep. de Economía Aplicada
Universidad de Valladolid
Valladolid
lapresta@eco.uva.es

***Resumen*—La asignación de números a los términos lingüísticos de las escalas cualitativas es muy habitual en el ámbito de las Ciencias Sociales. Sin embargo, esta asignación carece de sentido cuando las escalas son no uniformes, es decir, cuando los individuos aprecian proximidades distintas entre los términos consecutivos de las mismas.**

En este trabajo se propone un procedimiento ordinal para ordenar un conjunto de alternativas a partir de las valoraciones mostradas por los individuos mediante una escala cualitativa no necesariamente uniforme. Dicho procedimiento evita el uso de números en las valoraciones cualitativas y se basa en las proximidades ordinales entre los términos lingüísticos de las escalas. El procedimiento propuesto se ilustra con un ejemplo tomado de los Barómetros del Centro de Investigaciones Sociológicas.

***Palabras clave*—escalas cualitativas, encuestas, CIS**

I. Introducción

El creciente interés por conocer las preferencias, opiniones y necesidades de la población ante determinadas políticas económicas y sociales hace que se utilicen cada vez más escalas cualitativas formadas por términos lingüísticos en los cuestionarios y encuestas.

El uso de escalas cualitativas formadas por palabras permite a los seres humanos expresarse de una forma sencilla ante situaciones de vaguedad e imprecisión. Autores como Zimmer [10] señalan que la mayoría de las personas prefiere comunicar sus opiniones inciertas a través de las palabras que con valores numéricos, ya que las expresiones verbales se ajustan mejor a sus pensamientos que los números.

No obstante, y a pesar de la preferencia de los seres humanos por las palabras, la gran mayoría de encuestas y cuestionarios miden las actitudes y el grado de acuerdo de los encuestados ante determinadas cuestiones mediante escalas tipo Likert [8], a cuyos términos lingüísticos se les asignan valores numéricos.

Estas asignaciones de valores numéricos (habitualmente equidistantes) carecen de sentido en el contexto de las escalas cualitativas no uniformes, es decir, cuando los individuos aprecian proximidades distintas entre los términos consecutivos de la escala, pudiendo generar diferentes resultados en función de cómo se codifique numéricamente la escala (véanse Roberts [9] y Franceschini et al. [4] entre otros).

Por otra parte, el Centro de Investigaciones Sociológicas (CIS) y otros organismos nacionales e internacionales presentan los resultados de sus investigaciones agrupando determinados términos lingüísticos. En la metodología de los anuarios del CIS [3] puede comprobarse que términos como "Mucho" y "Bastante", utilizados en algunas preguntas de batería para conocer el grado de acuerdo de los encuestados ante determinadas cuestiones, han sido agrupados, descartándose el resto de términos lingüísticos de la escala ("Poco" y "Nada"). Este tratamiento supone una pérdida importante de la información cualitativa de las escalas, además de no considerar la no uniformidad de las mismas.

En este trabajo se plantea cómo ordenar un conjunto de alternativas valoradas cualitativamente a través del procedimiento puramente ordinal propuesto recientemente por García-Lapresta y Pérez-Román [7]. Este procedimiento evita el uso de números en las valoraciones cualitativas y considera únicamente las proximidades entre los términos de las escalas, por lo que puede ser aplicado en el contexto de escalas cualitativas no uniformes. En el presente trabajo también se incluye una comparación entre el procedimiento puramente ordinal antes mencionado y la metodología correspondiente a la agrupación de varios términos lingüísticos utilizando datos del Barómetro del CIS de mayo de 2011.

II. Procedimiento

Se considerará un conjunto de agentes $A = \{1, \ldots, m\}$, con $m \geq 2$, que evalúan un conjunto de alternativas $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, con $n \geq 2$, a través una escala cualitativa ordenada $\mathcal{L} = \{l_1, \ldots, l_g\}$, con $g \geq 3$ y $l_1 < l_2 < \cdots < l_g$.

Con objeto de evitar la asignación de números a los términos lingüísticos de escalas cualitativas no uniformes y manejar su información de una forma puramente ordinal, en este trabajo utilizamos la noción de medida de proximidad ordinal introducida por García-Lapresta y Pérez-Román [6].

Una medida de proximidad ordinal es una función que asigna un grado de proximidad a cada par de términos lingüísticos de una escala cualitativa ordenada $\mathcal{L}$. Estos grados de proximidad pertenecen a un orden lineal $\Delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_h\}$, con $\delta_1 \succ \cdots \succ \delta_h$, denotando δ_1 y δ_h la máxima y la mínima proximidad, respectivamente. Es importante destacar que los

elementos de Δ no son números, son solo objetos abstractos, que representan diferentes grados de proximidad.

Definición 1: [6] Una *medida de proximidad ordinal* sobre $\mathcal{L}$ con valores en Δ es una función $\pi : \mathcal{L}^2 \longrightarrow \Delta$, donde $\pi(l_r, l_s) = \pi_{rs}$ denota el grado de proximidad entre l_r y l_s, que satisface las condiciones siguientes:

1) *Exhaustividad*: Para cada $\delta \in \Delta$, existen $l_r, l_s \in \mathcal{L}$ tales que $\delta = \pi_{rs}$.
2) *Simetría*: $\pi_{sr} = \pi_{rs}$, para cualesquiera $r, s \in \{1, \ldots, g\}$.
3) *Máxima proximidad*: $\pi_{rs} = \delta_1 \Leftrightarrow r = s$, para cualesquiera $r, s \in \{1, \ldots, g\}$.
4) *Monotonía*: $\pi_{rs} \succ \pi_{rt}$ y $\pi_{st} \succ \pi_{rt}$, para cualesquiera $r, s, t \in \{1, \ldots, g\}$ tales que $r < s < t$.

Toda medida de proximidad ordinal puede representarse mediante la *matriz de proximidades*

$$\begin{pmatrix} \pi_{11} & \cdots & \pi_{1s} & \cdots & \pi_{1g} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \pi_{r1} & \cdots & \pi_{rs} & \cdots & \pi_{rg} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \pi_{g1} & \cdots & \pi_{gs} & \cdots & \pi_{gg} \end{pmatrix},$$

que es simétrica y de dimensión $g \times g$, con coeficientes en Δ, y cuyos elementos de la diagonal principal son $\pi_{rr} = \delta_1$, $r = 1, \ldots, g$, y $\pi_{1g} = \delta_h$ (véase García-Lapresta y Pérez-Román [6, Prop. 2]).

Las valoraciones dadas por los agentes a cada una de las alternativas son recogidas en un *perfil*

$$V = \begin{pmatrix} v_1^1 & \cdots & v_i^1 & \cdots & v_n^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_1^a & \cdots & v_i^a & \cdots & v_n^a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_1^m & \cdots & v_i^m & \cdots & v_n^m \end{pmatrix},$$

donde el elemento $v_i^a \in \mathcal{L}$ es la valoración lingüística otorgada por el agente $a \in A$ a la alternativa $x_i \in X$.

Una vez fijada la medida de proximidad ordinal y conocidas las valoraciones lingüísticas dadas por los agentes a cada una de las alternativas, puede aplicarse el procedimiento introducido por García-Lapresta y Pérez-Román [7] para ordenar las alternativas.

El procedimiento está dividido en los siguientes pasos.

1) Para cada alternativa $x_i \in X$ se seleccionan las valoraciones de x_i otorgadas por todos los agentes: $v_i^1, \ldots, v_i^m \in \mathcal{L}$ (columna i de V).

2) Para cada alternativa $x_i \in X$ se calculan los grados de proximidad entre las valoraciones dadas por los agentes y la máxima valoración posible de la escala, l_g:

$$\pi\left(v_i^1, l_g\right), \ldots, \pi\left(v_i^m, l_g\right) \in \Delta.$$

3) Para cada alternativa $x_i \in X$ se ordenan de forma decreciente los grados de proximidad obtenidos. Una vez ordenados, con objeto de evitar la pérdida de información, se selecciona el par de medianas de grados de proximidad, M_i, de la siguiente forma:
   a) Si el número de valoraciones es par, entonces se tienen en cuenta las dos medianas $M_i = (\delta_r, \delta_s)$, con $r, s \in \{1, \ldots, h\}$ tales que $r \leq s$.
   b) Si el número de valoraciones es impar, se duplica la mediana. Por tanto, $M_i = (\delta_r, \delta_r)$ para algún $r \in \{1, \ldots, h\}$.

   Por consiguiente, $M_i \in \Delta_2$, donde Δ_2 es el *conjunto de medianas factibles*:

$$\Delta_2 = \{(\delta_r, \delta_s) \in \Delta^2 \mid r \leq s\}.$$

4) Se ordenan los pares de medianas de grados de proximidad obtenidos previamente para cada una de las alternativas, considerando el orden lineal $\succeq$ sobre Δ_2 definido como

$$(\delta_r, \delta_s) \succeq (\delta_t, \delta_u) \Leftrightarrow \begin{cases} r + s < t + u \\ \text{o} \\ r + s = t + u \text{ y } s - r \leq u - t, \end{cases} \quad (1)$$

   para cualesquiera $(\delta_r, \delta_s), (\delta_t, \delta_u) \in \Delta_2$.

5) Se ordenan las alernativas a través del orden débil $\succcurlyeq$ sobre X definido como $x_i \succcurlyeq x_j \Leftrightarrow M_i \succeq M_j$, donde $\succeq$ es el orden lineal definido en (1).

Al ordenar las alternativas es posible que algunas de ellas estén empatadas por tener el mismo par de medianas. En estos casos puede utilizarse un proceso secuencial de desampate basado en Balinski y Laraki [1]. Este procedimiento consiste en eliminar las dos medianas de las alternativas que están empatadas, seleccionar el nuevo par de medianas de entre los grados de proximidad restantes y aplicar el procedimiento del paso 4 hasta romper los empates y ordenar todas las alternativas.

III. Aplicación a las escalas cualitativas del Centro de Investigaciones Sociológicas

En esta sección se presenta una comparación entre la metodología de agrupación de varios términos lingüísticos y el procedimiento puramente ordinal de la sección II.

Para ello se han tomado los datos de la pregunta 20 del Barómetro del CIS de mayo de 2011 [2], en la cual se pide a los individuos que manifiesten, a través de la escala cualitativa de la Tabla I, hasta qué punto confiarían en la ayuda que les puedan proporcionar las nueve alternativas contenidas en la Tabla II ante una situación de catástrofe o desastre.

La muestra utilizada asciende a 2.219 individuos, de los cuales 1.114 son hombres y 1.105 son mujeres.

Para la aplicación del procedimiento ordinal introducido en la sección II es necesario utilizar una medida de proximidad

ordinal adecuada. Con objeto de establecer esta medida, se realizó una encuesta acerca de las proximidades entre los términos de la escala de la Tabla I digirida a estudiantes de cuarto curso del grado en Economía de la Universidad de Valladolid. Una vez conocidas sus respuestas, se obtuvieron las medidas de proximidad ordinal para cada uno de los estudiantes y se aplicó el procedimiento de agregación introducido por García-Lapresta et al. [5] para determinar la medida de proximidad ordinal que mejor representaba las opiniones de los encuestados.

La medida de proximidad ordinal resultante es la asociada a la matriz

$$A_{232} = \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_4 & \delta_5 \\ & \delta_1 & \delta_3 & \delta_4 \\ & & \delta_1 & \delta_2 \\ & & & \delta_1 \end{pmatrix}$$

representada en la Fig. 1.

Fig. 1. Medida de proximidad ordinal asociada a la matriz A_{232}.

Una vez determinada la medida de proximidad ordinal, se ordenan las nueve alternativas de la Tabla II mediante aplicación del procedimiento ordinal de la sección II.

Para ello, se calculan los grados de proximidad ordinal entre las valoraciones dadas por los agentes y la máxima valoración posible de la escala (l_4). Seguidamente, estos grados de proximidad se ordenan de mayor a menor proximidad y se selecciona de cada alternativa su par de medianas.

Los pares de medianas obtenidos "considerando la población total" son los siguientes: $M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = M_5 = M_6 = M_8 = M_9 = (\delta_2, \delta_2)$ y $M_7 = (\delta_1, \delta_1)$.

Aplicando (1) se obtiene $M_7 \succ M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = M_5 = M_6 = M_8 = M_9$, luego la alternativa x_7 (Familiares) ocupa la primera posición del orden.

A continuación, con objeto de ordenar el resto de alternativas, se aplica el procedimiento de desempate descrito en la sección II, obteniéndose las siguientes medianas: $M_1^{(1)} = M_2^{(1)} = M_4^{(1)} = M_5^{(1)} = M_6^{(1)} = M_8^{(1)} = M_9^{(1)} = (\delta_2, \delta_2)$ y $M_3^{(1)} = (\delta_1, \delta_2)$.

Entonces por (1) $M_3^{(1)} \succ M_1^{(1)} = M_2^{(1)} = M_4^{(1)} = M_5^{(1)} = M_6^{(1)} = M_8^{(1)} = M_9^{(1)}$, luego la alternativa x_3 (Bomberos) ocupa la segunda posición del orden.

El procedimiento de desempate se aplica las veces que sean necesarias hasta ordenar las nueve alternativas.

Finalmente, los resultados obtenidos después de la aplicación del procedimiento ordinal aparecen recogidos en la Tabla III. En dicha tabla también se muestran los órdenes obtenidos al agrupar los términos "Mucho" y "Bastante".

Observando los resultados de la Tabla III cabe señalar, en primer lugar, que no existen diferencias en las posiciones ocupadas por las alternativas vecinos y ONGs, las cuales ocupan en todos los órdenes de la tabla la séptima y octava posición, respectivamente. En cambio, sí que existen diferencias en la forma de ordenar el resto de alternativas.

Tabla I
Términos lingüísticos

l_1	Nada
l_2	Poco
l_3	Bastante
l_4	Mucho

Tabla II
Alternativas

x_1	Guardia Civil
x_2	ONGs
x_3	Bomberos
x_4	Protección Civil
x_5	Policía
x_6	Ejército
x_7	Familiares
x_8	Vecinos
x_9	Amigos

Si no se hace distinciones entre género, las diferencias entre los órdenes obtenidos mediante la agrupación de los términos lingüísticos y la aplicación del procedimiento ordinal se encuentran en las alternativas Protección Civil, Ejército, Policía y Guardia Civil. Como puede observarse, Protección Civil y el Ejército, que ocupan la cuarta y la quinta posición, respectivamente, en el orden resultante de agrupar de "Mucho" y "Bastante", invierten sus posiciones en el caso del orden obtenido tras aplicar el procedimiento ordinal, sucediendo lo mismo en el caso de la Policía y la Guardia Civil.

En cuanto a los hombres, existen diferencias significativas en las primeras posiciones de los órdenes. Los bomberos y los familiares ocupan la primera y la segunda posición, respectivamente, en el orden obtenido tras la agrupación de laos términos "Mucho" y "Bastante". Sin embargo, si se considera el procedimiento ordinal, los familiares se sitúan en la primera posición seguidos por los bomberos. Protección Civil y Ejército también sufren modificaciones, invirtiéndose las posiciones que ocupan en los órdenes resultantes.

En el caso de las mujeres, las diferencias entre los dos órdenes son poco relevantes, variando únicamente las posiciones de la Policía y la Guardia Civil.

IV. Conclusiones

La representación de las escalas cualitativas a través de valores númericos exactos es muy común en el ámbito de las Ciencias Sociales debido a las facilidades que proporciona la Estadística a la hora de manejar datos numéricos. Sin embargo, este enfoque cuantitativo de la información cualitativa carece de sentido en el contexto de las escalas cualitativas no uniformes, ya que contradice algunos principios de la teoría de la medición (véase Roberts [9]).

Por otra parte, la práctica utilizada por el CIS y otros organismos consistente en presentar los resultados de sus

Tabla III
Órdenes obtenidos tras la agrupación de "Mucho" y "Bastante" y la aplicación del procedimiento ordinal

Agrupación "Mucho" y "Bastante"

Total		Hombres		Mujeres	
1	Familiares	1	Bomberos	1	Familiares
2	Bomberos	2	Familiares	2	Bomberos
3	Amigos	3	Amigos	3	Amigos
4	Protección Civil	4	Protección Civil	4	Protección Civil
5	Ejército	5	Ejército	5	Ejército
6	Policía	6	Guardia Civil	6	Policía
7	Guardia Civil	7	Policía	7	Guardia Civil
8	Vecinos	8	Vecinos	8	Vecinos
9	ONGs	9	ONGs	9	ONGs

Procedimiento ordinal

Total		Hombres		Mujeres	
1	Familiares	1	Familiares	1	Familiares
2	Bomberos	2	Bomberos	2	Bomberos
3	Amigos	3	Amigos	3	Amigos
4	Ejército	4	Ejército	4	Protección Civil
5	Protección Civil	5	Protección Civil	5	Ejército
6	Guardia Civil	6	Guardia Civil	6	Guardia Civil
7	Policía	7	Policía	7	Policía
8	Vecinos	8	Vecinos	8	Vecinos
9	ONGs	9	ONGs	9	ONGs

investigaciones mediante la agrupación de varios términos lingüísticos tampoco está considerando la no unifomidad de las escalas cualitativas. Además supone una pérdida importante de información al descartar parte de las categorías de respuesta de las escalas.

Los resultados obtenidos en este trabajo tras aplicar el procedimiento ordinal introducido recientemente por García-Lapresta y Pérez-Román [7] evidencian la importancia de no omitir información cualitativa de las escalas y considerar su no uniformidad.

Agradecimientos

Los autores agradecen al Ministerio de Economía y Competitividad (referencia ECO2016-77900-P) y al Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER) la financiación recibida.

Referencias

[1] M. Balinski, R. Laraki, A theory of measuring, electing and ranking, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 104 (2007) 8720–8725.
[2] Centro de Investigaciones Sociológicas. Barómetro de mayo de 2011.
[3] Centro de Investigaciones Sociológicas. Anuario 2016.
[4] Franceschini, F. , Galetto, M., Varetto, M.: Qualitative ordinal scales: the concept of ordinal range. Quality Engineering 16, pp. 515-524, 2004.
[5] García-Lapresta, J.L., González del Pozo, R., Pérez-Román, D.: Metrizable ordinal proximity measures and their aggregation, Information Sciences, 448-449, pp. 149-163, 2018.
[6] García-Lapresta, J.L., Pérez-Román, D.: Ordinal proximity measures in the context of unbalanced qualitative scales and some applications to consensus and clustering. Applied Soft Computing 35, pp. 864-872, 2015.
[7] García-Lapresta, J.L., Pérez-Román, D.: Aggregating opinions in non-uniform ordered qualitative scales. Applied Soft Computing 67, pp. 652-657, 2018.
[8] Likert, R.: A technique for the measurement of attitudes. Archives of Psychology 22 (140), pp. 1-55, 1932.
[9] Roberts, F.S.: Measurement Theory. Cambridge University Press., 1979.
[10] Zimmer, A.C.: Verbal vs. numerical processing of subjective probabilities. Decision Making Under Uncertainty 16, pp. 159-182, 1983.

Monitor-While-Drilling - based estimation of rock mass rating with computational intelligence: the case of tunnel excavation front

Marta Galende
CARTIF Centro Tecnológico
Boecillo, Valladolid, España
margal@cartif.es

M.J. Fuente, G.I. Sainz-Palmero
Dpto. Ingeniería de Sistemas y Automática
Universidad de Valladolid
Valladolid, España
mjfuente, gresai@eii.uva.es

M. Menéndez
VIAS y Construcciones, S.A.
Avda. Camino de Santiago 50
28050 Madrid, España
manuel.menedez@vias.es

***Abstract*—The construction of tunnels has serious geomechanical uncertainties involving matters of both safety and budget. Nowadays, modern machinery gathers very useful information about the drilling process: the so-called Monitor While Drilling (MWD) data. So, one challenge is to provide support for the tunnel construction based on this *on-site* data .**

Here, an MWD based methodology to support tunnel construction is introduced: a Rock Mass Rating (RMR) estimation is provided by an MWD rocky based characterization of the excavation front and expert knowledge [1].

Well-known machine learning (ML) and computational intelligence (CI) techniques are used. In addition, a collectible and *"interpretable"* base of knowledge is obtained, linking MWD characterized excavation fronts and RMR.

The results from a real tunnel case show a good and serviceable performance: the accuracy of the RMR estimations is high, $Error_{test} \cong 3\%$, using a generated knowledge base of 15 fuzzy rules, 3 linguistic variables and 3 linguistic terms.

This proposal is, however, is open to new algorithms to reinforce its performance.

***Index Terms*—Tunneling, RMR, Sofcomputing, Machine Learning, SDBR**

I. Introduction

This work is focused on the tunnelling industry, to be precise the specific case of railway tunnels, but this can be applied to other similar cases such as road tunnels; underground mining and utilities, etc. Tunnel excavation has used two main methods: *Drill & Blast* and *Tunnel Boring Machine (TBM)*. The first is the most popular excavation method for conventional tunnelling, in particular for railtrack tunnels. In any case, both methodologies involve the use of computer and control based machinery to capture and log data of different natures concerning the process: this is the so-called *Monitor or Measurement While Drilling* (MWD) data.

This work has been partially supported by the Spanish Ministry of Economy and Competitiveness and European Regional Development Fund (FEDER) through the Project no. DPI2015-67341-C2-2-R and published in **Automation in Construction, 93C (2018) pp. 325-338, https://doi.org/10.1016/j.autcon.2018.05.019**

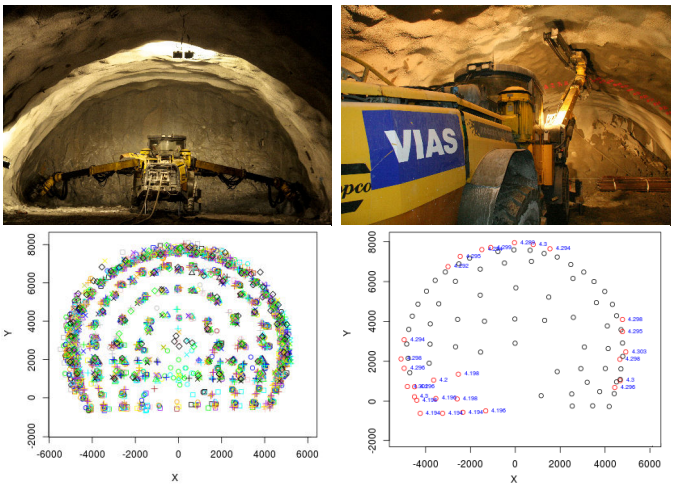


Fig. 1. Drill & Blast excavation method: excavation front and pattern of drilling holes.

II. Computational Intelligence for MWD and RMR: an approach

The current proposal is based on the application of well-known computational intelligence techniques to an engineering problem concerning how available MWD data can be used during tunnel excavation to give high level support. The issues of this approach are based on ML&CI techniques, involving from data analysis to prediction and decision making, as well as the extraction of a knowledge base. Clearly and methodologically defining the stages to be dealt with in order to take advantage of the MWD data using ML&CI for the estimation of operational tunnel parameters, and how every stage can be implemented by these techniques.

In Figure 2, the general scheme of this methodology, as well as its key issues, are described. The major goal of this work is the prediction of tunnel design parameters, the current version concerns the RMR:

1) **Stage 1 -** *Unsupervised Variable Selection:* the MWD data available is processed in order to validate data, removing outliers, fixing missing values, etc. Then a

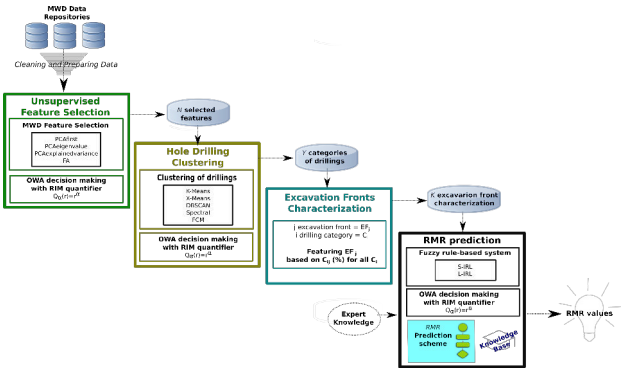


Fig. 2. Main stages of the Proposal

selection of the most relevant variables is carried out based on two well-known unsupervised techniques: PCA and FA. Finally, an OWA based multicriteria decision making is carried out to obtain an unsupervised ranking with the most relevant MWD variables to be used in the following stages.

2) **Stage 2 -** *Hole Drilling Clustering:* considering the previous MWD variable selection, different clustering algorithms and indexes are used to validate each alternative clustering or partitioning. Different categories of hole drillings are obtained and described based on the MWD variables. Once again, based on alternative clustering categories and performances, an OWA based multicriteria decision making is carried out to provide a ranking of the parameters for the clustering algorithms involved.
3) **Stage 3 -** *Characterization of Excavation Fronts:* based on the hole drilling categories obtained in the previous stage, every excavation front is characterized and summarized through its own distribution of MWD based hole drilling categories.
4) **Stage 4 -** *Prediction of RMR Values and Weightings:* based on linguistic and scatter fuzzy systems, as well as the expert knowledge collected, the prediction of the RMR values are set out. The best prediction model is based on an OWA decision making applied over all the alternative fuzzy models and their performances from different points of view, such as error, complexity or number of linguistic variables and terms. Besides, the fuzzy nature of these algorithms permits a knowledge base to be obtained, which is expressed by (linguistic) fuzzy rules, linking the MWD data with the expert knowledge available.

The *on-site* predictions and in advance, of the RMR values are extremely valuable for the technicians to manage uncertainties and plan the pattern of hole drillings for the new excavation front ahead, as well as the support needed for the tunnel walls. These estimations allow extra support to minimize risks in the advance of the tunnel.

III. Summary of results

The open approach introduced in this paper is able to manage, on-site, the MWD data generated by the drill rig to estimate the critical RMR value of every excavation front of the tunnel in progress. The analysis of the MWD data, on the time and frequency domain, has permitted only 3 main MWD features to be used as the basis for the rest of the methodology, meaning a huge reduction in the complexity of the solution.

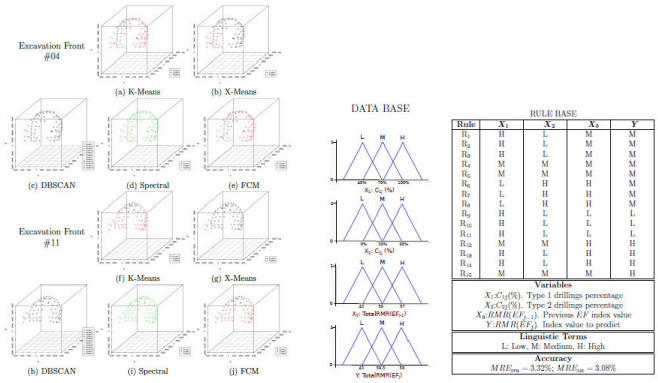


Fig. 3. Cluster based excavation front and Base of Fuzzy Rules

This reduced number permits the drillings for a clustering procedure to be featured. In this way, every excavation front is summarized by a very few features based on these MWD drilling based rocky categories. This can be seen as a feature extraction that summarizes the characterization of every excavation front to an affordable dimensionality for ML&CI approaches. These reductions of dimensionality/complexity are critical for addressing this challenge.

Most different cluster policies, or algorithms, have shown that 2 or 3 clusters is a well-balanced number of MWD drilling based rocky categories. This fits with the knowledge and expertise concerning this issue of the technicians in charge of this type of work. This characterization has permitted the RMR value to be estimated using a linguistic and scatter FRBS: permitting the capability of both different approaches to be checked, so as to estimate the RMR while also generating a reasonable base of well-balanced fuzzy rules regarding accuracy-interpretability. This means being able to generate a good estimation and an "interpretable" knowledge base about the drilling features of every excavation front and their RMR values based on linguistic terms. This modelling has been made possible by the expert knowledge provided by geologists concerning the excavation fronts. The linguistic approach (L-IRL) has been slightly better than the scatter option (S-IRL), providing the best approach for RMR estimation as a reasonable base of knowledge: $MRE_{tst} = 3.01\%$, 17 fuzzy rules, 3 linguistic variables and 3 linguistic terms (Fig. 3). So the complexity of this knowledge base is affordable. Other more accurate predictions are possible, $MRE_{tst} = 3.01\%$, but with an increase in the complexity, 83 fuzzy rules.

References

[1] M. Galende, M. M.J. Fuente, G. Sainz-Palmero, M. Menéndez, Monitor-while-drilling - based estimation of rock mass rating with computational intelligence: the case of tunnel excavation front, Automation in Construction (93C) (2018) 325–338. doi:https://doi.org/10.1016/j.autcon.2018.05.019.

Nuevo Módulo de Conexión Inalámbrico vía Bluetooth con Arduino en la Librería JFML

Francisco Jesús Arcos
Dpt. de Ciencias de la Computación e I.A.
Universidad de Granada
18071 Granada, España
Email: pacoarcos82@gmail.com

José Manuel Soto-Hidalgo
Dpt. de Electrónica y Tecnología Electrónica
Universidad de Córdoba
14071 Córdoba, España
Email: jmsoto@uco.es

Autilia Vitiello
Dpt. de Ciencias de la Computación
Universidad de Salerno
84084 Salerno, Italia
Email: avitiello@unisa.it

Giovanni Acampora
Dpt. de Física Ettore Pancini
Universidad de Nápoles Federico II
80126 Nápoles, Italia
Email: giovanni.acampora@unina.it

Jesús Alcalá-Fdez
Instituto de Investigación DaSCI
Universidad de Granada
18071 Granada, España
Email: jalcala@decsai.ugr.es

***Resumen*—Los Sistemas Basados en Reglas Difusas han sido aplicados con éxito en un amplio rango de aplicaciones reales. Recientemente, la IEEE publicó el estándar IEEE Std 1855^{TM}-2016 para proporcionar a la comunidad una herramienta única y bien definida que permita diseñar sistemas completamente independiente del hardware/software específico. La librería Java Fuzzy Markup Language es la primera herramienta software de código abierto que ofrece una implementación completa de dicho estándar. Sin embargo, la versión actual de esta librería no permite conectarse a sistemas embebidos, lo que dificulta la aplicación de los sistemas difusos a problemas de control. El objetivo de este trabajo es desarrollar un nuevo módulo que permita diseñar y ejecutar un controlador difuso en el sistema embebido Arduino vía Bluetooth. Para ilustrar el potencial de este módulo se ha desarrollado un caso de uso en el que se utiliza un controlador difuso para manejar un robot movil para el comportamiento de seguimiento de contornos.**

***Index Terms*—Sistemas Basados en Reglas Difusas, JFML, Arduino, Software de Código Abierto, Hardware Libre**

I. Introducción

Los Sistemas Basados en Reglas Difusas (SBRD) [1] han sido aplicados con éxito en multiples campos, tales como clasificación [2], regresión [3], control [4], etc., debido a su capacidad para incluir conocimiento experto a priori, manejar la imprecisión existente en los datos, y representar sistemas para los que no es posible obtener un modelo matemático por la tipología del problema y de los datos. En concreto, los controladores difusos son un modelo especifico de SBRDs que permite controlar sistemas complejos de una manera similar a como lo hace un humano.

Para poder hacer uso de estos controladores en muchos problemas reales es necesario que puedan ser ejecutados en sistemas embebidos y conectados con un conjunto de sensores/actuadores. Los sistemas embebidos son dispositivos integrados diseñados para realizar una o unas pocas funciones específicas. En este escenario, es crucial poder integrar SBRDs en sistemas embebidos específicos.

Recientemente, la IEEE Computational Intelligence Society (IEEE-CIS) ha patrocinado la publicación del nuevo estándar para SBRD (IEEE Std 1855^{TM}-2016) [5] en el que se define el lenguaje Fuzzy Markup Language (FML) [6] basado en W3C eXtensible Markup Language (XML). El objetivo de este estándar es proporcionar a la comunidad una herramienta única y bien definida que permite un diseño del sistema completamente independiente del hardware/software específico.

Para que el estándar IEEE sea operativo y útil para la comunidad, se ha desarrollado la librería Java Fuzzy Markup Language (JFML)[1] de código abierto que ofrece una implementación completa del estándar. Sin embargo, la versión actual de la librería JFML no permite conectarse a dispositivos embebidos, lo que dificulta la aplicación de los SBRDs diseñados a problemas reales (centralizados o distribuidos). Aunque algunas librerías permiten utilizar SBRDs en algunos dispositivos hardware, tales como Matlab para Arduino[2] o eFLL[3], actualmente no existe una infraestructura software de código abierto que soporte SBRD diseñados según el estándar IEEE 1855^{TM}-2016 [7]. Además, en general, estas implementaciones se basan en aproximaciones reducidas de la lógica difusa que se ejecutan en el microcontrolador del dispositivo embebido, limitando su capacidad de cálculo.

El objetivo principal de este trabajo es desarrollar un módulo de código abierto para la librería JFML que permita diseñar y ejecutar SBRD en Arduino [8], uno de los sistemas embebidos más conocidos y utilizados en el modelo de hardware libre [9]. Con este módulo, los sensores/actuadores pueden ser asignados a las variables lingüísticas de la base de conocimiento permitiendo un diseño completamente independiente de las

Este trabajo esta soportado por el Ministerio de Economía y Competitividad bajo el proyecto TIN2014-57251-P y el Ministerio de Economía, Industria y Competitividad TIN2017-89517-P.

[1] https://github.com/sotillo19/JFML
[2] http://playground.arduino.cc/Interfacing/Matlab
[3] https://github.com/zerokol/eFLL

restricciones específicas de hardware/software que caracterizan la arquitectura dada en la cual se despliega el sistema. Además, se ha definido un nuevo protocolo de comunicación vía Bluetooth entre JFML y Arduino que permite realizar las inferencias en el ordenador en que se encuentra instalado el núcleo de JFML, eliminando así la limitada capacidad de computación que ofrecen los sistemas embebidos. Para ilustrar el potencial de este módulo mostramos un caso de uso con un controlador difuso para manejar un robot móvil en el comportamiento de seguimiento de contornos. En particular, mostramos cómo el nuevo módulo de JFML puede usarse para implementar SBRDs en Arduino de una manera fácil y lista para ser ejecutada sin ninguna programación adicional de Arduino. Como resultado, el nuevo módulo permite la interoperabilidad total en el diseño de SBRDs con placas Arduino.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera. La sección II presenta una breve introducción del sistema embebido Arduino e introduce la librería JFML y sus principales características. La sección III describe el nuevo módulo de JFML para sistema embebido Arduino. La sección IV muestra un caso de uso centrado en cómo se puede utilizar el nuevo módulo para ejecutar un controlador difuso para el seguimiento de contornos de un robot móvil. Por último, en la sección V se indican algunas observaciones finales y trabajos futuros.

II. Preliminares

Esta sección pone en contexto los SBRDs, introduce el sistema embebido Arduino así como la librería Java de código abierto JFML.

II-A. Sistemas Basados en Reglas Difusas (SBRDs)

La mayoría de las aplicaciones reales en el ámbito de sistemas control tienen en común diversas características que hacen difícil el modelado del sistema utilizando las estrategias clásicas de modelado. Por ejemplo, en sistemas donde los procesos se describen de forma imprecisa sin recurrir a modelos matemáticos o algoritmos de los procesos físicos involucrados. En estos casos, la lógica difusa representa una poderosa herramienta con la que poder diseñar modelos precisos en sistemas complejos donde, debido a la complejidad o la imprecisión, las herramientas clásicas no tienen éxito.

En áreas de investigación como economía, procesamiento de imágenes, etc., se han aplicado con éxito los sistemas difusos [10], [11]. No obstante, posiblemente el control difuso sea el ámbito de aplicación más común de la lógica difusa donde un gran número de publicaciones lo avalan [12]–[14]. Estos sistemas, llamados SBRDs, constan de: una Base de Conocimiento (BC) que contiene las particiones difusas y el conjunto de reglas que modelan el sistema; una interfaz de Fuzzificación que transforma los valores entrada nítidos en conjuntos difusos; un sistema de Inferencia Difusa que realiza el razonamiento difuso haciendo uso de los valores de entrada y de la BC; y la interfaz de Defuzzificación que transforma la salida difusa de la inferencia en valores nítidos.

II-B. Sistemas embebidos: Arduino

Un sistema embebido es una pieza de hardware fuertemente especializada para un propósito específico que es embebido como parte de un dispositivo completo [15]. Dado que se dedican a tareas específicas, los ingenieros pueden optimizarlas para reducir el tamaño y el coste del producto y aumentar la fiabilidad y el rendimiento. Debido a esto, en los últimos años la industria del hardware ha experimentado un crecimiento exponencial y los sistemas embebidos controlan muchos de los dispositivos de uso común en la actualidad. Se estima que el 98 % de todos los microprocesadores se fabrican como parte de un sistema embebido.

Uno de los sistemas embebidos más conocidos y utilizados en el modelo de hardware libre es Arduino [8]. Es una tarjeta microcontroladora que contiene un conjunto de pines de entrada/salida digitales y analógicos que permiten conectarla a varias tarjetas de expansión y componentes electrónicos (antenas Bluetooth o Wifi, sensores, actuadores, entre otros), y su microcontrolador se puede programar utilizando un dialecto de los lenguajes de programación C y C++ (archivos con extensión *.ino*). Debido a su gran simplicidad y usabilidad es una herramienta popular para el desarrollo de productos de Internet of Things, así como una de las herramientas más exitosas para la educación STEM/STEAM[4]. Por ejemplo, en [16] se propuso el diseño de un robot móvil de bajo coste basado en Arduino como herramienta educativa alternativa o complementaria en laboratorios, aulas, e-learning y cursos abiertos masivos online (MOOC); Khater et al. [17] presentaron un controlador difuso adaptativo basado en Arduino DUE para gestionar un motor de corriente continua con eje flexible; etc.

II-C. Librería Java Fuzzy Markup Language

En el año 2000, el Fuzzy Control Language (FCL) fue definido en la norma IEC61131-7 de la Comisión Electrotécnica Internacional [18] con el objetivo de proporcionar a los ingenieros con una herramienta común y bien definida para integrar SBRDs en problemas de control, facilitando el intercambio de controladores entre diferentes lenguajes de programación y software (aumentando la usabilidad del software disponible). Recientemente, la IEEE-CIS patrocinó la publicación del estándar IEEE Std 1855^{TM}-2016 [19] en el que definen el lenguaje FML basado en W3C XML para extender estas ventajas a otros tipos de problemas (por ejemplo, clasificación o regresión), y para hacer uso de las ventajas XML para representar SBRDs.

JFML es una librería Java de código abierto (Licencia Pública GNU GPLv3)[5] para diseñar y usar SBRDs de acuerdo al estándar IEEE 1855^{TM}-2016. Esta librería incluye los 4 sistemas de inferencia (Mamdani, TSK, Tsukamoto y AnYa) y todas las funciones de pertenencia (MFs), operadores difusos, etc., considerados en la definición de esquema XML (XSD) del estándar (ver [19] para más información). JMFL incluye métodos personalizados (nombrados según el patrón

[4]http://stemtosteam.org/

[5]https://github.com/sotillo19/JFML

custom_name) para todos los elementos indicados en el XSD que permiten ampliar la librería de acuerdo con el estándar sin necesidad de modificar la gramática del lenguaje (por ejemplo, con MFs tipo 2 o intuitivo). Además, esta librería utiliza la misma estructura de árbol etiquetada que el estándar, lo que facilita la integración de cambios futuros del estándar. JFML hace uso de la nueva API de Java JAXB para proporcionar una forma rápida y conveniente de leer y escribir SBRDs de acuerdo al estándar. Además, para facilitar la interoperabilidad de la librería con otros software disponibles, JFML incluye un módulo para importar/exportar SBRDs desde documentos FCL, PMML y fis (sistemas diseñados con la Toolbox de lógica difusa de Matlab). Una amplia documentación sobre la librería junto con una buena variedad de ejemplos puede encontrarse en la página web [6].

III. Módulo para Arduino vía Bluetooth

En esta sección presentamos el nuevo módulo para conectar JFML con Arduino vía Bluetooth. La subsección III-A muestra una visión general del diagrama de clases principal del módulo. La subsección III-B describe el protocolo de comunicación vía Bluetooth para la comunicación bidireccional entre JFML y Arduino. Y finalmente, el diagrama de clases para el sistema embebido Arduino y el conjunto de sensores/actuadores incluidos en el módulo son presentados en la subsección III-C.

III-A. Diseño General

A continuación, se introducen las principales clases que compone el nuevo módulo con el objetivo de proporcionar una visión general de las posibilidades que ofrecen.

1. *EmbeddedSystem*: Es la clase principal responsable de definir las características y el tipo de conexión con Arduino. Requiere un nombre, un puerto serie y una velocidad de transmisión para establecer la conexión con el núcleo JFML. Tiene asociada una lista de objetos *EmbeddedVariable* que representa la relación entre las variables de la base de conocimiento y los sensores/actuadores. Además, esta clase define un método abstracto para crear un archivo ejecutable de acuerdo con los requisitos de diseño de la arquitectura de Arduino. Gracias a este archivo, un usuario puede ejecutar fácilmente un SBRD sin necesidad de tener conocimientos específicos sobre la arquitectura y el lenguaje de programación de Arduino.

2. *EmbeddedController*: Esta clase permite coordinar todas las placas Arduino conectadas a JFML. Para ello contiene una lista de objetos *EmbeddedSystem* y un objeto de la clase *FuzzyInferenceSystem* para determinar el tipo de inferencia difusa considerada. Además, esta clase permite al usuario indicar si el sistema debe funcionar durante un periodo de tiempo fijo o de forma indefinidamente.

3. *EmbeddedVariable*: Esta clase representa la relación entre los sensores/actuadores y las variables de la base de conocimiento, indicando para cada uno de ellos el puerto de entrada/salida asociado. Destacar que el dominio de los sensores/actuadores y de las variables son escalados para que haya una relación directa entre los dominios.

[6]http://www.uco.es/JFML

4. *Sensor* y *SensorLibrary*: Estas clases son las encargadas de definir las características de los diferentes sensores/actuadores, incluyendo: el tipo (analógico o digital), el dominio (valor máximo y mínimo), y una librería de operaciones especificas. Destacar que cada sensor/actuador tiene asociada una librería con los códigos de operaciones asociados al mismo (código de inicialización, etc.).

5. *AggregatedSensor*: Esta clase permite definir un nuevo tipo de sensor que genera información útil para el SBRD a partir de los valores proporcionados por uno o varios objetos de la clase *Sensor*. Destacar que esta clase también puede ser utilizada sin objetos de la clase *Sensor* para generar una entrada del controlador mediante una función, variable o constante que no requiera el valor de los sensores de entrada.

6. *Connection* y *ConnectionLibrary*: La clase *Connection* especifica un método de conexión bidireccional que permite conectar Arduino con el núcleo de JFML, definiendo un protocolo de comunicación entre ellos. La clase *ConnectionLibrary* permite incluir un código adicional para conectar las placas Arduino si es necesario. En la siguiente subsección se mostrará en detalle el protocolo de comunicación diseñado.

III-B. Protocolo de Comunicación

El nuevo módulo permite que la inferencia se realice en el ordenador en el que esté instalado el núcleo de JFML, evitando que se tenga que realizar en el sistema embebido que normalmente tiene menor capacidad computacional y de memoria. Para ello, se ha definido un nuevo protocolo de comunicación entre JFML y Arduino tanto para la conexión como para el intercambio de mensajes entre ambos. Este protocolo realiza la gestión de la comunicación mediante peticiones de mensajes de lectura/escritura que consta de los siguientes pasos:

Primero, el controlador (clase *EmbeddedController*) envía un mensaje de difusión a todas las placas Arduino para establecer la conexión con JFML. Cada Arduino recibe un mensaje de lectura y/o escritura de los valores de los sensores conectados en función de la relación establecida entre los sensores y las variables de la base de conocimiento. Por ejemplo, si un sensor está asociado a una variable de entrada, el sistema embebido obtiene un valor del sensor. Sin embargo, si el sensor/actuador se asocia a una variable de salida, el sistema embebido establece un valor para el sensor. Este valor se envía a JFML como un mensaje según la definición del protocolo.

Segundo, el controlador espera una respuesta (un mensaje con el valor de los sensores) de todas las placas Arduino conectadas. Si el controlador recibe respuesta de todos ellos y no se supera el tiempo de espera definido, los valores de las variables de la base de conocimiento se actualizan con los valores recibidos (procedentes de los sensores). En caso contrario se muestra un mensaje de error.

Tercero, JFML hace la inferencia difusa teniendo en cuenta los valores de las variables de entrada. Posteriormente, los valores de salida se envían a las placas de Arduino correspondientes (aquellas que tienen sensores asociados con variables

de salida). Los actuadores asociados a las variables de salida se ajustan de acuerdo con los resultados de la inferencia difusa. Finalmente, el controlador espera una respuesta ACK de todos los Arduinos indicando que los resultados de la inferencia difusa están correctamente configurados en los sensores o actuadores correspondientes, de lo contrario, aparece un mensaje de error.

III-C. Diseño de Clases para el Sistema Embebido Arduino

Se lleva a cabo una implementación basada en Arduino de acuerdo con el diagrama de clases introducido en la subsección III-A. Para ello se implementa una nueva clase *EmbeddedSystemArduino* que extiende a la clase abstracta *EmbeddedSystem*. Además, también se desarrolla una comunicación bidireccional por el puerto Bluetooth para que las placas Arduino pueden conectarse y usarse para diseñar SBRDs de forma sencilla.

La clase *EmbeddedSystemArduino* implementa el método abstracto para crear automáticamente un archivo ejecutable (*.ino*) de acuerdo con el diseño de la arquitectura de Arduino. Este archivo *.ino* incluirá el código necesario para iniciar y ejecutar el sistema en la placa Arduino. Requiere dos funciones: *setup()* y *loop()*. La función *setup()* es ejecutada cuando la placa Arduino es encendida o se ha utilizado la opción reset. Principalmente es utilizada para inicializar variables, los modos de los pines de entrada y salida, e inicializar otras librerías necesarias en el programa. La función *loop()* es ejecutada después de la función *setup()* dentro de un bucle en el programa principal. Está función incluye el código necesario para leer y actualizar constantemente el valor de los sensores y actuadores. El método abstracto incluye en el código de la función *setup()* las variable de la base de conocimiento que está asociada con un sensor o actuador (además de las bibliotecas asociadas), el modo de cada una (entrada o salida), y el número del pin al que está conectado. Además, este método incluye en la función*loop()* el código necesario mantener la comunicación entre JFML y la placa Arduino. El fichero *.ino* generado automáticamente debe ser cargado directamente en la ROM de Arduino mediante la IDE de la empresa. Destacar que este fichero puede ser modificado por el usuario para incluir su propio código si es necesario.

Este módulo también incluye una colección de los sensores y actuadores más utilizados en las propuestas con Arduino [20]. Además, los usuarios pueden añadir nuevos sensores y/o actuadores facilmente extendiendo la clase *Sensor*. El cuadro I muestra una lista con los 7 sensores y los 5 actuadores integrados en el módulo.

Cuadro I
Sensores y actuadores incluidos en el módulo

Sensor	**Tipo**	**Digital**	**Analógico**
DHT22	Temperatura y Humedad	X	
HC-SR04	Distancia (ultrasonido)	X	
HC-SR501	Movimiento	X	
LDR	Intensidad lumínica	X	X
MPU6050	Acelerómetro y Giroscopio	X	
MQ-2	Gas	X	X
H206	Encoder	X	
Actuador	**Tipo**	**Digital**	**Analógico**
DC Motor	Motor corriente continua	X	X
L298N	Driver	X	X
LED Color	Led	X	
LED PWM	Led	X	
SG90 Motor	Servo motor		X

IV. Caso de Uso

Con el objetivo de mostrar el potencial del nuevo módulo de JFML, se ha realizado un caso de uso con un SBRD para controlar un robot móvil para el comportamiento de seguimiento de contornos. En robótica móvil, los controladores difusos son comúnmente considerados para realizar este comportamiento que es muy utilizado para explorar estancias interiores desconocidos. El objetivo es mantener una distancia adecuada entre el robot y la pared (d_{wall}) mientras el robot se mueve lo más rápido posible, evitando cambios bruscos en los movimientos y en la velocidad. En [21], los autores diseñaron un controlador difuso para seguimiento de contornos para el robot Nomad-200 haciendo uso de algoritmos genéticos. Éste consta de cuatro variables de entrada: relación entre la distancia a la derecha y d_{wall} (RD), relación entre la distancia a la izquierda y de la derecha (DQ); orientación respecto a la pared (O); y velocidad lineal respecto a la velocidad lineal máxima del robot (V); y dos variables de salida: aceleración lineal (LA) y velocidad angular (AV) respecto a la aceleración lineal máxima y velocidad angular del robot, respectivamente. Este controlador difuso está disponible como uno de los ejemplos proporcionados con el software JFML ($./Ejemplos/XMLFiles/RobotMamdani.xml$).

Para este caso de uso montamos un robot móvil con componentes de bajo coste que consta de una placa Arduino MEGA 2560, cinco sensores de distancia HC-SR04, dos sensores de velocidad del motor H206, un sensor acelerómetro/giroscopio MPU6050, y dos motores de corriente continua con el conductor H-Bridge L298N (ver Figura 1). El robot móvil es controlado en tiempo real desde el ordenador portátil utilizando la librería JFML para ejecutar el controlador difuso y gestionar la comunicación con los sensores/actuadores vía Bluetooth. Destacar que los valores de los sensores no se utilizan directamente como entradas del controlador difuso. Varios objetos de la clase *Aggregated Sensor* son utilizados para generar los valores de entrada del controlador a partir de los valores obtenidos de distintos sensores. Asimismo, las salidas del controlador se envían a otros objetos de la clase *Aggregated Sensor* para generar los valores de los motores.

Para llevar a cabo todo el proceso, es necesario realizar los siguientes pasos. El primer paso es leer el controlador difuso desde el documento FML. El segundo paso es crear los sensores/actuadores que están conectados con la placa Arduino. El tercer paso es generar los objetos de la clase *Aggregated Sensor* para los valores de entrada y salida. El cuarto paso es mapear las variables de entrada/salida con los sensores/actuadores e incluirlas en una lista. El quinto paso es crear el sistema embebido (incluyendo el nombre, puerto, etc.) y generar el archivo *.ino*. Estos pasos implementan con

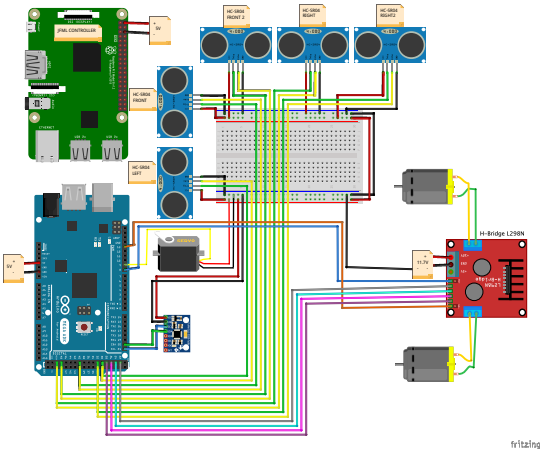


Figura 1. Arquitectura Hardware del Robot Movil.

siguiente código Java:

```
// Paso 1: Lectura del controlador desde un fichero FML
File fml = new File("./Examples/XMLFiles/RobotMamdani.xml");
FuzzyInferenceSystem fs = JFML.load(fml);

// Paso 2: Crear los sensores/actuatores
KnowledgeBaseVariable var_rd =  fs.getVariable("rd");
KnowledgeBaseVariable var_dq =  fs.getVariable("dq");
KnowledgeBaseVariable var_o =  fs.getVariable("o");
KnowledgeBaseVariable var_v =  fs.getVariable("v");
KnowledgeBaseVariable var_la =  fs.getVariable("la");
KnowledgeBaseVariable var_av =  fs.getVariable("av");

Sensor rd_front = new ArduinoHC_SR04(rd.getName()+"front",
ArduinoPin.PIN_40, ArduinoPin.PIN_41, 10, 200, true, 3,
true, true);
Sensor rd_front2 = new ArduinoHC_SR04(rd.getName()+"front2",
ArduinoPin.PIN_48, ArduinoPin.PIN_49, true, 3, false, true);
Sensor rd_right = new ArduinoHC_SR04(rd.getName()+"right",
ArduinoPin.PIN_50, ArduinoPin.PIN_51, true, 3, false, true);
Sensor rd_right2 = new ArduinoHC_SR04(rd.getName()+"right2",
ArduinoPin.PIN_32, ArduinoPin.PIN_33, true, 3, false, true);
Sensor dq_left = new ArduinoHC_SR04(dq.getName()+"left",
ArduinoPin.PIN_30, ArduinoPin.PIN_31, true, 3, false, true);
Sensor angular_velocity = new ArduinoSERVO(av.getName(),
ArduinoPin.PIN_9, -1, 1, 45, 135, 45, true);
Sensor linear_acceleration = new ArduinoH_BRIDGE_L298N(
la.getName(), ArduinoPin.PIN_6, ArduinoPin.PIN_7,
ArduinoPin.PIN_4, ArduinoPin.PIN_2, ArduinoPin.PIN_1,
ArduinoPin.PIN_5, -1, 1, 40, 70, 15);
Sensor orientation = new ArduinoMPU6050(o.getName(), -45,
45, true);

// Paso 3: Crear los sensores agregados
ArrayList<Sensor> sensorsRD = new ArrayList<>();
sensorsRD.add(rd_front);
sensorsRD.add(rd_front2);
sensorsRD.add(rd_right);
sensorsRD.add(rd_right2);
AggregatedSensor rdSensor = new ArduinoAggregatedSensorRD(
rd.getName(), sensorsRD, 0, 3, 6, 50, true);
ArrayList<Sensor> sensorsDQ = new ArrayList<>();
sensorsDQ.add(dq_left);
AggregatedSensor dqSensor = new ArduinoAggregatedSensorDQ(
dq.getName(), sensorsDQ, 0, 2);
ArrayList<Sensor> sensorsO = new ArrayList<>();
sensorsO.add(rd_right);
sensorsO.add(rd_right2);
AggregatedSensor OSensor = new ArduinoAggregatedSensorO(
o.getName(), sensorsO, -45, 45);
ArrayList<Sensor> sensorsAV = new ArrayList<>();
sensorsAV.add(angular_velocity);
AggregatedSensor avSensor = new ArduinoAggregatedSensorAV(
av.getName(), sensorsAV, -1, 1, 18);
AggregatedSensor vSensor = new ArduinoAggregatedSensorV(
v.getName(), -1, 1, 50);

// Paso 4: Mapeo de los sensores/actuatores
ArrayList<EmbeddedVariable> embVar =
new ArrayList<>();
embVar.add(new EmbeddedVariableArduino(0, rd, rd_front));
embVar.add(new EmbeddedVariableArduino(0, rd, rd_front2));
embVar.add(new EmbeddedVariableArduino(0, rd, rd_right));
embVar.add(new EmbeddedVariableArduino(0, rd, rd_right2));
embVar.add(new EmbeddedVariableArduino(0, rd, rdSensor));
embVar.add(new EmbeddedVariableArduino(1, dq, dq_left));
embVar.add(new EmbeddedVariableArduino(1, dq, dqSensor));
embVar.add(new EmbeddedVariableArduino(2, o, orientation));
embVar.add(new EmbeddedVariableArduino(2, o, OSensor));
embVar.add(new EmbeddedVariableArduino(3, v, vSensor));
embVar.add(new EmbeddedVariableArduino(4, la,
linear_acceleration));
embVar.add(new EmbeddedVariableArduino(5, av,
angular_velocity));
embVar.add(new EmbeddedVariableArduino(5, av, avSensor));

// Paso 5: Crear el sistema embebido y el fichero .ino
EmbeddedSystem robot = new EmbeddedSystemArduino
("RobotMamdani","/dev/ttyACM0", 2000000, embVar);
robot.createRunnableEmbeddedFile("./Examples/Arduino/
RobotMamdani.ino");
```

Una vez creado el archivo *.ino*, éste se escriben en el microcontrolador de la placa Arduino mediante la IDE proporcionado por la empresa y se establece la conexión Bluetooth con el portátil. Finalmente, el sistema embebido se asocia al controlador difuso y se ejecuta el programa. Para realizar este paso se utiliza el siguiente código Java:

```
ArrayList<EmbeddedSystem> arduinos = new ArrayList<>();
arduinos.add(robot);

EmbeddedController controller = new EmbeddedControllerSystem
(arduinos, fs);
controller.run(1000);
```

Destacar que el sistema embebido es añadido a una lista porque podríamos utilizar varias placas de Arduino para utilizar los sensores/actuadores. Las pruebas fueron realizadas en la planta baja del Centro de Investigación en Tecnologías de la Información y las Comunicaciones de la Universidad de Granada (CITIC-UGR) que incluye diferentes situaciones a las que el robot se enfrenta habitualmente durante la navegación: paredes rectas de diferentes longitudes, esquinas cóncavas y convexas, etc., cubriendo así una amplia gama de contornos. La distancia máxima deseada en este caso fue de 50 cm. La Figura 2 muestra la trayectoria del robot mediante marcas rojas circulares. Podemos ver cómo el robot presenta un buen comportamiento a pesar de que las medidas de los sensores de ultrasonidos son bastante ruidosas debido a que los pasillos tienen adoquines en las paredes y las puertas son de madera. Para este entorno el robot registro una distancia media de 50,5 cm con una desviación típica de 3 cm y una velocidad media de 42,9 cm/s.

V. Conclusiones

En este trabajo presentamos un nuevo módulo Java de código abierto para la librería JFML que permite conectar fácilmente un SBRD con uno de los sistemas embebidos más utilizados en el modelo de hardware abierto, Arduino. Este módulo permite asociar las variables de entrada/salida de un SBRD con sensores/actuadores a través de una placa Arduino. Además, este módulo integra un protocolo de comunicación vía Bluetooth entre JFML y las placas Arduino

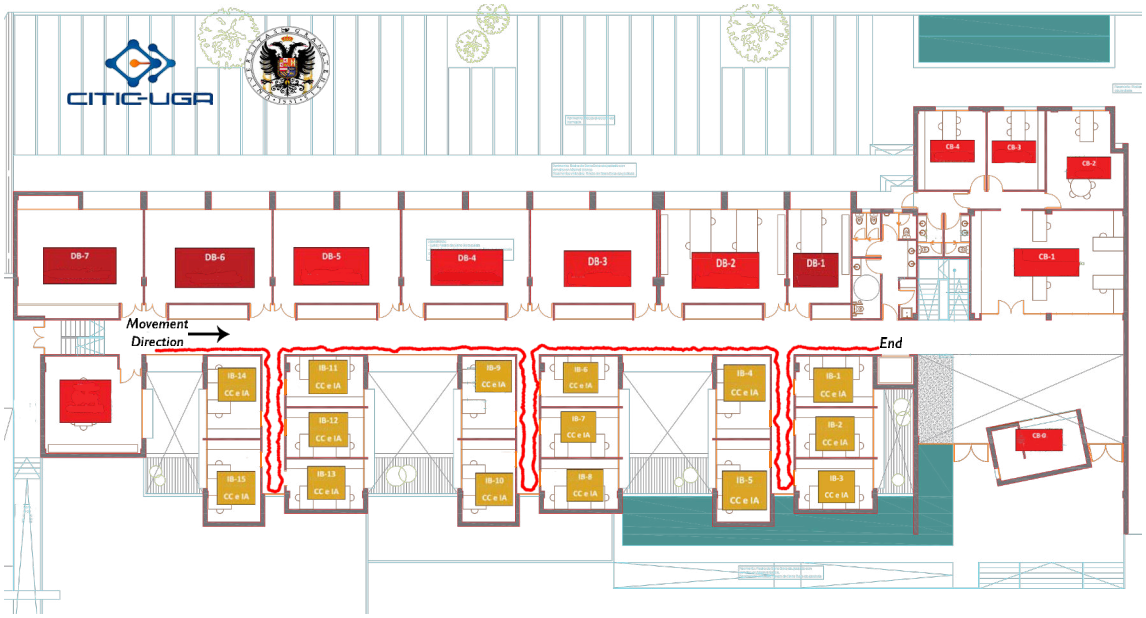


Figura 2. Entorno de prueba

que permite realizar la inferencia difusa en un ordenador externo, eliminando la limitada capacidad de cálculo que ofrecen los sistemas embebidos. Para ilustrar el potencial del nuevo módulo hemos mostrado un caso de estudio con un controlador difuso definido según IEEE Std 1855^{TM}-2016 para controlar un robot móvil para seguimiento de contornos. Se ilustra el uso del nuevo módulo en un breve programa Java donde las variables de entrada/salida del controlador se asocian con los sensores de distancia y los motores, se genera el archivo *.ino* para el microcontrolador de la placa Arduino, y se gestiona el robot realizando la inferencia difusa desde un ordenador externo manteniendo la comunicación vía Bluetooth. Actualmente se está trabajando en la incorporación de nuevos sensores y actuadores al módulo y en el desarrollo de un mecanismo de comunicación Wifi.

Referencias

[1] E. Trillas and L. Eciolaza, *Fuzzy Logic: An Introductory Course for Engineering Students*. Springer, 2015.

[2] J. Alcala-Fdez, R. Alcala, S. Gonzalez, Y. Nojima, and S. Garcia, "Evolutionary fuzzy rule-based methods for monotonic classification," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 25, no. 6, pp. 1376–1390, 2017.

[3] H. Zuo, G. Zhang, W. Pedrycz, V. Behbood, and J. Lu, "Fuzzy regression transfer learning in takagi-sugeno fuzzy models," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 25, no. 6, pp. 1795–1807, 2017.

[4] Y. Li, S. Sui, and S. Tong, "Adaptive fuzzy control design for stochastic nonlinear switched systems with arbitrary switchings and unmodeled dynamics," *IEEE Transactions on Cybernetics*, vol. 47, no. 2, pp. 403–414, 2017.

[5] G. Acampora, B. di Stefano, and A. Vitiello, "IEEE 1855^{TM}: The first IEEE standard sponsored by IEEE Computational Intelligence Society," *IEEE Computational Intelligence Magazine*, vol. 11, no. 4, pp. 4–7, 2016.

[6] G. Acampora, "Fuzzy Markup Language: a XML based language for enabling full interoperability in fuzzy systems design," in *On the Power of Fuzzy Markup Language*, G. Acampora, V. Loia, C.-S. Lee, and M.-H. Wang, Eds. Springer, Berlin, 2013, pp. 17–31.

[7] J. Alcalá-Fdez and J. M. Alonso, "A survey of fuzzy systems software: Taxonomy, current research trends and prospects," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 24, no. 1, pp. 40–56, 2016.

[8] Arduino. (2017) Open-source electronic prototyping platform enabling users to create interactive electronic objects.

[9] J. Pearce, *Open-Source Lab: How to Build Your Own Hardware and Reduce Research Costs*. Elsevier, 2013.

[10] M. Muñoz, E. Miranda, and P. Sánchez, "A fuzzy system for estimating premium cost of option exchange using mamdani inference: Derivatives market of mexico," *International Journal of Computational Intelligence Systems*, vol. 10, no. 1, pp. 153–164, 2017.

[11] A. Fahmi, K. Ulengin, and C. Kahraman, "Analysis of brand image effect on advertising awareness using a neuro-fuzzy and a neural network prediction models," *International Journal of Computational Intelligence Systems*, vol. 10, no. 1, pp. 690–710, 2017.

[12] H. Zermane and H. Mouss, "Internet and fuzzy based control system for rotary kiln in cement manufacturing plant," *International Journal of Computational Intelligence Systems*, vol. 10, no. 1, pp. 835–850, 2017.

[13] L. Tang and J. Zhao, "Adaptive tracking control for discrete-time switched nonlinear systems with dead-zone inputs," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 344, pp. 51–69, 2018.

[14] B. Zhang, C. Yang, H. Zhu, P. Shi, and W. Gui, "Controllable-domain-based fuzzy rule extraction for copper removal process control," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 26, no. 3, pp. 1744–1756, 2018.

[15] M. Barr, "Embedded systems glossary," *Neutrino Technical Library*, retrieved 2007-04-21.

[16] F. López-Rodríguez and F. Cuesta, "Andruino-A1: Low-cost educational mobile robot based on android and arduino," *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, vol. 81, no. 1, pp. 63–76, 2016.

[17] A. A. Khater, M. El-Bardini, and N. M. El-Rabaie, "Embedded adaptive fuzzy controller based on reinforcement learning for dc motor with flexible shaft," *Arabian Journal for Science and Engineering*, vol. 40, no. 8, pp. 2389–2406, 2015.

[18] *International Electrotechnical Commission technical committee industrial process measurement and control. IEC 61131 - Programmable Controllers*. IEC, 2000.

[19] IEEE-SA Standards Board, "IEEE standard for fuzzy markup language," *IEEE Std 1855-2016*, pp. 1–89, 2016.

[20] K. Karvinen and T. Karvinen, *Getting Started with Sensors: Measure the World with Electronics, Arduino, and Raspberry Pi*. Maker Media, Incorporated, 2014.

[21] M. Mucientes, R. Alcalá, J. Alcalá-Fdez, and J. Casillas, "Learning weighted linguistic rules to control an autonomous robot," *International Journal of Intelligent Systems*, vol. 24, no. 3, pp. 226–251, 2009.

Un algoritmo de comparación de imágenes basado en funciones de semejanza de matrices

Mikel Sesma-Sara*†, Laura De Miguel*†, Javier Fernandez*†,
Edurne Barrenechea*†, Radko Mesiar‡§, y Humberto Bustince*†
*Departamento de Estadística, Informática y Matemáticas
Universidad Pública de Navarra, 31006 Pamplona, Spain
Email: {mikel.sesma,laura.demiguel,fcojavier.fernandez,edurne.barrenechea,bustince}@unavarra.es
†Institute of Smart Cities, Universidad Pública de Navarra, 31006 Pamplona, Spain
‡Department of Mathematics and Descriptive Geometry, Faculty of Civil Engineering,
Slovak University of Technology, Radlinského 11, Bratislava, Slovakia
Email: mesiar@math.sk
§Institute for Research and Applications of Fuzzy Modelling,
University of Ostrava, 30. dubna 22, Ostrava 1, Czech Republic

***Resumen*—En este trabajo presentamos un algoritmo de comparación de imágenes basado en mediciones de similitud entre vecindarios de píxeles a través de las llamadas funciones de semejanza de matrices (o *matrix resemblance functions*, término original). Además, inspirados por los conceptos de funciones de equivalencia restringida y grados de inclusión de Sinha y Dougherty, estudiamos dos métodos de construcción para funciones de semejanza de matrices, que las dotan de una expresión algebraica y permiten así estudiar las propiedades que hacen a esta familia de funciones apropiada para la comparación de imágenes. Concluimos el trabajo con un ejemplo que ilustra una potencial aplicación de este tipo de funciones para detectar cambios y movimiento en vídeo.**

***Index Terms*—Funciones de agregación, funciones de semejanza de matrices, comparación de imágenes.**

I. Introducción

Existen en la literatura diversas propuestas para medir cómo de diferentes son dos imágenes en términos de similitud. La comparación de imágenes es ampliamente utilizada en distintos ámbitos, como son el reconocimiento facial [1], mejora de escenas [2] y detección de fallos o anomalías en series de producción [3], entre otros.

En consecuencia, es posible encontrar numerosas medidas e índices de similitud en la literatura [4], [5]. Una de las diferencias entre el método que se presenta en este trabajo y muchos otros es que se trata de un método basado en la comparación de vecindarios, en lugar de llevar a cabo una comparación píxel a píxel. Otra diferencia notable es que la mayoría de técnicas de comparación son medidas numéricas, i.e., el resultado se reduce a un número, mientras que nuestra propuesta tiene una nueva imagen como resultado. Además de que un número puede no resultar del todo representativo en cuanto a la similitud de dos imágenes, el beneficio de considerar una nueva imagen como resultado es que hace posible extraer información sobre la localización, es decir, se pueden determinar zonas donde las dos imágenes son más similares o menos y medir cómo de similares son en cada una de esas regiones.

En este trabajo discutimos la noción de funciones de semejanza de matrices, que fueron introducidas con una definición axiomática en [6]. Además, estudiamos dos métodos de construcción basados en funciones de equivalencia restringida [7] y grados de inclusión [8], [9], respectivamente. También analizamos las restricciones necesarias para que este las funciones de esta clase sean adecuadas para comparar imágenes, en otras palabras, las restricciones para que estas funciones satisfagan propiedades frecuentemente requeridas a medidas de comparación de imágenes .

El objetivo de este trabajo, además de discutir la noción y las propiedades de las funciones de semejanza de matrices, es presentar un algoritmo de comparación de imágenes basado en esta familia de funciones. El algoritmo consiste en comparar el vecindario de un píxel de la primera imagen con el correspondiente vecindario del píxel de la segunda imagen. El resultado de dicha comparación se usa como valor para el píxel en esa posición de la nueva imagen, la imagen resultado.

Tras la presentación del algoritmo, presentamos un ejemplo que ilustra cómo puede usarse el algoritmo en una aplicación de detección de cambios o movimiento en vídeo.

Este trabajo se organiza de la siguiente manera. En la Sección II, comenzamos recordando varios conceptos preliminares. En la Sección III presentamos la clase de funciones de semejanza de matrices para matrices $m \times n$. En la Sección IV discutimos dos métodos para construir funciones de este tipo basados en funciones de equivalencia restringida y grados de inclusión. En la Sección V estudiamos las propiedades que este tipo de funciones cumple en relación con el problema de la comparación de imágenes. Concluimos este trabajo con un algoritmo de comparación de imagen (Sección VI) y un ejemplo de cómo aplicarlo en un problema de detección de cambios en vídeo en la Sección VII.

II. Preliminares

Sean $m, n \in \mathbb{N}$ y denotamos por $\mathcal{M}_{m\times n}([0,1])$ al conjunto de matrices $m \times n$ cuyos elementos pertenecen al intervalo

unidad.

Llamamos negación difusa a la siguiente generalización de la negación en lógica clásica.

Definición 1. *Se dice que una función $c : [0,1]^2 \to [0,1]$ es una negación difusa si es decreciente, $c(0) = 1$ y $c(1) = 0$. Además, se dice que c es estricta si es continua y estrictamente decreciente. Decimos que una negación estricta c es fuerte si además es involutiva, es decir, $c(c(x)) = x$ para todo $x \in [0,1]$.*

Una función de equivalencia restringida [7] modela la comparación entre dos números en el intervalo unidad.

Definición 2. *Sea c una negación fuerte. Una función $REF : [0,1]^2 \to [0,1]$ es una función de equivalencia restringida con respecto a c si*

(REF1) $REF(x,y) = REF(y,x)$ *para todos* $x, y \in [0,1]$;
(REF2) $REF(x,y) = 1$ *si y solo si* $x = y$;
(REF3) $REF(x,y) = 0$ *si y solo si* $\{x,y\} = \{0,1\}$;
(REF4) $REF(x,y) = REF(c(x),c(y))$ *para todos* $x, y \in [0,1]$;
(REF5) Para todos $x, y, z \in [0,1]$, *si* $x \leq y \leq z$, *entonces* $REF(x,y) \geq REF(x,z)$ *y* $REF(y,z) \geq REF(x,z)$.

En la Sección IV presentamos un método de construcción de funciones de semejanza de matrices en términos de grados de inclusión difusos. Para ello, aprovechamos el hecho de que si consideramos un conjunto de píxeles como universo, un conjunto difuso puede ser como una matriz en $\mathcal{M}_{m\times n}([0,1])$. Denotamos el conjunto formado por todos los conjuntos difusos con universo X como $FS(X)$.

Un grado de inclusión difuso [9], [10], [11] indica cómo de contenido está un conjunto difuso en otro. Existen varias definiciones de esta noción, con diferentes axiomatizaciones [12], [8], [13]. En este trabajo, usamos la introduzida por Sinha y Dougherty [8].

Definición 3. *Se dice que una función $\sigma : FS(X)\times FS(X) \to [0,1]$ es un grado de inclusión en el sentido de Sinha y Dougherty si satisface las siguientes propiedades*

(IG1) $\sigma(\mathcal{A},\mathcal{B}) = 1$ *si y solo si* $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$, *donde* $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$ *significa que* $\mathcal{A}(x) \leq \mathcal{B}(x)$ *para todo* $x \in X$;
(IG2) $\sigma(\mathcal{A},\mathcal{B}) = 0$ *si y solo si existe* x_i *tal que* $\mathcal{A}(x_i) = 1$ *y* $\mathcal{B}(x_i) = 0$;
(IG3) Si $\mathcal{B} \leq \mathcal{C}$, *entonces* $\sigma(\mathcal{A},\mathcal{B}) \leq \sigma(\mathcal{A},\mathcal{C})$ *para todo* $\mathcal{A} \in FS(X)$;
(IG4) Si $\mathcal{B} \leq \mathcal{C}$, *entonces* $\sigma(\mathcal{C},\mathcal{A}) \leq \sigma(\mathcal{B},\mathcal{A})$ *para todo* $\mathcal{A} \in FS(X)$;
(IG5) $\sigma(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \sigma(\pi(\mathcal{A}),\pi(\mathcal{B}))$, *siendo* π *una permutación de los elementos de* X *y con* $\pi(\mathcal{A})(x) = \mathcal{A}(\pi(x))$ *y* $\pi(\mathcal{B})(x) = \mathcal{B}(\pi(x))$;
(IG6) $\sigma(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \sigma(\mathcal{B}_c,\mathcal{A}_c)$, *siendo* c *una negación fuerte;*
(IG7) $\sigma(\mathcal{B}\vee\mathcal{C},\mathcal{A}) = \min(\sigma(\mathcal{B},\mathcal{A}),\sigma(\mathcal{C},\mathcal{A}))$ *para todos* $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C} \in FS(X)$;
(IG8) $\sigma(\mathcal{A},\mathcal{B}\wedge\mathcal{C}) = \min(\sigma(\mathcal{A},\mathcal{B}),\sigma(\mathcal{A},\mathcal{C}))$ *para todos* $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C} \in FS(X)$;
(IG9) $\sigma(\mathcal{A},\mathcal{B}\vee\mathcal{C}) \geq \max(\sigma(\mathcal{A},\mathcal{B}),\sigma(\mathcal{A},\mathcal{C}))$ *para todos* $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C} \in FS(X)$.

III. La clase de funciones de semejanza de matrices

Recordemos la definición axiomática del concepto de función de semejanza de matrices, introducida en [6] para matrices cuadradas.

Definición 4 ([6])**.** *Sean $m, n \in \mathbb{N}$. Decimos que una función $\Psi : \mathcal{M}_{m\times n}([0,1])\times\mathcal{M}_{m\times n}([0,1]) \to [0,1]$ es una función de semejanza de matrices si cumple las siguientes propiedades:*

(MRF1) $\Psi(A,B) = 1$ *si y solo si* $A = B$;
(MRF2) $\Psi(A,B) = 0$ *si y solo si* $\{a_{ij}, b_{ij}\} = \{0,1\}$ *para algunos* $1 \leq i \leq m$ *y* $1 \leq j \leq n$;
(MRF3) $\Psi(A,B) = \Psi(B,A)$ *para todas* $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}([0,1])$.

Ejemplo 1. *La función*

$$\Psi(A,B) = \prod_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} \left(1 - (a_{ij} - b_{ij})^2\right)$$

es una función de semejanza de matrices.

La condición (MRF2) hace que las funciones de semejanza de matrices estén relacionadas con el operador de erosión de la morfología matemática [6].

El siguiente resultado da una manera de generar nuevas funciones de semejanza de matrices a partir de una dada.

Proposición 1. *Sean $\phi, \eta : [0,1] \to [0,1]$ tales que $\phi(0) = \eta(0) = 0$, $\phi(1) = \eta(1) = 1$, $\eta(x) \in (0,1)$ para todo $x \in (0,1)$, y sea ϕ inyectiva. Si $\Psi : \mathcal{M}_{m\times n}([0,1])^2 \to [0,1]$ es una función de semejanza de matrices, entonces $\Psi_{\phi,\eta} : \mathcal{M}_{m\times n}([0,1])^2 \to [0,1]$ dada por*

$$\Psi_{\phi,\eta}(A,B) = \eta\left(\Psi(\phi(A),\phi(B))\right), \tag{1}$$

donde $\phi(A)_{ij} = \phi(a_{ij})$, también es una función de semejanza de matrices.

La demostración de la proposición anterior se basa en comprobar que la expresión (1) cumple las condiciones (MRF1)-(MRF3).

Corolario 1. *Sea $\phi : [0,1] \to [0,1]$ una función estrictamente creciente tal que $\phi(0) = 0$ y $\phi(1) = 1$, y sea Ψ una función de semejanza de matrices. Entonces, la función $\Psi_{\phi,\phi^{-1}}$ es de semejanza de matrices.*

Ejemplo 2. *Del Ejemplo 1 y el Corolario 1 se deduce que*

$$\Psi(A,B) = \left(\prod_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} \left(1 - (a_{ij}^2 - b_{ij}^2)^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

es una función de semejanza de matrices.

Por otro lado, es posible también obtener una función de esta clase mediante una agregación de funciones de semejanza

de matrices (más información sobre funciones de agregación en [14]).

Proposición 2. *Sea $k \geq 2$ y sea $F : [0,1]^k \to [0,1]$ sin divisores de cero ni de uno [14]. Si $\Psi_1, \ldots, \Psi_k$ son funciones de semejanza de matrices, entonces la función $\Psi = F(\Psi_1, \ldots, \Psi_k) : \mathcal{M}_{m\times n}([0,1])^k \to [0,1]$ dada por*

$$\begin{aligned}\Psi(A,B) &= F(\Psi_1, \ldots, \Psi_k)(A,B)\\ &= F(\Psi_1(A,B), \ldots, \Psi_k(A,B)),\end{aligned}$$

es una función de semejanza de matrices.

En particular, el resultado de calcular la media aritmética de dos funciones de semejanza de matrices es una nueva función de semejanza de matrices.

IV. Métodos de construcción de funciones de semejanza de matrices

Para poder exponer los dos métodos de construcción, fijamos una serie de propiedades que una función F puede cumplir. Sean $F : [0,1]^N \to [0,1]$, $\mathbf{x} \in [0,1]^N$ y π una permutación de N elementos. Denotamos $\mathbf{x}_\pi = (x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(N)})$. Así, podemos fijar las siguientes propiedades.

(F1) $F(\mathbf{x}) = 1$ si y solo si $\mathbf{x} = (1, \ldots, 1)$,
(F2) $F(\mathbf{x}) = 0$ si y solo si $x_j = 0$ para algún $1 \leq j \leq N$,
(F3) $F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}_\pi)$ para toda permutación π de $\{1, \ldots, N\}$.

Las primeras dos propiedades fueron estudiadas en [15] para funciones de agregación. Este tipo de funciones han sido ampliamente utilizadas en muchos campos, en particular en visión artificial [16], [17].

El siguiente resultado refleja el primer método de construcción, que está basado en el concepto de función de equivalencia restringida.

Teorema 1. *Sea β una función que satisfaga (REF1)-(REF3) y $H : [0,1]^{mn} \to [0,1]$ una función que satisfaga (F1) y (F2). Entonces, la función $\Psi : \mathcal{M}_{m\times n}([0,1])^2 \to [0,1]$ dada por*

$$\Psi(A,B) = \underset{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}{H}(\beta(a_{ij}, b_{ij})) \tag{2}$$

es una función de semejanza de matrices.

Demostración. Sea Ψ como en (2). Veamos que Ψ es una función de semejanza de matrices. Para (MRF1), como H satisface ((F1)), se tiene que

$$\underset{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}{H}(\beta(a_{ij}, b_{ij})) = 1 \text{ si y solo si } \beta(a_{ij}, b_{ij}) = 1$$

para todos $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$. Ahora, por (REF2), esto equivale a que $a_{ij} = b_{ij}$ para todos $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$.

Probemos (MRF2). Por (F2), tenemos que

$$\underset{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}{H}(\beta(a_{ij}, b_{ij})) = 0 \text{ si y solo si } \beta(a_{ij}, b_{ij}) = 0,$$

para algunos $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$; que, por (REF3), equivale a $\{a_{ij}, b_{ij}\} = \{0,1\}$ para algunos $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$.

La propiedad (MRF3) también se cumple, ya que, por (REF1), $\beta(a_{ij}, b_{ij}) = \beta(b_{ij}, a_{ij})$.

□

Llamamos a las funciones de semejanza de matrices construidas de esta forma como generadas por el par (H, β).

La función de semejanza de matrices del Ejemplo 1 está generada por el par (H, β), donde H es el producto y $\beta(x,y) = 1 - (x-y)^2$.

El segundo método de construcción está basado en los grados de inclusión en el sentido de Sinha y Dougherty.

Teorema 2. *Sea $\sigma : \mathcal{M}_{m\times n}([0,1])^2 \to [0,1]$ que satisfaga (IG1) y (IG2) y sea $M : [0,1]^2 \to [0,1]$ una función satisfaciendo (F1)-(F3). Entonces la función $\Psi : \mathcal{M}_{m\times n}([0,1])^2 \to [0,1]$ dada por*

$$\Psi(A,B) = M\left(\sigma(A,B), \sigma(B,A)\right), \tag{3}$$

es una función de semejanza de matrices.

Demostración. Sea Ψ como en (3). Primero, para (MRF1), como M satisface ((F1)), se tiene que $M\left(\sigma(A,B), \sigma(B,A)\right) = 1$ si y solo si $\sigma(A,B) = \sigma(B,A) = 1$. Por (IG1), esto equivale a $A \leq B$ y $B \leq A$, que, a su vez, equivale a $A = B$.

(MRF2) se sigue de que $\Psi(A,B) = M\left(\sigma(A,B), \sigma(B,A)\right) = 0$ si y solo si $\sigma(A,B) = 0$ or $\sigma(B,A) = 0$, por ((F2)). Y, esto equivale a $(a_{ij} = 1$ y $b_{ij} = 0)$ o $(a_{ij} = 0$ y $b_{ij} = 1)$.

(MRF3) es directo por ((F3)).

□

Llamamos a las funciones de semejanza de matrices construidas por este método como las generadas por el par (M, σ).

Ejemplo 3. *La función dada por*

$$\Psi(A,B) = \text{mín}\left(\inf_{i,j}\{I_L(a_{ij}, b_{ij})\}, \inf_{i,j}\{I_L(b_{ij}, a_{ij})\}\right),$$

donde I_L denota la implicación de Łukasiewicz, $I_L(x,y) = \text{mín}(1, 1-x+y)$, es una función de semejanza de matrices construida por el segundo método, generada por $\sigma(A,B) = \inf_{i,j}\{I_L(a_{ij}, b_{ij})\}$ y M el mínimo.

V. Propiedades de las funciones de semejanza de matrices para la comparación de imágenes

Existen una serie de propiedades que son estándares en medidas para comparar imágenes [4], [5]. En esta sección presentamos las condiciones bajo las cuales las funciones sobre las que versa este trabajo cumplen varias de esas propiedades.

V-A. Igualdad y simetría

Es frecuente que una medida de comparación de imágenes solo pueda dar el máximo resultado posible cuando las dos imágenes a comparar sean la misma. Las funciones de semejanza de matrices cumplen esta condición por el primer axioma.

Otra propiedad habitual es que el orden en que se comparen ambas imágenes no tenga ningún efecto en el resultado. La condición (MRF3) asegura esta propiedad.

V-B. Complementos binarios y en grises

Según [4], una medida de similitud debe dar 0 cuando comparamos una imagen en blanco y negro con su negativa. Las funciones de semejanza de matrices cumplen esta propiedad debido al segundo axioma.

Otra propiedad deseada para esta clase de medidas es que el resultado de comparar dos imágenes cualesquiera y de comparar sus complementos por una negación fuerte sea el mismo. Es decir, se busca que $\Psi(A,B) = \Psi(A_c, B_c)$, con c una negación fuerte y $A_c = (c(a_{ij}))_{i,j=1}^{n}$ y $B_c = (c(b_{ij}))_{i,j=1}^{n}$.

En este respecto, tenemos los siguientes dos resultados.

Proposición 3. *Sea Ψ una función de semejanza de matrices generada por el par (H,β) tal que β cumple (REF4). Entonces Ψ satisface $\Psi(A,B) = \Psi(A_c, B_c)$.*

Proposición 4. *Sea Ψ una función de semejanza de matrices generada por el par (M,σ) tal que σ cumple (IG6). Entonces Ψ satisface $\Psi(A,B) = \Psi(A_c, B_c)$.*

Los recíprocos de estos resultados no se cumplen en general.

V-C. Invariancia por permutaciones

También es natural que la comparación de dos imágenes y la comparación de las mismas tras una transformación del dominio (ya sea una refracción, una rotación, etc.) obtengan el mismo resultado.

Consecuentemente, estudiamos las condiciones que tiene que cumplir una función de semejanza de matrices Ψ para que se cumpla $\Psi(A,B) = \Psi(\pi(A),\pi(B))$, para todas $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}([0,1])$ y toda permutación π del conjunto de índices.

Teorema 3. *Sea Ψ una función de semejanza de matrices generada por el par (H,β). Entonces Ψ cumple $\Psi(A,B) = \Psi(\pi(A),\pi(B))$, para todas A, B y permutación π si y solo si H satisfies (F3).*

Proposición 5. *Sea Ψ una función de semejanza de matrices generada por el par (M,σ). Si σ cumple (IG5), entonces Ψ cumple $\Psi(A,B) = \Psi(\pi(A),\pi(B))$, para todas A, B y permutación π.*

V-D. Monotonía

Llamamos monotonía a la siguiente condición, que asegura que el resultado de la comparación crece o decrece acorde a la diferencia en luminosidad.

(M) Si $A \leq B \leq C$, entonces $\Psi(A,C) \leq \Psi(A,B)$ y $\Psi(A,C) \leq \Psi(B,C)$.

Los siguientes resultados dan las condiciones bajo las cuales una matriz de semejanza de matrices cumple la condición (M).

Teorema 4. *Sea Ψ una función de semejanza de matrices generada por el par (H,β) con H una función creciente. Si β cumple (REF5), entonces Ψ cumple (M). Además, si H es estrictamente creciente en $(0,1]^{mn}$, el recíproco también se cumple.*

En particular, una función de semejanza de matrices Ψ, generada por el par (H,β) con β una función de equivalencia restringida y H una función de agregación que cumpla (F1)-(F2), satisface la propiedad (M).

Teorema 5. *Sea Ψ una función de semejanza de matrices generada por el par (M,σ) con M una función creciente. Si σ cumple (IG3) y (IG4), entonces Ψ cumple (M).*

V-E. Invariancia por cambios constantes de luminosidad

Es deseable que el resultado de comparar dos imágenes y las mismas con un cambio constante en la luminosidad coincida. Es decir, buscamos que

$$\Psi(A+\boldsymbol{\lambda}, B+\boldsymbol{\lambda}) = \Psi(A,B), \tag{4}$$

donde $\boldsymbol{\lambda}$ es la matriz $m \times n$ formada por $\lambda \in [0, 1 - \max(a_{ij}, b_{ij})]$ en todas las posiciones.

Los siguientes son los resultados que indican bajo qué condiciones una función de semejanza de matrices, construida mediante una de las dos construcciones presentadas, cumple la condición (4).

Proposición 6. *Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}([0,1])$, $\lambda \in [0, 1 - \max(a_{ij}, b_{ij})]$ y sea Ψ una función de semejanza de matrices generada por el par (H,β) con β tal que $\beta(x+\lambda, y+\lambda) = \beta(x,y)$. Entonces Ψ cumple* (4)*.*

Proposición 7. *Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}([0,1])$, $\lambda \in [0, 1 - \max(a_{ij}, b_{ij})]$ y sea Ψ una función de semejanza de matrices generada por el par (M,σ) con σ tal que $\sigma(A+\boldsymbol{\lambda}, B+\boldsymbol{\lambda}) = \sigma(A,B)$. Entonces Ψ cumple* (4)*.*

VI. Algoritmo de comparación de imágenes

En esta sección presentamos un algoritmo para comparar imágenes en escala de grises que se basa en medir la similitud entre los vecindarios correspondientes a píxeles de las dos imágenes (matrices $m \times n$).

Una de las ventajas de este método es que, mientras que el resultado de comparar dos vecindarios con una función de semejanza de matrices es un número, el resultado de comparar dos imágenes es una tercera que permite delimitar las zonas donde las imágenes se parecen más o menos, las zonas donde las dos imágenes son igual de parecidas o igual de distintas. En consecuencia, uno de los últimos pasos de nuestro algoritmo es segmentar la imagen resultante para obtener las diferentes regiones de similitud.

En la siguiente sección ilustramos la forma de utilizar este algoritmo para detectar cambios u objetos en movimiento en vídeo. Para este tipo de aplicación, donde se pretende separar el objeto en movimiento del fondo, utilizamos un algoritmo de umbralización como técnica para segmentar la imagen al final del algoritmo. Las técnicas de umbralización [18] consisten en dar con un umbral en las intensidades de la imagen que separan el objeto del fondo: los píxeles con una intensidad mayor a dicho umbral se clasifican como objeto y los restantes como fondo, o viceversa. La ventaja de utilizar este tipo de técnica para la segmentación es su bajo coste computacional.

El algoritmo que presentamos, Algorithm 1, recibe dos imágenes del mismo tamaño en escala de grises y devuelve una nueva imagen, la imagen de comparación. Una vez obtenemos esta nueva imagen, procedemos a segmentar la imagen con el algoritmo de umbralización de Otsu [19].

Algorithm 1 Algoritmo de comparación de imágenes

Input: Dos imágenes (del mismo tamaño) a comparar: I_1 y I_2

Output: La imagen de comparación C y el umbral t

1: **for** cada píxel en I_1 **do**
2: Determinar su vecindario en I_1 y el correspondiente en I_2
3: Usar una función de semejanza de matrices para comparar los vecindarios
4: Fijar el valor del píxel de C en esa posición con el resultado dado por la función de semejanza de matrices
5: **end for**
6: Aplicar el algoritmo de Otsu a C para obtener el umbral t

VII. Detección de cambios y movimiento en vídeo

En esta sección mostramos cómo puede ser utilizado el algoritmo de la sección anterior para detectar objetos en movimiento en un vídeo. El método consiste en comparar cada fotograma de un vídeo con un fotograma en el que el objeto a detectar no aparece (o no se mueve). Como ejemplo ilustrativo, en este trabajo utilizamos de fotograma de referencia el primero del vídeo. De esta forma, comparando cada fotograma con el señalado, logramos tantas imágenes de comparación como fotogramas tiene el vídeo. Es decir, obtenemos un nuevo vídeo en el que el objeto en movimiento es separado del fondo.

Nótese que es posible que en algún (incluso en muchos) fotogramas de un vídeo, el objeto a detectar no aparezca y no haya movimiento alguno. En estos casos, el algoritmo de Otsu nos dará un umbral muy cercano a 255 (máximo), que no será significativo. Por esta razón, en este ejemplo modificamos el algoritmo para solo tener en cuenta los umbrales que indican que ha habido un cambio significativo en la imagen. Consideramos que ha habido un cambio significativo cuando el umbral que obtenemos segmenta la imagen en dos zonas que contienen al menos el $20\,\%$ de las posibles intensidades. Es decir, si el umbral $t \geq 204$, consideramos que no ha habido cambios significativos y no segmentamos la imagen. Hay que tener en cuenta que escogemos este parámetro con fines ilustrativos, en una aplicación real requiere ser optimizado.

Utilizamos como ejemplo un fragmento de vídeo de la categoría básica de una base de datos de detección de cambios[1], que se describe en [20]. Al tratarse de vídeos a color, al extraer los fotogramas los transformamos a escala de grises y la función de semejanza de matrices que utilizamos para este ejemplo es la generada por el par (H, β), con $H = \min$ y $\beta(x, y) = 1 - |x - y|$.

[1] www.changedetection.net

El vídeo de este ejemplo proviene de una cámara fija en un escenario exterior que graba a viandantes en la calle. En la primera fila de la Figura 1 enseñamos cuatro fotogramas del vídeo original en las que se vislumbran dos personas. La segunda fila muestra los resultados de comparar cada fotograma con el fotograma de referencia (Figura 2), donde no hay ningún viandante. En la tercera fila observamos el resultado de aplicar el algoritmo de Otsu para segmentar la imagen y separar las personas en movimiento del fondo. La cuarta fila muestra la segmentación ideal, etiquetada por humanos, que podemos encontrar en la base de datos.

Recalcamos que el objetivo de este trabajo es presentar un algoritmo para comparar imágenes que se basa en el concepto de función de semejanza de matrices. El ejemplo de detección de cambios en vídeo es meramente ilustrativo, de ahí que no evaluemos numéricamente los resultados ni comparemos el método con otros en la literatura.

Figura 2. Primer fotograma del vídoe, fotograma de referencia para llevar a cabo la comparación.

VIII. Conclusiones

En este trabajo hemos estudiado la clase de funciones de semejanza de matrices (*matrix resemblance functions*). Hemos definido el concepto y hemos discutido varios métodos de construcción, primero estudiando la forma de generar estas funciones partiendo de otras de las mismas características y luego apoyándonos en los conceptos de funciones de equivalencia restringida y de grado de inclusión. Además, hemos mostrado varias propiedades de esta clase de funciones que justifican su uso en un algoritmo de comparación de imagen. En la última parte del trabajo, hemos expuesto dicho algoritmo y hemos ilustrado mediante un ejemplo una posible aplicación para detectar movimiento en vídeo.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por el servicio de investigación de la Universidad Pública de Navarra y los proyectos APVV-14-0013 y TIN2016-77356-P (AEI/FEDER, UE).

Referencias

[1] R. Moreton and J. Morley, "Investigation into the use of photoanthropometry in facial image comparison," *Forensic Science International*, vol. 212, no. 1, pp. 231 – 237, 2011.

[2] M. R. Stevens and J. R. Beveridge, "Image comparison techniques in the context of scene refinement," in *Pattern Recognition, 2000. Proceedings. 15th International Conference on*, vol. 1. IEEE, 2000, pp. 685–688.

[3] H. Rau and C.-H. Wu, "Automatic optical inspection for detecting defects on printed circuit board inner layers," *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, vol. 25, no. 9, pp. 940–946, 2005.

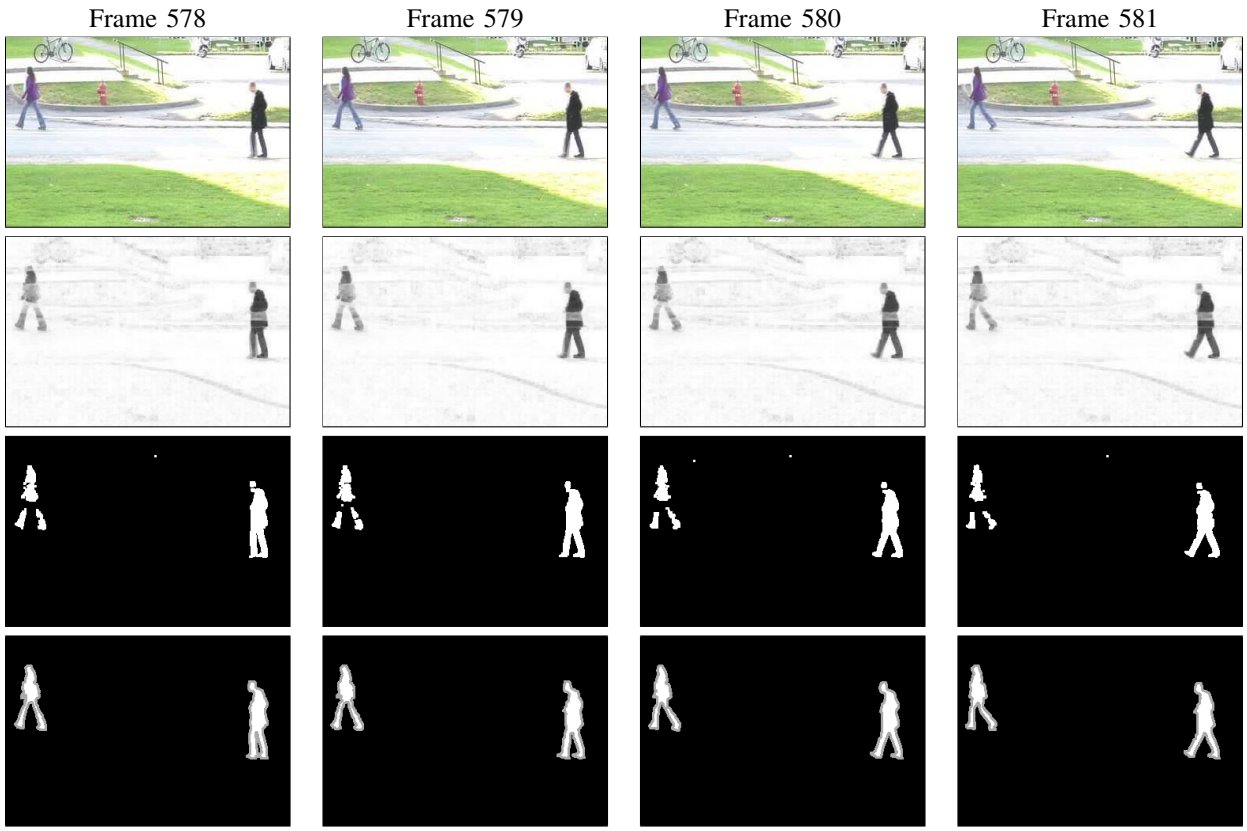


Figura 1. *Primera fila:* Fotogramas originales del vídeo. *Segunda fila:* Resultados de comparar los fotogramas del vídeo con el fotograma de referencia. *Tercera fila:* Resultado de aplicar el algoritmo de umbralización de Otsu. *Cuarta fila:* Imágenes de referencia etiquetadas por humanos.

[4] H. Bustince, M. Pagola, and E. Barrenechea, "Construction of fuzzy indices from fuzzy DI-subsethood measures: Application to the global comparison of images," *Information Sciences*, vol. 177, no. 3, pp. 906 – 929, 2007.

[5] D. V. der Weken, M. Nachtegael, and E. E. Kerre, "Using similarity measures and homogeneity for the comparison of images," *Image and Vision Computing*, vol. 22, no. 9, pp. 695 – 702, 2004.

[6] M. Sesma-Sara, L. De Miguel, M. Pagola, A. Burusco, R. Mesiar, and H. Bustince, "New measures for comparing matrices and their application to image processing," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 61, pp. 498 – 520, 2018.

[7] H. Bustince, E. Barrenechea, and M. Pagola, "Restricted equivalence functions," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 157, no. 17, pp. 2333 – 2346, 2006.

[8] D. Sinha and E. R. Dougherty, "Fuzzification of set inclusion: Theory and applications," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 55, no. 1, pp. 15 – 42, 1993.

[9] H. Bustince, "Indicator of inclusion grade for interval-valued fuzzy sets. Application to approximate reasoning based on interval-valued fuzzy sets," *International Journal of Approximate Reasoning*, vol. 23, no. 3, pp. 137 – 209, 2000.

[10] H. Bustince, E. Barrenechea, M. Pagola, and F. Soria, "Weak fuzzy S-subsethood measures: Overlap Index," *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, vol. 14, no. 05, pp. 537–560, 2006.

[11] H. Bustince, V. Mohedano, E. Barrenechea, and M. Pagola, "Definition and construction of fuzzy DI-subsethood measures," *Information Sciences*, vol. 176, no. 21, pp. 3190 – 3231, 2006.

[12] L. M. Kitainik, *Fuzzy Inclusions and Fuzzy Dichotomous Decision Procedures*. Dordrecht: Springer Netherlands, 1987, pp. 154 – 170.

[13] V. R. Young, "Fuzzy subsethood," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 77, no. 3, pp. 371 – 384, 1996.

[14] G. Beliakov, H. Bustince, and T. Calvo, *A Practical Guide to Averaging Functions*, ser. Studies in Fuzziness and Soft Computing. Springer International Publishing, 2016.

[15] H. Bustince, J. Montero, E. Barrenechea, and M. Pagola, "Semiautoduality in a restricted family of aggregation operators," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 158, no. 12, pp. 1360 – 1377, 2007.

[16] G. Beliakov, H. Bustince, and D. Paternain, "Image reduction using means on discrete product lattices," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 21, no. 3, pp. 1070–1083, 2012.

[17] D. Paternain, J. Fernández, H. Bustince, R. Mesiar, and G. Beliakov, "Construction of image reduction operators using averaging aggregation functions," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 261, pp. 87–111, 2015.

[18] A. Jurio, H. Bustince, M. Pagola, A. Pradera, and R. R. Yager, "Some properties of overlap and grouping functions and their application to image thresholding," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 229, pp. 69–90, 2013.

[19] N. Otsu, "A threshold selection method from gray-level histograms," *IEEE transactions on systems, man, and cybernetics*, vol. 9, no. 1, pp. 62–66, 1979.

[20] N. Goyette, P.-M. Jodoin, F. Porikli, J. Konrad, and P. Ishwar, "Changedetection. net: A new change detection benchmark dataset," in *Computer Vision and Pattern Recognition Workshops (CVPRW), 2012 IEEE Computer Society Conference on*. IEEE, 2012, pp. 1–8.

Detección del Fracaso Académico y Evaluación de la Práctica Docente mediante la Comunicación Automatizada con un Chatbot

Jeovani M. Morales, Rosana Montes y Francisco Herrera
Andalusian Research Institute on Data Science and Computational Intelligence, DaSCI
Universidad de Granada, Granada, España
E-mails: jeovani@correo.ugr.es, rosana@ugr.es, herrera@decsai.ugr.es

***Resumen*—Este estudio contempla el uso de un modelo simple de comunicación automatizada a través de un chatbot de Telegram, denominado EDUtrack, que se conecta a Moodle, un Sistema de Gestión del Aprendizaje. Está pensado para docentes interesados en evaluar sus clases de alguna manera, así como mantener informados a sus estudiantes sobre su rendimiento académico. EDUtrack define dos perfiles de usuario, estudiante y docente, que a través del uso de comandos interactúan con el bot para obtener información específica. El estudiante será informado de su Factor de Riesgo Académico si se encuentra en riesgo de suspender la asignatura. Al mismo tiempo permitirá recoger la percepción de los estudiantes sobre la satisfacción de la práctica docente a través del uso de información lingüística. El perfil de docente por su parte, podrá solicitar en cualquier momento el listado de los estudiantes con un Factor de Riesgo Académico crítico, así como revisar el resultado de la evaluación proporcionada por los estudiantes de su práctica docente.**

I. Introducción

Las Instituciones de Educación Superior (IES), están experimentando una constante evolución dirigida a la mejora de la experiencia de aprendizaje de los estudiantes, así como a proporcionar nuevas metodologías que permitan ofrecer una educación de calidad. El fracaso académico, ya sea por deserción o suspenso de una o varias asignaturas, es un problema recurrente en la educación actual. Según los informes de Eurostat 2016[1] la proporción de personas con abandono escolar en la Unión Europea se encuentra en un 10.7%, mientras que España ocupa el segundo puesto de mayor abandono con un 19%. Actualmente con la integración de las tecnologías de la información (TIC), los Sistemas de Gestión del Aprendizaje (LMS por sus siglas en inglés), surge una gran cantidad de información sobre el estudiante. Esta información puede ser tratada para identificar comportamientos en los estudiantes, así como la detección de aquellos que se encuentren en riesgo de fracaso académico.

Frente a esta situación, un profesor comprometido con la provisión de un ambiente de educación de calidad se cuestiona la razón del fracaso de sus alumnos. ¿Es el profesor quién no cubre las necesidades de los estudiantes o es el mismo estudiante quien es responsable de su fracaso?

[1]http://ec.europa.eu/eurostat - Europe 2020: early leavers from education and training

En esta comunicación se proponen dos métricas que pueden ayudar a clarificar este interrogante, el cálculo del Factor de Riesgo Académico (FRA), y la Evaluación de la Práctica Docente (EPD). FRA es un indicador que proporciona información sobre el rendimiento académico de un estudiante y determina la situación en la que se encuentra su factor de riesgo: ninguno, bajo, moderado, crítico, muy crítico o irrecuperable. Actualmente existen dos campos de investigación dedicados al análisis de estos datos: Educational Data Mining (EDM) [1] y Learning Analytics (LA) [2], los cuales han sido utilizados en diversos estudios que abordan la predicción o detección temprana de estudiantes en riesgo de fracaso académico [3, 4] y detección y reducción del abandono escolar [5, 6]. En estos ámbitos de trabajo los resultados pueden no ser fáciles de interpretar cuando no se tiene experiencia en minería de datos.

EPD es una métrica que se obtiene en base a la satisfacción de los estudiantes con respecto a este criterio. La satisfacción es un sentimiento subjetivo basado en las percepciones de quien evalúa. Las percepciones por su naturaleza suelen ser vagas e imprecisas, colocándonos en un entorno difuso de toma de decisiones. En un entorno como este, el uso de un modelo lingüístico en lugar de la información numérica puede ser más adecuado por la naturaleza de la información al utilizar *Linguistic Decision Making* (LDM) [7].

Cuando un problema se resuelve utilizando información lingüística, requiere de un modelo computacional para procesar la información. Dentro de la teoría difusa se destaca la metodología de Computing with Words (CW) [8]. Esta metodología procesa con palabras en lugar de números proponiendo una forma directa de realizar procesos computacionales lingüísticos.

Con base a lo anterior, la evaluación de la práctica docente se puede abordar como un problema LDM, donde se procesa información lingüística para determinar la mejor opción en un problema de toma de decisiones, que a su vez es evaluada por múltiples expertos convirtiendose en un problema *Multi-Expert Linguistic Decision Making* (MELDM). Cada estudiante es un experto de la experiencia de aprendizaje lo que les permite ser perfectos evaluadores al ofrecer su percepción de forma lingüística para evaluar la práctica docente.

Este trabajo propone la integración de un bot de Tele-

gram con Moodle, denominado EDUtrack, el cual sirve como medio de comunicación automatizada para informar de forma continua a los estudiantes su FRA, y al mismo tiempo al docente sobre aquellos estudiantes que se encuentran en riesgo de fracaso académico. Además, sirve de instrumento para la recogida y procesamiento de los datos utilizando el modelo de representación lingüística de 2-tuplas [9] para operar con valoraciones lingüísticas y así evaluar la práctica docente.

El trabajo se estructura de la siguiente forma. En la Sección 2 se introduce los conceptos significativos del estudio, abordando los LMS, chatbots y los modelos lingüísticos de toma de decisiones. La Sección 3 describe el procedimiento para calcular el Factor de Riesgo Académico y la Evaluación de la Práctica Docente. La Sección 4 presenta la herramienta EDUtrack y sus funcionalidades. En la Sección 5 se describe un ejemplo ilustrativo de los cálculos anteriores. Para finalizar en la Sección 6 con la discusión de las conclusiones.

II. Antecedentes

En esta sección se detalla los aportes de la integración de los sistemas LMS en la educación. Más adelante se define el concepto de chatbot y su interacción con el usuario. Finalmente se realiza una breve introducción al modelo lingüístico de 2-tuplas para la toma de decisiones.

A. Sistemas de Gestión del Aprendizaje

La integración de las tecnologías de la información y comunicación (TIC) han abierto las puertas a modalidades como e-learning (totalmente en línea) y b-learning (aprendizaje mezclado). Estas modalidades hacen uso de la tecnología para crear nuevos espacios de aprendizaje en donde los estudiantes pueden acceder a los recursos y actividades de una forma más simple y eficiente gracias a las herramientas tecnológicas.

Una de las principales herramientas implementadas por las IES para mejorar la enseñanza [10] y que ha permitido la sinergia entre la educación y las tecnologías, son los LMS, siendo Moodle el software libre más popular actualmente. Un LMS nos permite realizar un seguimiento en línea de los avances del estudiante al emplearse para la entrega de recursos educativos electrónicos, el apoyo de entornos interactivos y la gestión de evaluaciones [11].

La integración de los LMS, genera una gran cantidad de datos relacionados con el proceso de enseñanza aprendizaje. Estos datos se pueden analizar para predecir con base a la conducta y acciones de los estudiantes dentro de los LMS, el rendimiento académico y el riesgo de fracaso escolar.

B. Chatbots de Telegram

Telegram es una de las aplicaciones móviles de mensajería instantánea más populares. Entre sus características podemos encontrar que es libre, abierto y provee de privacidad, rapidez, y seguridad. Además, cuenta con el servicio de chatbots. Un chatbot es un sistema informático que utiliza Inteligencia Artificial y el aprendizaje automático, capaz de mantener un diálogo mediante un lenguaje natural con un humano [12].

Los usuarios pueden comunicarse e interactuar con los chatbots mediante una serie de comandos preprogramados gracias a la API de Telegram[2]. A su vez los chatbots se pueden conectar a Moodle con el uso de Web service API functions[3] del sistema. Con ello se puede extraer información analítica del estudiante en el curso (calificaciones de actividades, registros de uso, datos informativos del estudiante, entre otros).

C. Modelos Lingüísticos de Toma de Decisiones

La toma de decisiones es una actividad inherente a los seres humanos. Dependiendo del problema abordado, muchos de los casos se pueden tratar con información numérica y precisa. Sin embargo, en otro tipo de problemas donde las decisiones se basan en información como opiniones o percepciones, el enfoque difuso [13] y el uso de variables lingüísticas han dado buenos resultados.

Zadeh [13] introdujo el concepto de variable lingüística, como aquella variable cuyos valores no son numéricos, sino palabras en un lenguaje natural. Una variable lingüística es menos precisa que una variable numérica, pero más cercana a los procesos cognitivos humanos.

Existen diversos métodos para abordar los problemas LDM (TOPSIS [14], ELECTRE [15], entre otros). Desde la perspectiva de la lógica difusa, cuando los modelos probabilísticos ya no son tan funcionales y existe una tolerancia a la imprecisión surgen metodologías como *Computing with Words* (CW) [8].

Debido al uso de LDM en el mundo real y la necesidad de CW, existen diversos modelos computacionales lingüísticos, que denominaremos clásicos, como el modelo basado en funciones de membresía [16], modelo simbólico lingüístico [17]. Estos modelos clásicos requieren de un proceso de aproximación para proporcionar resultados lingüísticos interpretables.

D. Modelo Computacional Lingüístico 2-tuplas

Herrera y Martínez [9] presentaron el modelo de representación lingüística de 2-tuplas, resolviendo algunos problemas de precisión y perdida de información que presentaban los modelos clásicos. La representación lingüística 2-tuplas define el valor de la traslación simbólica α como el valor correspondiente a la diferencia de información entre un valor i de índice con correspondencia directa al término lingüístico que se espera como resultado. Sea $S = \{s_0, \ldots, s_g\}$ un conjunto de términos lingüísticos utilizado para toma de decisiones. Sea $\beta \in [0, g]$ el valor resultante de un operador simbólico, donde $g + 1$ es la carnalidad de S. La información lingüística es expresada con el par (s_i, α), esto es, s_i la etiqueta lingüística más cercana en el conjunto S y α valor numérico de traslación simbólica. Las operaciones de transformación de esta representación son dos:

- La función $\Delta : [0, g] \rightarrow \langle S \rangle$, asigna una 2-tupla asociada a S y definida como $\langle S \rangle = S \times [-0.5, 0.5)$:

$$\Delta(\beta) = (s_i, \alpha), \; con \; i = round(\beta), \alpha = \beta - i. \quad (1)$$

[2]https://core.telegram.org/api

[3]https://docs.moodle.org/dev/Web_service_API_functions

- La función $\Delta^{-1} : \langle S \rangle \rightarrow [0, g]$, identifica una 2-tupla de $\langle S \rangle$ con un valor numérico en el intervalo $[0, g]$:

$$\Delta^{-1}(s_i, \alpha) \; = \; i + \alpha \; = \; \beta \tag{2}$$

Una vez representada la información lingüística como un valor continuo, se puede operar con dicha información mediante los operadores de agregación. Para la toma de decisión, la agregación de múltiples valores es esencial. Uno de los operadores más comunes es el operador de la media aritmética extendida para valores lingüísticos de 2 tuplas, el cual se define como:

Definición 1. [9] Sea $X = \{(s_1, \alpha_1), \ldots, (s_n, \alpha_n)\}$ un conjunto de valores lingüísticos de 2-tuplas, la media aritmética de 2-tuplas, x, se calcula como:

$$x(X) = \Delta\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Delta^{-1}(s_i, \alpha_i)\right) \tag{3}$$

III. Detección del Fracaso Académico y Evaluación de la Práctica Docente

Para prevenir el fracaso académico se deben considerar el compromiso de los estudiantes con el proceso de aprendizaje, así como las estrategias aplicadas por el docente en su práctica para llevar los conocimientos a sus estudiantes.

A. Factor de Riesgo Académico

FRA es un indicador que determina el riesgo de fracaso académico con base a la relación de la diferencia entre el porcentaje máximo posible de las actividades en un momento dado menos el porcentaje obtenido en cada una de esas actividades, con el potencial de recuperación de un estudiante a partir de ese momento hasta el final del ciclo escolar.

Sea t la variable tiempo que representa la semana en la que se realiza una solicitud para conocer FRA; sea $Q = 15$ el número de semanas totales de un cuatrimestre, se define el ciclo escolar (CE) de una asignatura como el conjunto de actividades ordenadas potencialmente calificables a lo largo del tiempo para un estudiante.

En una asignatura se tienen N estudiantes, $E = \{E_1, \ldots, E_N\}$ tal que $n = (1, \ldots, N)$. Así mismo la asignatura maneja un máximo de J actividades ordenas y predefinidas a lo largo del curso, $A = \{A_1, \ldots, A_J\}$ tal que $j = (1, \ldots, J)$, como por ejemplo foros, exámenes, etc.

Para determinar el número de actividades abiertas en una semana determinada, tomando en cuenta que dichas actividades son acumulables, se usa la función $\tau(t) \in [1, J]$. Es decir, el número de calificaciones totales que puede tener el estudiante al final del curso es $\tau(Q) = J$. Nótese que $\tau(0) = 0$.

Para reflejar una evaluación continua, el ciclo escolar se define en función de la variable tiempo como $CE(t) = \{A_1, A_2, \ldots, A_{\tau(t)}\}$ con $t = (1, \ldots, 15)$. Con A_i recogemos aspectos como calificaciones por examen o por actividad de Moodle. Según el docente, en el cálculo de la calificación, determinadas actividades pueden ser más importantes que otras, por lo que se define W_A como el vector de pesos de las actividades, $W_A = \{W_1, \ldots, W_J\}$.

Cada actividad entregada por el estudiante es calificada por el docente definiendo así la calificación obtenida (CO) como $CO_{A_i}(E_n) \in [0, 10]$. El vector de pesos ordenado con respecto al conjunto de actividades A_i es $W(t) = \{W'_1, \ldots, W'_{\tau(t)}\}$. Así mismo se debe definir el conjunto de actividades A_k con $k = (\tau(t) + 1, \ldots, \tau(Q))$ como el conjunto de actividades que aún no han sido calificadas y su vector de pesos ordenado como $W(t)^{-1} = \{W''_{\tau(t)+1}, \ldots, W''_{\tau(Q)}\}$

Para determinar el $FRA(E_n, t)$ se deben calcular dos valores también dependientes del tiempo, $\forall t \leq Q$.

Definición 2. La inversa de la calificación $IC(E_n, t) \in [0, 1]$, es la relación entre el porcentaje total de calificación de las actividades abiertas en t y el porcentaje de calificación obtenido por el estudiante en dichas actividades. Cuanto más cerca de 1, mayor será el riesgo de fracaso académico.

$$IC(E_n, t) = 1 - \left(\frac{\sum_{i=1}^{\tau(t)}\left(\frac{W'_i}{10}CO(A_i)\right)}{\sum_{i=1}^{\tau(t)} W'_i}\right) \tag{4}$$

Definición 3. El Factor de Recuperación $FR(E_n, t) \in [0, 1]$ es la relación del porcentaje de calificación obtenidas al momento de una consulta más el porcentaje de calificación de las actividades aún no abiertas. Siendo así, $FR(E_n, t)$ el máximo porcentaje de calificación que el estudiante puede obtener si obtuviese una calificación perfecta en todas las actividades que quedan por abrirse.

$$FR(E_n, t) = \sum_{i=1}^{\tau(t)}\left(\frac{W'_i}{10}CO(A_i)\right) + \sum_{k=\tau(t)+1}^{\tau(Q)}(W''_k) \tag{5}$$

Para el cálculo de $FRA \in [0, 1]$, el tiempo (t) es importante así como el factor de recuperación (FR) potencial. Juntos determinan la importancia los criterios, $IC(E_n, t)$ y $FR(E_n, t)$. A mayor tiempo, el peso de FR se reduce y aumenta el de las actividades realizadas.

Definición 4. La función Factor de Riesgo Numérico $FRN(t)$ sirve para determinar el peso de $IC(E_n, t)$ y $FR(E_n, t)$ en relación del tiempo en que se realiza una consulta del FRA. El parámetro $\gamma \in [0, 1]$ determina el grado de combinación de 2 factores dependientes del tiempo, $\gamma = (\tau(t)/Q)FR(E_n, t)$.

$$FRN(t) = \gamma \cdot (1 - IC(E_n, t)) + (1 - \gamma)FR(E_n, t) \tag{6}$$

por tanto para cada $t <= Q$ se define FRA como :

Definición 5. $FRA(E_n, \forall t)$ es la relación entre $IC(E_n, t)$ y $FR(E_n, t)$ y toma su valor de acuerdo al valor de $FRN(t)$ según el siguiente conjunto de términos lingüísticos $S_{FRA} =$ {*Ninguno, Bajo, Moderado, Crítico, Muy Crítico, Irrecuperable*}.

$$FRA(E_n, \forall t) = \begin{cases} \text{Ninguno} & \text{si} \quad 0.9 < FRN(t) \leq 1 \\ \text{Bajo} & \text{si} \quad 0.8 < FRN(t) \leq 0.9 \\ \text{Moderado} & \text{si} \quad 0.7 < FRN(t) \leq 0.8 \\ \text{Critico} & \text{si} \quad 0.6 < FRN(t) \leq 0.7 \\ \text{Muy_Critico} & \text{si} \quad 0.5 \leq FRN(t) \leq 0.6 \\ \text{Irrecuperable} & \text{si} \quad FRN(t) < 0.5 \end{cases}$$

B. Evaluación de la Práctica Docente

La satisfacción es una métrica que permite conocer las percepciones de los estudiantes. En el área de marketing existen cuestionarios de una pregunta que son factibles para evaluar la satisfacción de un cliente con un servicio o producto. Estos cuestionarios permiten determinar a los usuarios promotores, pasivos y detractores según su grado de satisfacción. Utilizando la pregunta:

¿Qué tan satisfecho estás con la práctica docente de tu profesor en esta asignatura?

mediante la Eq. (3) se procesan las valoraciones de los estudiantes como entrada en un MELDM utilizando la agregación 2 veces para obtener la satisfacción con la experiencia.

Definición 6. Sea $E = \{E_1, \ldots, E_N\}$ un conjunto de estudiantes que valoran su propia satisfacción sobre la práctica docente de su profesor. Y sea $X_t = \{s_1, \ldots, s_N\}$ el conjunto de valores lingüísticos proporcionados por los estudiantes para valorar $EPD(t) \in ([s_0, s_g], \alpha)$ cada semana.

$$EPD(t) = \Delta\left(\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t}(x(X_i))\right) \tag{7}$$

IV. Chatbot de Telegram

EDUtrack es una herramienta simple de información y recolección de datos, que funciona como interfaz de comunicación automatizada entre los usuarios (estudiante y docente).

A. Funcionalidad

A través de comandos tanto el estudiante como docente podrán comunicarse con el bot. Un comando es una instrucción previamente definida en el bot la cual inicia con el símbolo `"/"`. Un comando puede requerir argumentos o no, en este documento se señala como ”+arg” en la descripción del comando, siendo ”arg” el argumento requerido.

- `/fra_est`: Muestra el FRA del estudiante.
- `/eva_docente`: Muestra la pregunta para la evaluación de EPD.
- `/fra_asg+id_asignatura`: Muestra el registro de los estudiantes en riesgo de una asignatura.
- `/res_eva_docente +id_asignatura`: Muestra el resultado de EPD.

B. Comunicación con el Estudiante

Alerta de FRA automatizado: Esta alerta (Fig. 1), se enviará al estudiante cuando su FRA adquiera el valor de riesgo moderado o mayor con la finalidad de que pueda tomar acciones para recuperarse. El mensaje contendrá el valor de FRA y el valor del Factor de Recuperación (FR), qué es la porcentaje máximo que puede obtener el estudiante. Cada semana se calculará el FRA de forma automática y se informará solo a aquellos que se encuentren en riesgo, por lo que no requiere de ningún comando de comunicación.

Consulta de FRA : Mediante el comando `/fra_est` (Fig. 2), EDUtrack proporcionara al estudiante los valores FRA y FR al momento de la consulta.

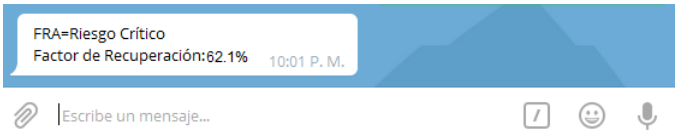


Fig. 1. Mensaje de alerta cuando un estudiante se encuentra en riesgo de fracaso académico.

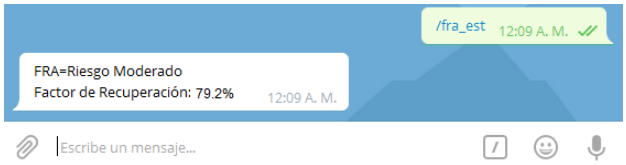


Fig. 2. Solicitud del FRA por un estudiante.

EPD: Mediante el comando `/eva_docente` (Fig. 3), el bot proporcionara al estudiante una pregunta y la semántica requerida para valorar su satisfacción con la práctica docente. Dicha evaluación se realiza cada semana con la intención de monitorizar la práctica docente.

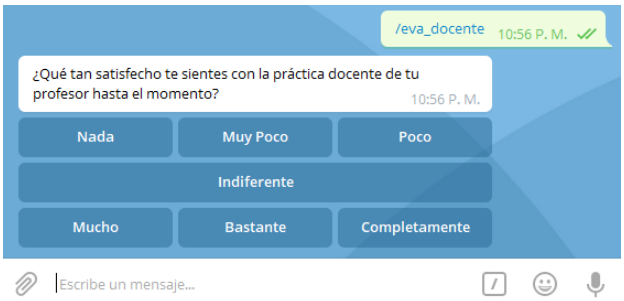


Fig. 3. Evaluación de la práctica docente utilizando información lingüística.

C. Comunicación con el Docente

Consulta de $FRA(E_n, t)$: Mediante el comando `/fra_asg` +id_asignatura, (Fig. 4), se le proporcionara al docente el registro de los estudiantes que se encuentra en riesgo en la asignatura seleccionada al momento de la consulta.

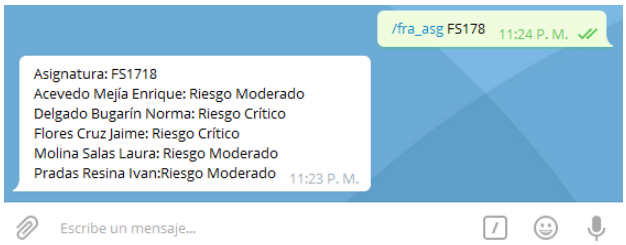


Fig. 4. Resultado de los alumnos en riesgo académico en la asignatura FS1718.

Consulta de EPD: Mediante el comando `/res_eva_docente` +id_asignatura (Fig. 5), el bot

proporcionara al docente la representación lingüística del resultado de la valoración de los estudiantes sobre la satisfacción de la práctica docente.

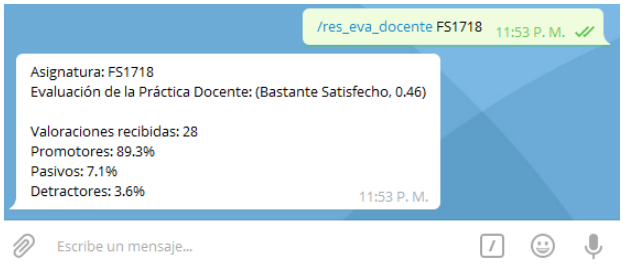


Fig. 5. Resultado de la evaluación de la práctica docente en una asignatura.

V. Ejemplo ilustrativo

Se tomarán 7 estudiantes al azar de una asignatura, para obtener el cálculo del riesgo de fracaso académico y la recolección y procesamiento de información lingüística para la evaluación de la práctica docente en dos semanas distintas de un ciclo escolar, semana 8 y 14. Por cuestiones de espacio, se podrá acceder a los datos utilizados para el ejemplo desde el sitio https://creasick.github.io/Chatbot_FRA/.

A. Cálculo del Factor de Riesgo Académico

Para el cálculo del FRA de cada estudiante para $t = 8$ se recoge la información utilizando la Eq. (4), obteniendo los resultados mostrados en la Tabla I:

Tabla I
Cálculo del Factor de Riesgo académico de 7 estudiantes en la semana 8 del ciclo escolar.

t=8	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7
IC	0.0628	0.1799	0.7285	0.458	0.4281	0.1311	0.4221
FR	0.9706	0.9158	0.6588	0.7855	0.7995	0.9386	0.7883
FRN	0.9696	0.869	0.5277	0.6835	0.7024	0.9037	0.6872
FRA	Ninguno	Bajo	Muy_Crítico	Crítico	Moderado	Ninguno	Crítico

Tabla II
Cálculo del Factor de Riesgo académico de 7 estudiantes en la semana 14 del ciclo escolar.

t=14	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7
IC	0.1507	0.2242	0.6705	0.5823	0.3309	0.0744	0.5159
FR	0.8674	0.8027	0.41	0.4876	0.7089	0.9345	0.546
FRN	0.8527	0.7825	0.3792	0.4558	0.6826	0.9267	0.5144
FRA	Bajo	Moderado	Irrecuperable	Irrecuperable	Crítico	Ninguno	Muy Critico

Analizando los resultados de la Tabla I se puede apreciar que en la semana 8, los estudiantes E_3, E_4 y E_7, son los estudiantes con mayor riesgo al fracaso. Aun cuando su FR indica que tienen opción de aprobar, claramente el estudiante E_3 se encuentra en una situación complicada, el FR_{E_3} indica que puede alcanzar hasta 65.88% del porcentaje de la calificación total en caso dado de que el resto de sus actividades fueran perfectas. Mientras que FRN_{E_3} indica que en base a su desempeño actual durante el ciclo es probable que solo pueda obtener el 52.77%, por lo que se considera que el estudiante se encuentra en riesgo *muy crítico*.

En la Tabla II se observa la semana 14, aquellos estudiantes con un buen rendimiento no modificaron mucho su conducta, mientras que los estudiantes E_3 y E_4, pasaron de un riesgo considerable, a un riesgo irrecuperable a solo una semana de finalizar el ciclo escolar.

Tomando como ejemplo al estudiante E_3, quien a pesar de ser informado a medio ciclo escolar (semana 8), se enfrenta a una empresa complicada para recuperarse. EDUtrack tiene una de sus funcionalidades en este punto al informar el FRA desde el inicio del ciclo escolar y de forma continua. Permite tomar diversas estrategias de prevención y recuperación tanto por parte del estudiante como por parte del docente, previniendo así el fracaso académico.

B. Evaluación de la Práctica Docente

Como se mencionó previamente en la Sección IV-B, los estudiantes pueden evaluar la práctica docente mediante EDUtrack, (Fig. 3). Cada estudiante por semana proporciona su percepción indicando así su satisfacción. Tras la recolección del vector de preferencias de los estudiantes por semana se puede calcular el $EPD(t)$ con las valoraciones lingüísticas de los estudiantes.

Tabla III
Valoraciones sobre la satisfacción de los estudiantes hasta la semana 8 del ciclo escolar.

t=8	E_1	E_2	E_3	E_4	E_15	E_6	E_7
t_1	s_5	s_6	-	s_5	s_6	s_6	s_4
t_2	s_6	s_6	-	s_6	s_6	s_5	s_2
t_3	s_6	s_5	-	s_6	s_6	s_5	s_6
t_4	s_6	s_6	s_5	s_6	s_6	s_6	s_6
t_5	s_5	s_6	s_2	s_6	s_5	s_6	s_6
t_6	s_6	s_6	s_6	s_6	s_6	s_4	s_6
t_7	s_6	s_5	s_6	s_6	s_5	s_5	s_6
t_8	s_6	s_6	s_4	s_6	s_4	s_6	s_6
							$EPD(t)$

$EPD(t)$
$(s_5, 0.33)$
$(s_5, 0.17)$
$(s_6, -0.33)$
$(s_6, -0.14)$
$(s_5, 0.14)$
$(s_6, -0.29)$
$(s_6, -0.43)$
$(s_5, 0.43)$
$(s_5, 0.49)$
$(Bastante, 0.49)$

El cálculo de $EPD(t)$ es la media aritmética extendida del modelo de 2-tuplas, de la media aritmética extendida de cada una de las semanas transcurridas. En la Tabla III se muestran las valoraciones de los estudiantes sobre su satisfacción en las primeras 8 semanas. El indicador EDP nos ofrece información sobre la satisfacción de los estudiantes sobre la práctica docente, siendo el resultado que los estudiantes se sienten $Bastante$ satisfechos con la práctica docente. Se puede considerar que el docente puede seguir utilizando las estrategias docentes que ha empleado hasta el momento. Cabe destacar que E_3 no cuenta con valoraciones durante las primeras 3 semanas, y junto con su desempeño académico durante este período, se podría suponer que el estudiante no asistió a clases.

VI. Conclusión

La práctica docente es un factor importante en el proceso de enseñanza aprendizaje, ya que determina el cómo, cuándo y dónde el docente transmite sus conocimientos a los estudiantes, por lo que es importante que sea evaluado desde la perspectiva de estos.

Los dispositivos móviles, así como las aplicaciones de mensajería instantánea son herramientas de uso común entre los estudiantes actuales por lo que son un canal de comunicación que no requiere de un alto coste para implementarse. De esta forma el uso de chatbots actualmente se ha ido incrementado en el ámbito educativo.

Este estudio propone un modelo simple de comunicación automatizada denominada EDUtrack, el cual permitirá informar a los estudiantes de su FRA, además de evaluar su satisfacción con la práctica docente. Entre sus bondades podemos encontrar:

- Una interacción sencilla y natural con los estudiantes.
- Es una herramienta de bajo coste y que a pesar de su sencillez tiene un gran potencial, al ofrecer resultados en un lenguaje natural y de fácil compresión para una persona, mejorando así la interpretación de los resultados.
- Permite el acceso a Moodle y a la información de estudiantes, ofreciendo diversas posibilidades de análisis y toma de decisiones.
- Integra un sistema de información continua sobre el FRA, para la detección de estudiantes en riesgo de fracaso académico por lo que está pensado para cualquier docente que pretenda mantenerse al tanto del estatus de sus estudiantes e informarlos sobre su rendimiento académico.
- Permite conocer la satisfacción de los estudiantes con respecto a la práctica docente, con lo que el profesor puede mejorar su desempeño al igual que el estudiante.

Gracias a estas características se pueden desarrollar estrategias preventivas que permitan reducir el fracaso académico y mejorar la calidad educativa.

Las proyecciones a futuro de esta herramienta son:

1) Posibilidad de integrar un sistema que genere gráficos para el análisis de la información del FRA, lo que proporcionaría un resultado visual que abonaría interpretabilidad al lenguaje natural ya utilizado.
2) Actualmente Moodle en su versión 3.4 ha implementado un sistema de detección de estudiantes en riesgo haciendo uso de machine learning. Por lo que se considera que merece la pena realizar una comparación entre el sistema EDUtrack y el sistema que integra Moodle. Así mismo se podría pensar en una integración de ambos sistemas para aprovechar el potencial de cada herramienta.

Agradecimientos

Este trabajo fue parcialmente apoyado por el proyecto de investigación TIN2017-89517-P del Ministerio de Economía.

Referencias

[1] C. Romero and S. Ventura, "Educational data mining: A survey from 1995 to 2005," *Expert systems with applications*, vol. 33, no. 1, pp. 135–146, 2007.

[2] C. Bach, "Learning analytics: Targeting instruction, curricula and student support," *Office of the Provost, Drexel University*, 2010.

[3] J.-P. Vandamme, N. Meskens, and J.-F. Superby, "Predicting academic performance by data mining methods," *Education Economics*, vol. 15, no. 4, pp. 405–419, 2007.

[4] L. P. Macfadyen and S. Dawson, "Mining lms data to develop an "early warning system" for educators: A proof of concept," *Computers & education*, vol. 54, no. 2, pp. 588–599, 2010.

[5] M. Cocea and S. Weibelzahl, "Can log files analysis estimate learners' level of motivation?" in *LWA*. University of Hildesheim, Institute of Computer Science, 2006.

[6] I. Lykourentzou, I. Giannoukos, V. Nikolopoulos, G. Mpardis, and V. Loumos, "Dropout prediction in e-learning courses through the combination of machine learning techniques," *Computers & Education*, vol. 53, no. 3, pp. 950–965, 2009.

[7] L. Martínez, R. Rodriguez, and F. Herrera, *The 2-tuple Linguistic Model: Computing with Words in Decision Making*. Springer International Publishing, 2015. [Online]. Available: https://books.google.es/books?id=zqwvCwAAQBAJ

[8] L. A. Zadeh, "Fuzzy logic= computing with words," *IEEE transactions on fuzzy systems*, vol. 4, no. 2, pp. 103–111, 1996.

[9] F. Herrera and L. Martínez, "A 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words," *IEEE Transactions on fuzzy systems*, vol. 8, no. 6, pp. 746–752, 2000.

[10] C. R. Graham, "Blended learning systems," *The handbook of blended learning*, pp. 3–21, 2006.

[11] N. Cavus and T. Zabadi, "A comparison of open source learning management systems," *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, vol. 143, pp. 521–526, 2014.

[12] H. Setiaji and I. V. Paputungan, "Design of telegram bots for campus information sharing," in *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, vol. 325, no. 1. IOP Publishing, 2018, p. 012005.

[13] L. A. Zadeh, "The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—i," *Information sciences*, vol. 8, no. 3, pp. 199–249, 1975.

[14] E. Cables, M. S. García-Cascales, and M. T. Lamata, "The ltopsis: An alternative to topsis decision-making approach for linguistic variables," *Expert Systems with Applications*, vol. 39, no. 2, pp. 2119–2126, 2012.

[15] C.-T. Chen and W.-Z. Hung, "Applying fuzzy linguistic variable and electre method in r&d project evaluation and selection," in *Industrial Engineering and Engineering Management, 2008. IEEM 2008. IEEE International Conference on*. IEEE, 2008, pp. 999–1003.

[16] G. J. Klir and B. Yuan, "Fuzzy sets and fuzzy logic: theory and applications," *Possibility Theory versus Probab. Theory*, vol. 32, no. 2, 1996.

[17] R. R. Yager, "A new methodology for ordinal multiobjective decisions based on fuzzy sets," in *Readings in Fuzzy Sets for Intelligent Systems*. Elsevier, 1993, pp. 751–756.

XIX Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy (XIX ESTYLF)

ESTYLF 3: Sistemas Basados en Reglas Difusas

Relevancia, Precisión e Interpretabilidad en Sistemas Basados en Reglas Difusas

Marta Galende
CARTIF Centro Tecnológico
Boecillo, Valladolid, España
margal@cartif.es

M. Isabel Rey
INDOMAUT S.L.
Valladolid, España
i.rey@indomaut.com

M.J. Fuente
Dpto. Ingeniería de Sistemas y Automática
Universidad de Valladolid
Valladolid, España
mjfuente@eii.uva.es

G.I. Sainz-Palmero
Dpto. Ingeniería de Sistemas y Automática
Universidad de Valladolid
Valladolid, España
gresai@eii.uva.es

***Resumen*—Los Sistemas Basados en Reglas Difusas (SBRD) permiten modelar problemas reales, manejando no solo la no precisión en lo referente al conocimiento a manejar, sino también la precisión con la que modelan el problema y la capacidad para "interpretar" su comportamiento. Por otro lado aparece el concepto de relevancia de las reglas difusas del SBRD, parece que lo idóneo es que sus reglas sean relevantes, o lo más relevantes posible. Relevancia, precisión e interpretabilidad son las tres métricas que se consideran, y analizan, en este trabajo para conseguir SBRDs que presenten buenas prestaciones respecto a estos tres objetivos, centrándonos finalmente en cómo es la relevancia de las reglas de los SBRD en el equilibrio precisión-interpretabilidad.**

Basándose en Transformaciones Ortogonales (SVD, PQR, OLS) es posible estimar la *Relevancia* de una regla difusa, y analizar como influye dicho valor en la búsqueda del equilibrio precisión-interpretabilidad en un SBRD. Usando nueve conjuntos de datos del repositorio KEEL, dos algoritmos de modelado: uno aproximativo (FasArt) y otro lingüístico (NefProx), y siguiendo una estrategia de optimización multi-objetivo (SPEA2), se presentan a continuación los resultados obtenidos que muestran el concepto de relevancia como un factor importante, y contradictorio, a tener en cuenta a la hora de generar SBRD.

***Index Terms*—Relevancia, Transformación Ortogonal, Precisión-Interpretabilidad, Sistemas Basados en Reglas Difusas**

I. Introducción

Los Sistemas Difusos Basados en Reglas (SBRD) son una forma muy habitual de aplicar la lógica difusa tanto en áreas de investigación como para abordar problemas del mundo real [1]–[3]. Existen múltiples aproximaciones para generar estos SBRDs [4], [5], y una de las cuestiones a afrontar es cómo evaluar sus prestaciones: en este punto, las metodologías lingüísticas y precisas para la generación de SBRD [6]–[8] son las más usadas y debatidas.

Este aspecto ha sido ampliamente discutido: la Precisión es un aspecto básico para un modelo, difuso o no, pero además cuando la Lógica Difusa es utilizada aparecen otros puntos de vista, como la capacidad para expresar, representar y explicar conocimiento en términos lingüísticos, similares a los usados por las personas. Este punto de vista es intrínseco a los principios de la Lógica difusa.

¿Cómo estimar la prestación de un SBRD? este es un aspecto básico tanto en desarrollos teóricos, como en aplicaciones prácticas, donde un modelo basado en SBRD tiene que ser perfectamente claro y definido. Por tanto, aprovechando las prestaciones de la Lógica Difusa, la obtención de un SBRD con una adecuada Interpretabilidad es de gran interés, pero siempre que el modelo implementado mediante un SBRD sea suficientemente preciso, sin este nivel de precisión cualquier modelo no es útil. Así, buscamos alcanzar modelos usando SBRD que puedan aunar Precisión e Interpretabilidad. Esto es lo que se conoce habitualmente como equilibrio Precisión-Interpretabilidad, aspectos que habitualmente se consideran mutuamente contraproducentes y contradictorios [7], [9]. ¿Cómo conseguirlo?, esto es una cuestión abierta, y múltiples aproximaciones y propuestas se pueden encontrar en la bibliografía especializada, como los sistemas genéticos difusos y la selección de reglas [6], [10]–[14], considerando distintas métricas de complejidad o semántica [15]–[18], etc.

En este ámbito, la propuesta aquí planteada se centra en el equilibrio Precisión - Interpretabilidad considerando una metodología basada en la selección de reglas, eligiendo estas reglas de acuerdo a las métricas de Precisión, Interpretabilidad, y añadiendo Relevancia. En la mayoría de los casos, la Relevancia se ha empleado para reducir la complejidad de los SBRD [19], [20], que está relacionada con la Interpretabilidad, pero aquí la Relevancia es un factor a considerar tan importante como la Precisión o la Interpretabilidad.

El resto del artículo se organiza como sigue: la sección II presenta el concepto de relevancia, su definición y posibles métricas a utilizar. La sección III muestra el problema de la búsqueda de equilibrio precisión-interpretabilidad en los SBRD y la sección IV presenta la metodología propuesta. La sección V muestra los resultados obtenidos en la parte expe-

Trabajo realizado gracias al soporte del Ministerio de Economía y Competitividad español y al European Regional Development Fund (FEDER) a través del proyecto no. DPI2015-67341-C2-2-R.

rimental y finalmente la sección VI presenta las principales conclusiones obtenidas y los futuros trabajos a realizar.

II. Relevancia

La relevancia de las reglas difusas se ha definido habitualmente mediante transformaciones ortogonales [21] como *Single Value Descomposition* (SVD), *Pivoting-QR* (PQR) o *Orthogonal Least Square* (OLS) aplicada sobre la matriz de activación de las reglas difusas, de forma similar a otras áreas como selección y extracción de características en reconocimiento de patrones. En SVD y PQR solo se tiene en cuenta la activación de los antecedentes de las reglas, mientras que en OLS también se considera el consecuente de las mismas. Como resultado de estas descomposiciones se obtienen estimaciones de la relevancia en forma de valores singulares, R-Values o varianzas de cada regla difusa para el problema dado [20], [22], [23].

III. Equilibrio Precisión-Interpretabilidad

La prestación de un SBRD se puede analizar bajo un doble punto de vista:

- **Precisión**: o capacidad para emular el comportamiento del sistema modelado. Métrica: $Error$ [24].
- **Interpretabilidad**: capacidad para "explicar" su comportamiento o de la realidad que modelan. Métrica: existes diversas opciones [15]–[18].

En el proceso de modelado se necesita conseguir la suficiente precisión para que el modelo resultante sea útil, pero en el caso de SBRD además se puede optar a alcanzar un grado de interpretabilidad del mismo. Esto es el equilibrio precisión-interpretabilidad, que es el objetivo de este trabajo.

IV. Precisión, Interpretabilidad y Relevancia en SBRD

Siguiendo la metodología resumida en la Fig. 1 [10] se busca una mejora en la prestación del SBRD a través de un post-procesamiento basado en selección de sus reglas: la idea básica es buscar un equilibrio entre la precisión y la interpretabilidad considerando las reglas más relevantes del SBRD. En esta ocasión se aborda la estrategia de descartar las reglas menos relevantes durante el proceso.

Fase 1: generación de SBRDs de diferente naturaleza [25] en base a conjuntos de datos.

- Aproximativos: FasArt [26].
- Lingüísticos: NefProx [27].

Mediante las conocidas transformaciones ortogonales: SVD, PQR y OLS, se estima la relevancia de cada una de las reglas de los SBRD generados.

Fase 2: proceso de selección de reglas del SBRD que busca mejorar su Precisión-Interpretabilidad-Relevancia. Esto se realiza mediante el Algoritmo Evolutivo Multi-Objetivo (AEMO) SPEA2 [28].

Para esto los objetivos comprometidos son:

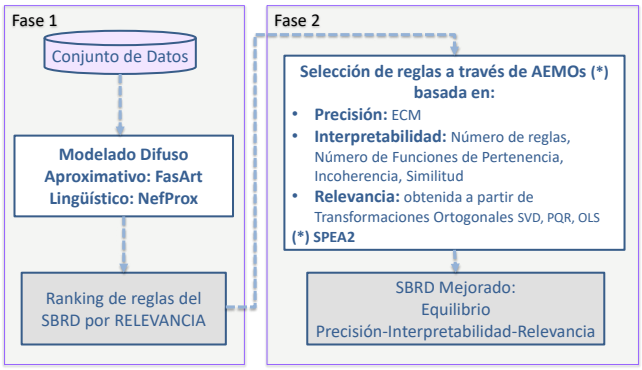


Figura 1. Mejora del equilibrio precisión-interpretabilidad de un SBRD mediante precisión, interpretabilidad y relevancia.

- Maximizar la precisión del sistema, minimizando el error cuadrático medio (Ec. 1).

$$ECM = \frac{1}{|N|}\sum_{i=1}^{|N|}(F(x_i) - y_i)^2 \tag{1}$$

- Maximizar la interpretabilidad del sistema, minimizando el valor de uno de los siguientes índices:
  - Número de reglas (Ec. 2).

$$NR = Numero\ de\ reglas \tag{2}$$

  - Número de funciones de pertenencia (Ec. 3).

$$NMF = Numero\ de\ funciones\ de\ pertenencia \tag{3}$$

  - Incoherencia de la base de reglas (Ec. 4).

$$\begin{aligned} &Inc = \frac{|(S_{kA}(R_i,R_j)>(1-\beta_I)\ \ AND\ \ S_{kC}(R_i,R_j)<\beta_I)|}{(NumerodeReglas-1)!} \\ &\forall 1 \leq i < j \leq NumerodeReglas \\ &\forall 1 \leq kA \leq NumeroDeAntecedentes \\ &\forall 1 \leq kC \leq NumeroDeConsecuentes \end{aligned} \tag{4}$$

  - Similitud de la base de datos (Ec. 5).

$$\begin{aligned} &Sim = F_{kA}(F_{l,m}(S(MF_{kA.l}, MF_{kA.m}))) \\ &F \Rightarrow MediaAritmetica \\ &\forall 1 \leq l < m \leq NumeroDeFuncionesDePertenencia \\ &\forall 1 \leq kA \leq NumeroDeAntecedentes \end{aligned} \tag{5}$$

- Maximizar la relevancia de la relevancia del sistema, en este trabajo descartando las reglas menos relevantes (minimizando Ec. 6).

$$Rel_{RB} = \sqrt[k]{\prod_{i=1}^{k}(1 - Relevancia_{Regla_i})} \tag{6}$$

Esta metodología y las métricas utilizadas en detalle se pueden consultar en [10].

V. Trabajo experimental

El impacto de relevancia en la búsqueda del equilibrio precisión-interpretabilidad se han comprobado mediante la experimentación que se detalla a continuación.

En [10] se muestran la estrategia de preservación de las reglas más relevantes, aquí se muestra, y analiza, la estrategia basada en descartar las reglas menos relevantes (Ec. 6).

V-A. Casos de estudio

Se han utilizado nueve conjuntos de datos reales del proyecto KEEL [29] y una metodología de validación cruzada 5-fold. La Tabla I muestra las principales características de dichos conjuntos de datos.

Cuadro I
Conjuntos de datos considerados

Conjunto de datos	Nombre	Variables	Registros
Plastic Strength	PLA	3	1650
Quake	QUA	4	2178
Electrical Maintenance	ELE	5	1056
Abalone	ABA	9	4177
Stock prices	STP	10	950
Weather Izmir	WIZ	10	1461
Weather Ankara	WAN	10	1609
Mortgage	MOR	16	1049
Treasury	TRE	16	1049

El resto de opciones utilizadas en este trabajo han sido:

- Métrica de relevancia: Rel_{RB} descartando las reglas menos relevantes.
- Transformaciones Ortogonales: SVD, PQR y OLS.
- Algoritmos de modelado: FasArt como algoritmos aproximativo y NefProx como lingüístico, parametrizados según [11].
- Métricas de interpretabilidad: NR, NMF, Inc y Sim siguiendo las recomendaciones de [9], [15].
- Algoritmo evolutivo multi-objetivo: $SPEA2$ utilizando codificación binaria, cruce HUX [30], mutación clásica [31] con probabilidad 0,2, mecanismo de prevención de incesto basado en los conceptos de CHC [30], operador de reinicialización y una población de padres que se va reduciendo progresivamente [32].

En cuanto a los planos de proyección de las soluciones finales [12], [33], [34] se presentan los resultados en el plano precisión-interpretabilidad, considerando el SBRD más preciso, el SBRD más interpretable, y SBRD en la mediana precisión-interpretabilidad.

V-B. Análisis de resultados

La Tabla II muestra los resultados medios obtenidos para todos los conjuntos de datos cuando la relevancia se estima mediante la transformación OLS, analizando el plano precisión-interpretabilidad. Específicamente se muestran las siguientes métricas: NR, NFP, Inc y Sim como medidas de interpretabilidad; ECM en entrenamiento E_{tra} y test E_{tst}; número de reglas NR; métrica Rel_{RB} de relevancia optimizada y relevancia media Rel_{SD} de las reglas que permanecen en el sistema tras el proceso de optimización.

La Tabla III muestra los mismos resultados para SVD y la Tabla IV para PQR.

Realizando un análisis conjunto de las soluciones alcanzadas al aplicar los tres métodos de transformación ortogonal se puede decir que:

Modelado Aproximativo.

1. **Solución más precisa**: los valores medios de la *Interpretabilidad*, el *error*, el *número de reglas* y la *Relevancia* mejoran en todos los casos, hasta alcanzar una mejoría del $26{,}04\,\%$ en el primer caso, del $17{,}03\,\%$ en el segundo caso, del $26{,}32\,\%$ en el caso del número de reglas, y del $9{,}73\,\%$ en la Relevancia.
2. **Solución en la mediana Precisión-Interpretabilidad**: la *Interpretabilidad* ha mejorado hasta un $32{,}88\,\%$, el *error* se reduce hasta un $16{,}36\,\%$, el *número de reglas* también mejora siempre hasta el $34{,}99\,\%$, y la *Relevancia* mejora hasta el $17{,}09\,\%$.
3. **Solución más interpretable**: todas las métricas estudiadas han mejorado: la *Interpretabilidad* ha mejorado hasta un $51{,}67\,\%$, el *error* se ha reducido hasta el $14{,}56\,\%$, el *número de reglas* ha mejorado hasta un $43{,}53\,\%$, y la *Relevancia* hasta el $30{,}04\,\%$.

Modelado Lingüístico.

1. **Solución más precisa**: la *Interpretabilidad* ha mejorado hasta el $47{,}26\,\%$, el *error* es reducido hasta el $36{,}36\,\%$, el *número de reglas* mejora hasta un $47{,}32\,\%$, y la *Relevancia* siempre mejora hasta el $24{,}91\,\%$.
2. **Solución en la mediana Precisión-Interpretabilidad**: la *Interpretabilidad* se ve que mejora en casi todos los casos hasta conseguir un porcentaje de mejora del $51{,}28\,\%$. Lo mismo sucede con el resto de métricas estudiadas que mejoran en todos los casos hasta alcanzar un porcentaje de mejora del $35{,}85\,\%$ en el caso del *error*, del $51{,}28\,\%$ en el caso del *número de reglas*, y del $27{,}18\,\%$ cuando lo analizado es la *Relevancia*.
3. **Solución más interpretable**: todas las métricas mejoran: la *Interpretabilidad* ha mejorado hasta un $62{,}74\,\%$, el *error* hasta un $34{,}29\,\%$, el *número de reglas* hasta un $56{,}48\,\%$, y la *Relevancia* hasta alcanzar una importante mejoría del $47{,}98\,\%$.

En cuanto al análisis de resultados en el resto de planos la Tabla V muestra un resumen de los valores obtenidos cuando se utiliza la transformación ortogonal OLS. Aquí las relaciones son más complejas y están en consonancia con la discusión en Sección V-C.

V-C. Reglas relevantes y Precisión-Interpretabilidad

Un aspecto interesante a plantearse es ver y analizar cómo son las reglas del SBRD en el equilibrio precisión-interpretabilidad. En la metodología llevada a cabo, las reglas poco relevantes son las candidatas a no ser seleccionadas para el SBRD final. En la Tabla VI puede observarse la distribución de las reglas de los SBRD iniciales de acuerdo a su relevancia (normalizada en $[0, 1]$ y clasificado en cuatro cuartos): en general las relevancia de las reglas presente en los modelos

Cuadro II
Valores Medios (%) de SBRDs Mejorados: Rel_{RB}, OLS, Plano Precisión-Interpretabilidad

	Mejor *Pre*						Mediana *Pre-Inter*						Mejor *Inter*					
Inter	*Inter*	E_{tra}	E_{tst}	*NR*	Rel_{RB}	Rel_{SD}	*Inter*	E_{tra}	E_{tst}	*NR*	Rel_{RB}	Rel_{SD}	*Inter*	E_{tra}	E_{tst}	*NR*	Rel_{RB}	Rel_{SD}
FasArt																		
NR	25,88	19,64	16,61	25,88	0,13	8,01	30,60	18,67	15,79	30,60	0,27	14,00	38,12	7,68	5,96	38,12	0,57	25,65
NFP	25,14	19,63	16,71	26,26	0,13	8,40	31,57	17,47	14,83	32,90	0,34	17,09	40,82	−9,55	−7,28	41,79	0,68	30,04
Inc	−0,89	19,62	16,66	25,98	0,17	9,73	13,37	19,28	16,36	27,18	0,21	11,87	51,16	17,50	14,56	29,36	0,28	15,47
Sim	2,44	19,67	16,95	25,94	0,14	8,12	8,76	9,23	7,08	34,81	0,36	16,96	14,35	−39,77	−36,14	42,29	0,53	23,19
NefProx																		
NR	46,98	37,44	35,96	46,98	0,26	17,76	50,56	37,39	35,85	50,56	0,36	24,78	55,14	32,02	30,31	55,14	0,57	39,36
NFP	5,07	37,41	35,84	47,10	0,31	21,90	7,33	36,40	34,86	48,80	0,38	26,63	10,30	27,30	25,96	51,53	0,56	38,59
Inc	9,97	38,05	36,29	47,32	0,36	24,91	41,22	36,06	34,25	48,30	0,44	27,18	62,67	21,52	20,40	53,18	0,73	47,98
Sim	−4,71	37,36	35,85	46,68	0,30	20,68	−4,60	37,25	35,77	46,72	0,30	20,78	−3,87	35,53	34,25	47,30	0,37	25,67

Cuadro III
Valores Medios (%) de SBRDs Mejorados: Rel_{RB}, SVD, Plano Precisión-Interpretabilidad

	Mejor *Pre*						Mediana *Pre-Inter*						Mejor *Inter*					
Inter	*Inter*	E_{tra}	E_{tst}	*NR*	Rel_{RB}	Rel_{SD}	*Inter*	E_{tra}	E_{tst}	*NR*	Rel_{RB}	Rel_{SD}	*Inter*	E_{tra}	E_{tst}	*NR*	Rel_{RB}	Rel_{SD}
FasArt																		
NR	25,83	19,63	16,68	25,83	0,04	2,05	30,72	17,91	15,10	30,72	0,10	4,61	38,47	2,11	0,64	38,47	0,22	9,71
NFP	24,94	19,67	16,74	26,04	0,04	2,18	31,18	17,79	14,83	32,62	0,13	6,11	40,81	−28,57	−23,94	41,80	0,26	11,14
Inc	0,64	19,64	16,49	25,75	0,05	2,65	14,72	19,25	16,12	26,97	0,05	3,17	51,67	17,19	13,98	29,11	0,08	4,59
Sim	2,22	19,58	16,69	25,83	0,05	2,51	8,97	9,55	6,15	34,99	0,13	5,43	14,69	−42,39	−38,72	42,80	0,22	8,31
NefProx																		
NR	46,59	37,51	35,87	46,59	0,06	6,63	50,00	37,33	35,76	50,00	0,13	11,63	55,31	33,39	32,08	55,31	0,28	21,54
NFP	5,19	37,56	35,90	46,53	0,07	7,27	7,51	35,52	33,82	48,56	0,12	10,61	10,85	25,80	24,06	51,19	0,20	16,96
Inc	11,49	38,18	36,36	46,01	0,09	9,36	40,95	36,34	34,49	47,84	0,13	13,61	62,74	21,75	20,25	52,16	0,24	21,55
Sim	−4,86	37,54	35,91	46,28	0,06	6,76	−4,49	37,08	35,68	46,40	0,07	7,18	−3,86	35,59	34,29	46,90	0,09	8,66

Cuadro IV
Valores Medios (%) de SBRDs Mejorados:Rel_{RB}, PQR, Plano Precisión-Interpretabilidad

	Mejor *Pre*						Mediana *Pre-Inter*						Mejor *Inter*					
Inter	*Inter*	E_{tra}	E_{tst}	*NR*	Rel_{RB}	Rel_{SD}	*Inter*	E_{tra}	E_{tst}	*NR*	Rel_{RB}	Rel_{SD}	*Inter*	E_{tra}	E_{tst}	*NR*	Rel_{RB}	Rel_{SD}
FasArt																		
NR	26,04	19,63	16,80	26,04	0,04	2,62	31,77	17,40	14,91	31,77	0,09	5,08	39,96	−4,56	−5,53	39,96	0,20	9,89
NFP	25,26	19,65	16,75	26,32	0,04	2,47	32,88	16,06	13,25	34,01	0,11	5,77	42,70	−35,05	−29,01	43,53	0,24	11,19
Inc	−0,96	19,62	16,82	26,08	0,04	2,82	15,83	19,19	16,25	27,09	0,05	3,30	49,22	17,27	14,31	29,18	0,07	4,73
Sim	2,42	19,62	17,03	25,92	0,04	2,67	8,91	9,83	7,63	34,48	0,11	5,02	14,54	−40,03	−37,78	42,69	0,21	8,63
NefProx																		
NR	47,26	37,20	35,61	47,26	0,05	2,48	51,28	37,10	35,56	51,28	0,09	5,13	56,48	22,64	21,31	56,48	0,18	12,42
NFP	5,20	37,34	35,73	47,24	0,06	2,71	7,38	36,03	34,46	48,97	0,08	4,08	10,30	27,15	25,52	51,72	0,12	6,92
Inc	14,02	37,94	36,18	45,25	0,06	3,31	41,87	35,86	34,06	46,82	0,08	5,71	62,62	19,08	17,95	50,26	0,13	9,80
Sim	−4,77	37,36	35,75	46,73	0,05	2,53	−4,68	37,15	35,52	46,80	0,05	2,60	−4,15	35,06	33,71	47,32	0,06	3,16

Cuadro V
Valores Medios (%) de SBRDs Mejorados: Rel_{RB}, OLS, Planos Pre-Rel_{RB} (PR), Rel_{RB}-$Inter$ (RI)

Modelo	**Inter**	PR	Mejor *Pre*						Mediana Pre-Rel_{RB}						Mejor Rel_{RB}					
		RI	Mejor Rel_{RB}						Mediana Rel_{RB}-$Inter$						Mejor *Inter*					
		Plano	*Inter*	E_{tra}	E_{tst}	*NR*	Rel_{RB}	Rel_{SD}	*Inter*	E_{tra}	E_{tst}	*NR*	Rel_{RB}	Rel_{SD}	*Inter*	E_{tra}	E_{tst}	*NR*	Rel_{RB}	Rel_{SD}
FasArt	*NR*	PR	25,92	19,63	16,70	25,92	0,07	4,23	30,87	18,00	15,03	30,87	0,18	8,95	37,90	3,44	1,90	37,90	0,39	17,01
		RI	37,90	3,43	1,89	37,90	0,39	17,01	38,05	2,87	1,26	38,05	0,39	16,93	38,85	−1,29	−2,56	38,85	0,36	15,98
	NFP	PR	25,11	19,65	16,73	26,21	0,07	4,35	31,12	17,29	14,45	32,76	0,23	11,00	39,41	−2,35	−3,28	41,17	0,48	21,05
		RI	39,42	−2,37	−3,30	41,17	0,48	21,05	40,01	−5,71	−6,08	41,45	0,47	20,54	41,44	−27,04	−22,76	42,43	0,42	18,28
	Inc	PR	−0,64	19,63	16,66	26,03	0,09	5,18	0,95	18,33	15,52	31,28	0,22	11,11	32,29	7,88	5,78	37,82	0,43	19,57
		RI	32,29	7,88	5,78	37,82	0,43	19,57	39,94	8,01	5,78	37,39	0,42	18,91	50,68	7,78	5,62	37,32	0,41	18,02
	Sim	PR	2,36	19,62	16,89	25,89	0,08	4,43	3,50	13,81	11,91	35,56	0,34	16,83	7,60	−21,72	−21,45	45,50	0,66	30,42
		RI	2,31	19,62	16,89	25,94	0,08	4,50	11,35	−28,18	−27,11	44,02	0,54	24,85	14,53	−40,79	−37,61	42,63	0,32	13,40
NefProx	*NR*	PR	46,91	37,38	35,81	46,91	0,13	9,17	50,51	37,21	35,67	50,51	0,22	16,51	55,21	28,38	26,81	55,21	0,39	28,03
		RI	55,21	28,37	26,79	55,21	0,39	28,03	55,30	28,37	26,79	55,30	0,39	27,89	55,65	27,42	25,96	55,65	0,36	25,66
	NFP	PR	5,15	37,44	35,83	46,98	0,15	10,65	5,76	37,14	35,51	51,96	0,30	21,85	8,94	21,86	20,05	57,37	0,56	39,98
		RI	8,96	21,83	20,01	57,37	0,56	39,98	9,35	22,94	21,34	57,35	0,55	39,33	10,49	21,99	20,41	57,08	0,51	36,48
	Inc	PR	11,68	38,05	36,28	46,24	0,17	12,61	10,05	35,73	33,95	52,87	0,54	40,09	37,54	6,28	5,05	58,02	0,91	66,73
		RI	37,57	6,24	5,00	58,02	0,91	66,73	47,62	4,21	3,07	57,20	0,85	61,10	62,68	0,61	−0,51	56,99	0,75	51,88
	Sim	PR	−4,78	37,42	35,83	46,56	0,14	9,99	−5,40	37,22	35,67	50,35	0,25	18,68	−6,11	26,97	25,21	54,82	0,45	31,98
		RI	−4,79	37,42	35,84	46,59	0,14	10,05	−5,45	27,57	25,92	54,73	0,43	31,14	−3,96	29,03	27,62	54,46	0,41	29,62

difusos es baja, $60\,\% - 90\,\%$, si se considera las reglas con relevancia Baja y MediaBaja la cifra está entre el $88\,\%$ y casi el $100\,\%$. En el SBRD lingüístico las cifras son algo mayores que en el aproximativo, lo cual podría ser algo sorprendente.

Estos resultados implican que en los SBRD resultantes de esta metodología, que presentarán una mejora en el equilibrio precisión-interpretabilidad, las reglas con baja relevancia van a tener, y tienen, un destacado impacto tanto cualitativamente, como cuantitativamente. Por otro lado, aproximaciones muy conocidas para la simplificación de modelos difusos como [23], [35], [36] basadas en las reglas con relevancia "alta", o punto de ruptura en los valores de relevancia, parecen ser de difícil aplicación real si además se analizan las magnitudes de las relevancias.

En la Tabla VII se puede observar la distribución de reglas por su relevancia en el SBRD optimizado para los modelos aproximativo y lingüístico, considerando las 4 métricas de interpretabilidad, en tres puntos de optimización: mejor precisión, mejor interpretabilidad y mediana precisión-interpretabilidad. También aparece el $\%$ de las reglas del modelo inicial, de acuerdo a su relevancia, que NO han sido seleccionadas en el SBRD final. Todo esto considerando la transformación OLS para la estimación de las relevancias.

En general, estos SBRD han aumentado su ratio de reglas consideradas de baja relevancia, ahora es mayor: $\geq 92\,\%$, siendo algo mayor para el SBRD lingüístico. Esto es coherente con la presencia de reglas poco relevantes en el SBRD de partida, incluso teniendo en cuenta que entre el $40 - 50\,\%$ de ellas han sido descartadas. Más relevante en este descarte en lo referente a reglas con Alta, MediaAlta, MediaBaja relevancia: una parte importante de estas reglas, incluidas las de alta relevancia, no son, sorprendentemente, mantenidas en el SBRD. Este aspecto resulta contraproducente: reglas con la relevancia alta no son seleccionadas en $38 - 10\,\%$, alrededor del $60\,\%$ MediaAlta, etc... pero también, como se observa en las Tablas II, III y IV la relevancia de las reglas de los SBRD finalmente obtenidos ha aumentado en todos los modelos y métricas de interpretabilidad.

Aquí, de acuerdo a los resultados, se ha comprobado que la relevancia de las reglas aporta en el proceso de mejora de la precisión e interpretación preservando en el SBRD las reglas más relevantes compatibles con esto. Considerando todo lo anterior, hay una cuestión básica a afrontar: la necesidad comprender el por qué de la no selección de reglas estimadas con relevancia alta, o incluso más alta que la mayoría de aquellas que si se mantienen en el modelo. Esto implica una caracterización de estas reglas no seleccionadas a pesar de su relevancia importante para dar respuesta a preguntas como: ¿Cómo son? ¿Por qué no son seleccionadas?, así poder generar algún criterio que permita estimar o no una regla para un SBRD.

VI. Conclusiones

En este trabajo se presentan los resultados obtenidos a partir de una metodología mostrada en [10] pero introduciendo el criterio de descartar las reglas difusas menos relevantes durante el proceso. Esto se ha traducido en la generación SBRD que, en general, mejoran sus prestaciones de precisión, interpretabilidad y relevancia en los modelos considerados: Mejor Precisión, Mejor Interpretabilidad y Mediana Precisión-Interpretabilidad. Analizando las reglas que son incluidas en esos modelos, se observa el hecho sorprendente de que reglas con una relevancia estimada alta, o al menos más alta que la mayoría de las seleccionadas, no son mantenidas en el SBRD. Conocer cómo son estas reglas, su caracterización y la razón de su no permanencia en el SBRD es una de las tareas actualmente en desarrollo. Por otro lado, estos modelos están formados de forma abrumadora por reglas consideradas poco relevantes, analizar que características tienen, y por qué son elegidas durante el proceso en contraposición a las relevantes

Cuadro VI
Distribución en % de reglas por relevancia en el SBRD inicial

	SBRD	R_Baja	R_MediaBaja	R_MediaAlta	R_Alta
SVD	FasArt	70.24	23.35	5.36	1.06
	NefProx	88.60	6.53	3.40	1.47
PQR	FasArt	60.54	27.97	9.25	2.24
	NefProx	84.57	9.08	2.00	4.35
OLS	FasArt	94.55	4.45	0.91	0.09
	NefProx	97.54	1.98	0.36	0.12

Cuadro VII
Distribución en % de las reglas por relevancia del SBRD optimizado considerando la transformación ortogonal OLS: distribución de reglas por su relevancia, y reglas NO seleccionadas del modelo inicial

Inter	**Modelo**	**SBRD**	**Reglas**	R_Baja	R_MediaBaja	R_MediaAlta	R_Alta
NR	Mejor *Inter*	FasArt	SBRD	92.50	6.66	0.77	0.07
			NoSelec.	39.36	11.12	33.25	38.89
		NefProx	SBRD	96.35	3.05	0.39	0.21
			NoSelec.	55.50	27.02	61.67	11.67
	Mejor *Pre*	FasArt	SBRD	93.86	5.40	0.68	0.06
			NoSelec.	26.42	9.75	30.75	38.89
		NefProx	SBRD	96.86	2.65	0.30	0.18
			NoSelec.	47.23	25.12	61.67	11.67
	Mediana *Pre-Inter*	FasArt	SBRD	93.48	5.75	0.71	0.07
			NoSelec.	31.36	10.92	30.75	38.89
		NefProx	SBRD	96.69	2.77	0.34	0.19
			NoSelec.	50.85	26.31	61.67	11.67
NFP	Mejor *Inter*	FasArt	SBRD	92.06	7.09	0.77	0.08
			NoSelec.	43.21	12.91	31.03	41.67
		NefProx	SBRD	96.36	3.04	0.40	0.19
			NoSelec.	51.89	24.05	61.67	10.00
	Mejor *Pre*	FasArt	SBRD	93.87	5.41	0.66	0.07
			NoSelec.	26.81	9.94	29.36	41.67
		NefProx	SBRD	96.82	2.67	0.31	0.19
			NoSelec.	47.38	23.81	61.67	10.00
	Mediana *Pre-Inter*	FasArt	SBRD	93.29	5.92	0.72	0.07
			NoSelec.	33.78	11.49	29.36	41.67
		NefProx	SBRD	96.67	2.79	0.35	0.19
			NoSelec.	49.12	23.81	61.67	10.00
INC	Mejor *Inter*	FasArt	SBRD	93.28	5.70	0.95	0.07
			NoSelec.	30.21	10.17	31.39	33.33
		NefProx	SBRD	96.23	3.05	0.46	0.26
			NoSelec.	53.48	31.43	65.49	11.67
	Mejor *Pre*	FasArt	SBRD	93.68	5.41	0.85	0.07
			NoSelec.	26.61	9.67	31.81	38.89
		NefProx	SBRD	96.80	2.64	0.35	0.20
			NoSelec.	47.53	32.86	61.67	11.67
	Mediana *Pre-Inter*	FasArt	SBRD	93.54	5.50	0.89	0.07
			NoSelec.	27.87	9.87	31.39	33.33
		NefProx	SBRD	96.83	2.58	0.35	0.24
			NoSelec.	48.51	33.33	62.71	10.00
SIM	Mejor *Inter*	FasArt	SBRD	92.55	6.41	0.93	0.10
			NoSelec.	43.37	18.89	35.97	33.33
		NefProx	SBRD	96.69	2.78	0.34	0.19
			NoSelec.	47.59	24.17	61.87	10.00
	Mejor *Pre*	FasArt	SBRD	93.80	5.38	0.75	0.06
			NoSelec.	26.49	10.02	32.11	47.22
		NefProx	SBRD	96.85	2.66	0.30	0.19
			NoSelec.	46.94	24.40	62.71	10.00
	Mediana *Pre-Inter*	FasArt	SBRD	93.21	5.86	0.85	0.08
			NoSelec.	35.69	14.12	33.19	38.89
		NefProx	SBRD	96.85	2.66	0.30	0.19
			NoSelec.	46.99	24.40	62.71	10.00

pero no que son eliminadas en el SBRD final, es la línea de trabajo a muy corto plazo.

Referencias

[1] J. Kacprzyk, W. Pedrycz, Springer Handbook of Computational Intelligence, Springer, 2015.

[2] A. Konar, Computational Intelligence: Principles, techniques and applications, Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[3] F. O. Karray, C. d. De Silva, Soft Computing and Intelligent Systems Design. Theory, Tools and Applications, Addison Wesley, 2004.

[4] J. Alcalá-Fdez, J. Alonso, A survey of fuzzy systems software: taxonomy, current research trends and prospects, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 24 (1) (2016) 40 – 56.

[5] L. Magdalena, Fuzzy Rule-Based Systems, in: Springer Handbook of Computational Intelligence, Springer, 2015, pp. 203 – 218.

[6] A. Fernández, V. López, M. J. del Jesus, F. Herrera, Revisiting evolutionary fuzzy systems: Taxonomy, applications, new trends and challenges, Knowledge-Based Systems 80 (2015) 109–121.

[7] J. Casillas, O. Cordón, F. Herrera, L. Magdalena, Accuracy improvements to find the balance interpretability-accuracy in fuzzy modeling: An overview, in: J. Casillas, O. Cordón, F. Herrera, L. Magdalena (Eds.), Accuracy Improvements in Linguistic Fuzzy Modelling, Vol. 129 of Studies in Fuzziness and SoftComputing, Springer-Verlag, Berlin Heildelberg, 2003, pp. 3–24.

[8] J. Casillas, O. Cordón, F. Herrera, L. Magdalena, Interpretability improvements to find the balance interpretability-accuracy in fuzzy modeling: An overview, in: J. Casillas, O. Cordón, F. Herrera, L. Magdalena (Eds.), Interpretability Issues in Fuzzy Modelling, Vol. 128 of Studies in Fuzziness and SoftComputing, Springer-Verlag, Berlin Heildelberg, 2003, pp. 3–22.

[9] J. M. Alonso, C. Castiello, C. Mencar, Interpretability of fuzzy systems: Current research trends and prospects, in: Springer Handbook of Computational Intelligence, Springer, 2015, pp. 219–237.

[10] M. I. Rey, M. Galende, M. J. Fuente, G. I. S. Palmero, Multi-objective based fuzzy rule based systems (frbss) for trade-off improvement in accuracy and interpretability: A rule relevance point of view, Knowledge-Based Systems 127 (2017) 67–84. doi:10.1016/j.knosys.2016.12.028.
URL https://doi.org/10.1016/j.knosys.2016.12.028

[11] M. Galende, M. J. Gacto, G. Sainz, R. Alcalá, Comparison and design of interpretable linguistic vs. scatter FRBSs: Gm3m generalization and new rule meaning index for global assessment and local pseudo-linguistic representation, Information Sciences 282 (2014) 190–213.

[12] M. Galende, G. I. Sainz, M. J. Fuente, Complexity reduction and interpretability improvement for fuzzy rule systems based on simple interpretability measures and indices by bi-objective evolutionary rule selection, Soft Computing 16 (3) (2012) 451 – 470.

[13] M. Fazzolari, R. Alcalá, Y. Nojima, H. Ishibuchi, F. Herrera, A review of the application of multiobjective evolutionary fuzzy systems: Current status and further directions, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 21 (2013) 45 – 65.

[14] O. Cordón, A historical review of evolutionary learning methods for mamdani-type fuzzy rule-based systems: Designing interpretable genetic fuzzy systems, International Journal of Approximate Reasoning 52 (2011) 894 – 913.

[15] M. J. Gacto, R. Alcalá, F. Herrera, Interpretability of linguistic fuzzy rule-based systems: An overview of interpretability measures, Information Sciences 181 (2011) 4340 – 4360.

[16] J. M. Alonso, L. Magdalena, G. González-Rodríguez, Looking for a good fuzzy system interpretability index: An experimental approach, International Journal of Approximate Reasoning 51 (1) (2009) 115 – 134.

[17] C. Mencar, A. Fanelli, Interpretability constraints for fuzzy information granulation, Information Sciences 178 (24) (2008) 4585 – 4618.

[18] S.-M. Zhou, J. Q. Gan, Low-level interpretability and high-level interpretability: a unified view of data-driven interpretable fuzzy system modelling, Fuzzy Sets and Systems 159 (2008) 3091 – 3131.

[19] S.-M. Zhou, J. M. Garibaldi, R. I. John, F. Chiclana, On constructing parsimonious type-2 fuzzy logic systems via influential rule selection, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 17 (3) (2009) 654 – 667.

[20] M. Setnes, Simplification and reduction of fuzzy rules, in: J. Casillas, O. Cordón, F. Herrera, L. Magdalena (Eds.), Interpretability Issues in Fuzzy Modelling, Vol. 128 of Studies in Fuzziness and SoftComputing, Springer-Verlag, Berlin Heildelberg, 2003, pp. 278–302.

[21] G. H. Golub, C. F. Van Loan, Matrix computations, Vol. 3, JHU Press, 2012.

[22] S. Destercke, S. Guillaume, B. Charnomordic, Building an interpretable fuzzy rule base from data using orthogonal least squares - Application to a depollution problem, Fuzzy Sets and Systems 158 (18) (2007) 2078 – 2094.

[23] J. Yen, L. Wang, Simplifying fuzzy rule-based models using orthogonal transformation methods, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. Part B: Cybernetics 29 (1) (1999) 13–24.

[24] I. H. Witten, E. Frank, M. A. Hall, Data Mining: Practical machine learning tools and techniques, 3rd Edition, Morgan Kaufmann, 2011.

[25] F. Herrera, Genetic fuzzy systems: Taxonomy, current research trends and prospects, Evolutionary Intelligence 1 (2008) 27 – 46.

[26] J. M. Cano Izquierdo, Y. A. Dimitriadis, E. Gómez Sánchez, J. López Coronado, Learnning from noisy information in FasArt and Fasback neuro-fuzzy systems, Neural Networks 14 (4-5) (2001) 407–425.

[27] D. Nauck, R. Kruse, Neuro-fuzzy systems for function approximation, Fuzzy Sets and Systems 101 (2) (1999) 261–271.

[28] E. Zitzler, M. Laumanns, L. Thiele, SPEA2: Improving the strength pareto evolutionary algorithm for multiobjective optimization, in: Proc. Evolutionary Methods for Design, Optimization and Control with Applications to Industrial Problems, Barcelona, Spain, 2001, pp. 95–100.

[29] J. Alcalá-Fdez, L. Sánchez, S. García, M. J. del Jesus, S. Ventura, J. M. Garrell, J. Otero, C. Romero, J. Bacardit, V. M. Rivas, J. C. Fernández, F. Herrera, KEEL: a software tool to assess evolutionary algorithms for data mining problems, Soft Computing 13 (3) (2009) 307 – 318.

[30] L. J. Eshelman, The CHC adaptive search algorithm : How to have safe search when engaging in nontraditional genetic recombination, Foundations of Genetic Algorithms 1 (1991) 265–283.

[31] H. Ishibuchi, T. Murata, I. B. Türksen, Single-objective and two-objective genetic algorithms for selecting linguistic rules for pattern classification problems, Fuzzy Sets and Systems 89 (2) (1997) 135 – 150.

[32] R. Alcalá, M. J. Gacto, F. Herrera, J. Alcalá-Fdez, A multi-objective genetic algorithm for tuning and rule selection to obtain accurate and compact linguistic fuzzy rule-based systems, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 15 (5) (2007) 539 – 557.

[33] C. H. Nguyena, V. T. Hoangc, V. L. Nguyenc, A discussion on interpretability of linguistic rule based systems and its application to solve regression problems, Knowledge-Based Systems 88 (2015) 107 – 133.

[34] M. Antonelli, P. Ducange, B. Lazzerini, F. Marcelloni, Learning knowledge bases of multi-objective evolutionary fuzzy systems by simultaneously optimizing accuracy, complexity and partition integrity, Soft Computing 15 (12) (2011) 2335 – 2354.

[35] M. Setnes, R. Babuška, Rule base reduction: Some comments on the use of orthogonal transforms, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part C: Applications and Reviews 31 (2) (2001) 199 – 206.

[36] R. Babuska, Fuzzy Modeling for Control, Kluwer Academic Press, 1998.

Generación eficiente de reglas candidatas de calidad en problemas de alta dimensionalidad

Javier Cózar
Dept. de Sistemas Informáticos
Universidad of Castilla-La Mancha
Albacete, España
javier.cozar@uclm.es

Luis de la Ossa
Dept. de Sistemas Informáticos
Universidad of Castilla-La Mancha
Albacete, España
luis.delaossa@uclm.es

José Antonio Gámez
Dept. de Sistemas Informáticos
Universidad of Castilla-La Mancha
Albacete, España
jose.gamez@uclm.es

***Resumen*—Existen multitud de métodos para la generación de modelos basados en reglas difusas a partir de conjuntos de datos. Debido a que el número de reglas que puede generarse es exponencial con respecto al número de variables, los algoritmos se suelen apoyar en técnicas de búsqueda, generalmente metaheurísticas, para determinar qué reglas componen el sistema final. Aún así, sigue siendo necesario reducir el conjunto de reglas candidatas de manera sustancial. En esta línea, existen métodos que generan un primer conjunto de reglas, y posteriormente lo filtran mediante un algoritmo iterativo, basándose en criterios de calidad y genericidad. Sin embargo, este proceso es muy costoso. En este trabajo proponemos un método de generación de reglas candidatas de una sola etapa, basado en el principio Apriori, y que incorpora el uso de una métrica de calidad. Hemos llevado a cabo una experimentación con 7 problemas de regresión, desde 16 hasta 80 variables. Los resultados muestran un buen comportamiento en términos de precisión, y una mejora muy notable en cuanto a los tiempos de ejecución.**

***Index Terms*—Sistemas Basados en Reglas Difusas, Regresión, Takagi Sugeno Kang, Alta dimensionalidad**

I. Introducción

Los sistemas basados en reglas difusas (SBRDs) [1]–[3] son modelos compuestos por un conjunto de reglas del tipo "Si *antecedente* entonces *consecuente*". Su expresividad radica en que los espacios de entrada que activan distintas reglas pueden solaparse, por lo que una entrada generalmente activa más de una regla, y la predicción del modelo se obtiene mediante la composición de las salidas correspondientes.

La ventaja de los SRBDs se centra en dos aspectos. Por un lado, son modelos altamente interpretables, por lo que proporcionan al experto información relativamente clara sobre las relaciones que existen en los datos, además de permitir la incorporación de conocimiento externo antes o durante el proceso de aprendizaje. Por otro lado, estos modelos trabajan de forma inherente con la incertidumbre asociada a los datos, por lo que son muy robustos.

Muchos SBRDs representan la información mediante un conjunto de variables difusas, y un conjunto de reglas difusas construídas a partir de estas variables. Esta división da lugar, principalmente, a dos tipos de algoritmos para el aprendizaje de SRBDs: los que aprenden el conjunto de variables difusas (las particiones) y la base de reglas simultáneamente; y los que aprenden la base de reglas una vez establecido el conjunto de variables difusas.

Este trabajo propone un método que parte de un conjunto de variables difusas previamente establecido, y lleva a cabo el aprendizaje de la base de reglas difusas, en problemas de (relativamente) alta dimensionalidad. En concreto, para reglas TSK-0, cuyo consecuente es un número real. El aprendizaje de SBRDs es un proceso costoso debido, principalmente, a la explosión combinatoria de reglas: en un problema con n variables, y en el que cada variable difusa se define mediante una partición con k conjuntos difusos, pueden generarse hasta $k^{(n+1)} - 1$ reglas diferentes. Este hecho, hace impracticable trabajar con el conjunto completo de posibles reglas. Por ello se suele dividir el proceso de aprendizaje en dos etapas [4], [5]: 1) generación de un conjunto de reglas candidatas; y 2) uso de un algoritmo de búsqueda para determinar el subconjunto de reglas que componen el modelo final.

La generación de reglas candidatas tiene un impacto crítico tanto en el rendimiento (error) del modelo, como en el coste del proceso de aprendizaje. Una estrategia para llevarla a cabo consiste en generar, en una primera fase, aquellas reglas candidatas que tienen mayor relevancia en relación a la cobertura de las instancias del conjunto de datos. Para ello, se utilizan algoritmos basados en el principio Apriori [6]. Posteriormente, en una segunda fase, y mediante un proceso iterativo, se seleccionan aquellas reglas de mayor calidad, minimizando el solapamiento entre las reglas selecionadas en la medida de lo posible. Este enfoque permite abordar el problema en entornos de alta dimensionalidad. Sin embargo, la primera fase, basada en el algoritmo Apriori, genera todavía un número demasiado elevado de reglas, por lo que la posterior selección es excesivamente costosa. En este trabajo proponemos unificar ambas fases, incorporando una métrica de calidad monótona al proceso basado en el principio Apriori, que permita obtener el conjunto de reglas candidatas de manera más eficiente.

La estructura de este trabajo se divide en 4 secciones además de esta introducción. En la Sección II se describen los SBRDs y, en particular, los basados en reglas tipo TSK de orden cero. En la Sección III se describirá cómo se afronta el problema de la generación de reglas candidatas en trabajos previos, y la propuesta que se expone en este trabajo para realizarlo de una forma más eficiente. Posteriormente, en la Sección IV, se detallará la configuración y los resultados de los experimentos. Por último, en la Sección V, se expondrán las conclusiones.

II. Sistemas basados en reglas difusas TSK-0

Los SBRDs de tipo *Takagi-Sugeno-Kang* (TSK) [7] son modelos compuestos por: un conjunto de variables difusas [1], que se caracteriza por los conjuntos y etiquetas lingüísticas en que se particiona cada una de ellas [8]; y una base de reglas definida sobre estas variables. El consecuente de cada regla TSK es una función polinomial de las variables de entrada y, en el caso de los sistemas de orden cero (TSK-0) el consecuente es un polinomio de orden cero, es decir, un número real.

El antedecente de una regla difusa está formado por uno o varios predicados de la forma X es F, donde X es una variable del problema y F es un conjunto difuso incluído en la partición asociada a la variable X. De esta forma, una regla de tipo TSK-0 se representa:

$$R_s : \text{Si } X_1 \text{ es } F_1^s \text{ y } \ldots \text{ y } X_n \text{ es } F_n^s \text{ entonces } Y = b_s$$

La regla describe una relación entre las variables de entrada y la salida. Dada una instancia $e_l = (x_1^l, x_2^2, \ldots, x_n^l)$, el proceso de inferencia asocia un grado de verdad h_s^l a la salida de la regla b_s, donde $h_s^l = T(\mu_{X_1}^{x_1^l}, \mu_{X_2}^{e_2^l}, \ldots, \mu_{X_n}^{e_n^l})$, siendo T una T-norma[1]. Debido a que una misma instancia puede disparar varias reglas, la inferencia en los SBRDs de tipo TSK obtiene la salida, $\hat{y}^l$, como la media de las salidas individuales generadas por cada regla $R_s \in \mathcal{RB}$, ponderada por su grado de verdad (ver Ecuación 1).

$$\hat{y}^l = \frac{\sum_{R_s \in \mathcal{RB}} h_s^l b_s}{\sum_{R_s \in \mathcal{RB}} h_s^l} \tag{1}$$

III. Generación de reglas candidatas TSK-0 en problemas de alta dimensionalidad

Los algoritmos que aprenden SBRDs partiendo de una definición de las variables difusas, suelen dividir la tarea en la generación de un conjunto de reglas candidatas, y la posterior selección del subconjunto de reglas y ajuste del consecuente de las mismas [4], [5], [9], [10]. Este trabajo se centra en la fase de extracción de reglas candidatas, por lo que puede ser aplicado a cualquier algoritmo que utilice esta estrategia.

Como nos centraremos únicamente en la construcción del conjunto de reglas candidatas, utilizaremos un algoritmo que genera la partición de las variables difusas en un solo paso. En trabajos relacionados se utiliza comunmente una distribución de los conjuntos difusos triangulares de igual anchura (ver Figura III). Sin embargo, este enfoque puede ser inadecuado cuando los datos no están distribuidos homogéneamente a lo largo del dominio de la variable, ya que la importancia de cada conjunto difuso sería diferente al cubrir una proporcion desigual del número de instancias del problema. La alternativa que utilizamos en este trabajo consiste en distribuir estos conjuntos difusos triangulares de forma equifrecuencual, de tal manera que cada conjunto cubra el mismo porcentaje de instancias del problema (ver Figura 2).

[1]En este trabajo usamos min como T-Norma.

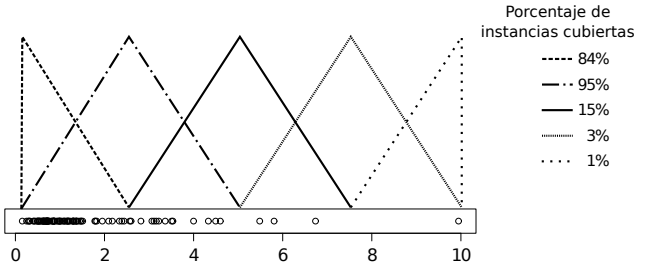


Figura 1. Particiones difusas con distribución equiespacial

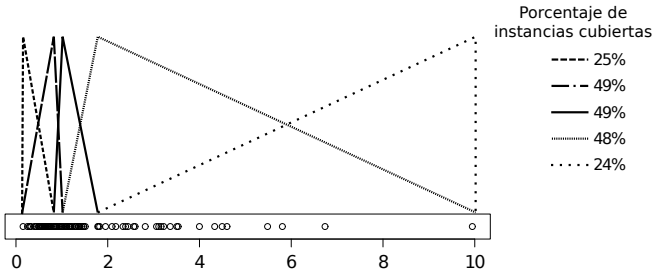


Figura 2. Particiones difusas con distribución equifrecuencial

De cara a seleccionar el subconjunto de reglas candidatas y fijar su consecuente, utilizaremos el algoritmo básico del estado del arte en sistemas TSK-0 [11]. Éste consiste en seleccionar el conjunto completo de reglas candidatas y, utilizando mínimos cuadrados, estimar sus consecuentes de forma que se minimice el error del sistema completo de reglas con respecto al conjunto de datos de entrenamiento $\mathcal{E}$. La expresión matricial utilizada por el método de mínimos cuadrados se muestra en la Ecuación 2, donde $c_s^l = \frac{h_s^l}{\sum_{\mathcal{RB}} h_s^l}$. El vector columna de consecuentes, $[b_1, \ldots, b_{|\mathcal{RB}|}]^T$, se obtiene como $B = C^{-1} \cdot Y$, donde C^{-1} se calcula utilizando la pseudoinversa de Moore-Penrose construida a mediante el método SVD [12].

$$Y = C \cdot B = \begin{bmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^l \\ \vdots \\ y^{|\mathcal{E}|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1^1 & \cdots & c_{|\mathcal{RB}|}^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1^l & \cdots & c_{|\mathcal{RB}|}^l \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1^{|\mathcal{E}|} & \cdots & c_{|\mathcal{RB}|}^{|\mathcal{E}|} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{|\mathcal{RB}|} \end{bmatrix} \tag{2}$$

Nuestra propuesta para la generación de reglas candidatas, parte del trabajo propuesto en [5], en el que se genera el conjunto de reglas candidatas TSK-0 en dos fases. En primer lugar, extrayendo aquellas que tienen una alta interacción con el conjunto de datos de entrenamiento; y posteriormente filtrando aquellas reglas que tienen un mínimo grado de calidad individual, medida como la varianza de dicha regla con respecto al conjunto de instancias que la activan. A continuación se detallan ambas etapas, y el método alternativo propuesto.

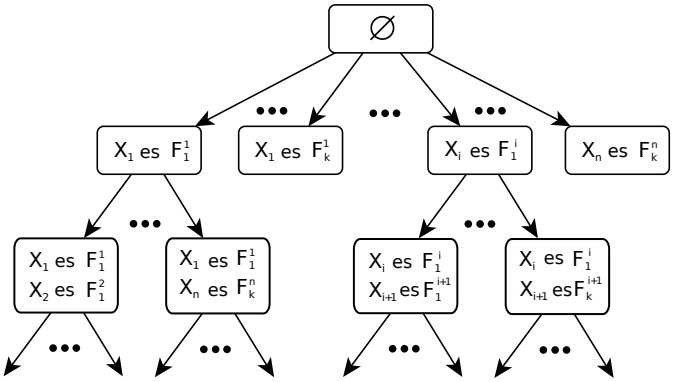


Figura 3. Estructura general del árbol de reglas candidatas

III-A. *Extracción de reglas candidatas*

El proceso para la extracción de reglas difusas propuesto en [5] está basado en el conocido método *Apriori* para la extracción de reglas asociativas [6].

Un conjunto $F_s = (F_i^s, \ldots, F_j^s)$, representa una serie de predicados X_i es $F_i^s, \ldots, F_j$ es F_j^s, tal que $X_i \neq X_j \forall i, j$. Visto de otra manera, F_s es la representación del antecedente de una regla candidata R_s. El soporte de un conjunto F_s cuantifica el número de ejemplos que emparejan con la regla, y en qué medida lo hacen. Se expresa como:

$$soporte(F_s) = \frac{\sum_{e_l} T(\mu_{F_i}^{x_i^l}, \ldots, \mu_{F_j}^{x_j^l})}{|\mathcal{E}|} = \frac{\sum_{e_l} h_s^l}{|\mathcal{E}|}$$

Se denomina conjunto frecuente a aquel cuyo soporte es mayor que un umbral $min_soporte$. El significado de este parámetro está asociado con el número de instancias que activan el antecedente de la regla asociada. De esta manera, si $min_soporte = 0{,}05$, significa que el conjunto será frecuente si un 5 % de las instancias están cubiertas por la regla asociada con grado de cobertura 1, o un mayor porcentaje si este grado de cobertura no es máximo para todas ellas.

El método de generación de reglas candidatas devuelve aquellas que superen el umbral de mínimo soporte. Para conseguirlo de manera eficiente, se construye un árbol de búsqueda [4] en el que cada nodo representa un conjunto o antecedente F^s, de modo que un nodo correspondiente al conjunto $F^{s'}$ es hijo de otro, correspondiente al conjunto F^s, si $F^{s'}$ se obtiene añadiendo un predicado a F^s (Figura 3).

El árbol se construye desde la raíz, y considerando el principio apriori, según el cual, si un nodo es no frecuente, ninguno de sus nodos hijos será frecuente, por lo que no es necesario expandirlo.

Si la métrica utilizada, en este caso el soporte, es monótonamente creciente o decreciente, el resultado del algoritmo es equivalente al devuelto a partir de una exploración completa del árbol. En el caso del soporte, éste es monotonamente decreciente. Por convenio, se parte de un soporte inicial en el nodo raíz (regla sin antecedentes) igual a uno. Conforme se añaden predicados al antecedente vacío, el soporte solo puede disminuir.

III-B. *Filtrado de reglas candidatas*

En problemas de alta dimensionalidad, el conjunto de reglas candidatas generado por el proceso anterior puede ser, todavía, excesivamente elevado. Esto se debe, en parte, a que muchas reglas son redundantes (cubren conjuntos muy parecidos de ejemplos). Además, las reglas son seleccionadas por cobertura, por lo que no se tiene en cuenta la capacidad de predicción de las mismas. Debido a esto, en una fase posterior, se han de elegir las mejores reglas dentro del conjunto total de reglas candidatas.

El proceso de filtrado, llamado *prescreening*, realiza una selección iterativa de las reglas candidatas basada en su calidad predictiva, y trata de evitar la redundancia entre ellas. La métrica utilizada para calcular la calidad individual de las reglas, es el error cuadrático medio de predicción de cada regla con respecto a las instancias la activan. Como los valores de esta métrica permanecen invariables a lo largo del proceso, son precalculados antes de comenzar el proceso iterativo. Para evaluar el grado de redundancia se mide, para cada instancia e_l, en la iteración i, el número de reglas ya seleccionadas que ala activan, denotado como c_l^i. Para cada regla, se calcula entonces la media de los grados de activación con cada instancia del conjunto de datos, ponderada por el peso asociado a cada una de ellas, siendo éste $w_l^i = \frac{1}{c_l^i + 1}$. De esta manera, si una instancia está cubierta por varias reglas ya seleccionadas, la suma de los grados de activación ponderados disminuirá, favoreciendo la selección de otras reglas cuyo grado de redundancia es menor.

Inicialmente el conjunto de reglas candidatas preseleccionadas es $\mathcal{RB}_c = \emptyset$. En cada iteración, i, se seleccionará la mejor regla de acuerdo a la métrica expresada en la Ecuación 3, donde $ECM(\mathcal{E}^s)$ es el error cuadrático medio de la variable objectivo para las instancias que activan la regla R_s. Dado que la parte que mide el grado de redundancia y el ECM tienen un dominio diferente, éstos se normalizan al rango $[0-1]$ en cada iteración. Si todas las instancias están cubiertas un mínimo de k_t reglas, el proceso iterativo termina.

$$wWRAccR(R_s, i) = \sum_{e_l} \frac{w_l^i(e_l) \cdot h_s^l}{w_l^i(e_l)} \cdot ECM(\mathcal{E}^s) \quad (3)$$

III-C. *Propuesta de unificación de las fases de generación de reglas y filtrado*

El coste del algoritmo de filtrado (*prescreening*) descrito anteriormente es muy elevado. Esto se debe, por una parte, a que el número de reglas generadas con *apriori* suele ser muy grande; por otra parte, en cada iteración se debe calcular, para cada instancia, el grado de cobertura con cada regla ponderado por el peso de dicha instancia. En este trabajo proponemos el diseño de una métrica que permita cuantificar

la calidad de una regla, y que sea monónonamente creciente o decreciente, de tal manera que se pueda integrar en la fase inicial de generación de reglas candidatas (basada en *apriori*), evitando el posterior uso de un algoritmo de filtrado.

Se puede comprobar fácilmente que el ECM no es una métrica montótona. Por ejemplo, supóngase el conjunto de valores $Y = \{1, 2, 3, 2\}$, y una predicción $\hat{Y} = \{2, 2, 2, 2\}$. En ese caso, $ECM(Y, \hat{Y}) = \frac{2}{4}$. Si se reduce el conjunto de instancias, de tal manera que $Y' = \{1, 2, 3\}$, y la predicción es $\hat{Y}' = \{2, 2, 2\}$, $ECM(Y', \hat{Y}') = \frac{2}{3}$. Es decir, aumenta. Por otro lado, si el conjunto $Y' = \{2, 2\}$, y $\hat{Y}' = \{2, 2\}$, entonces $ECM(Y', \hat{Y}') = \frac{0}{2}$, es decir, el ECM se reduce.

Debido a esto, la métrica que se propone utilizar es el error cuadrático, que sí es monótonamente decreciente, al igual que el soporte. Sea N el número de instancias del conjunto de datos ($N = |\mathcal{E}|$). Y sean $\sum_{i=1}^{N}(y_i - \overline{y})^2$ el error cuadrático para N instancias (ECM_N), y $\sum_{i=1}^{N+1}(y_i - \overline{y})^2$ el análogo para $N+1$ instancias (ECM_{N+1}). Entonces,

$$ECM_N \leq ECM_{N+1}$$

$$\sum_{i=1}^{N}(y_i - \overline{y})^2 \leq \sum_{i=1}^{N}(y_i - (\overline{y} + \delta))^2 + (y_{N+1} + \delta)^2,$$

donde se expresa la media para las $N + 1$ instancias como la media para N instancias más una variación δ. Para demostrar que la inecuación anterior siempre se satisface, se parte de que, como $(y_{N+1} + \delta)^2$ es un número positivo, la expresión se puede simplificar a:

$$\sum_{i=1}^{N}(y_i - \overline{y})^2 \leq \sum_{i=1}^{N}(y_i - (\overline{y} + \delta))^2$$

$$\sum_{i=1}^{N}(y_i^2 + \overline{y}^2 - 2x\overline{y}) \leq \sum_{i=1}^{N}(y_i^2 + (\overline{y} + \delta)^2 - 2y(\overline{y} + \delta)$$

$$\sum_{i=1}^{N}(y_i^2 + \overline{y}^2 - 2x\overline{y}) \leq \sum_{i=1}^{N}(y_i^2 + \overline{y}^2 + \delta^2 + 2\overline{y}\delta - 2y\overline{y} - 2y\delta).$$

Restando la parte izquierda de la inecuación a ambos lados:

$$0 \leq \sum_{i=1}^{N}(\delta^2 + 2\overline{y}\delta - 2y\delta)$$

$$0 \leq N\delta^2 + 2N\overline{y}\delta - 2\delta\sum_{i=1}^{N} y_i.$$

La media de $y_1, \ldots, y_N$, $\overline{y}$ se puede expresar como:

$$0 \leq N\delta^2 + 2N\delta\frac{\sum_{i=1}^{N} y_i}{N} - 2\delta\sum_{i=1}^{N} y_i$$

$$0 \leq N\delta^2 + 2\delta\sum_{i=1}^{N} y_i - 2\delta\sum_{i=1}^{N} y_i$$

$$0 \leq N\delta^2,$$

siendo N siempre un número positivo, al igual que δ^2. Por lo tanto, la inecuación se cumple siempre, por lo que se demuestra que el error cuadrático es monótono.

Utilizando el EC como métrica de calidad, se puede proceder de manera similar a como se hace con el soporte para la construcción del árbol de reglas candidatas. Es decir, puede fijarse un umbral máximo de EC, y solo las reglas que cumplen este criterio serán incluidas en $\mathcal{RB}_c$ como reglas candidatas. Sin embargo, como las métricas de cobertura (soporte) y de calidad de predicción (EC) son métricas contrapuestas (un valor alto de soporte es positivo, mientras que un valor alto de EC es negativo), no se pueden combinar para computar la decisión de podar o no una rama. Por ello, la solución que se adopta consiste en continuar con el mismo criterio de generación, basado únicamente en el soporte, y utilizar el EC como criterio para incluir o no la regla derivada del nodo en $\mathcal{RB}_c$.

En estudios preliminares se observó que el parámetro de maxímo EC es muy dependiente del conjunto de datos, y debía ser ajustado específicamente. Para solucionar este problema, se aplica una técnica de poda selectiva sobre los nodos descendientes, en lugar de aplicarla a nivel de expansión de nodos. Cuando un nodo cumple el criterio de mínimo soporte, éste será considerado como regla candidata y será expandido, generando el conjunto de nodos descendientes. En este momento, se filtrarán estos nodos en función de la calidad *con respecto al padre*. En conctreto, se descartarán los nodos cuyo EC dividido por el soporte de la regla R_s no disminuya en un porcentaje con respecto al EC del padre dividido por el soporte del nodo padre. El parámetro que determina este porcentaje se denomina *min_quality_improvement*. La intuición que sostiene este criterio (dividir el EC por el soporte de cada nodo) es la siguiente: un nodo puede ver disminuido el error cuadrático con respecto al padre simplemente por el hecho de que tiene menos instancias, pero aún así, los datos correspondientes (los que emparejan la regla) presentan la misma dispersión. Por ello, dividiendo la división por el soporte, constituye una buena métrica para indicar el porcentaje de mejora con respecto al padre.

IV. Experimentación

Para validar la calidad de las reglas candidatas generadas, se comparará la estrategia expuesta en [5] y la propuesta descrita anteriormente. Para ello, se partirá de un SBRDs con unas variables difusas prefijadas, calculadas a partir de una distribución equifrecuencial, utilizando 5 conjuntos difusos. En el último paso, con las reglas candidatas generadas, se estimará el consecuente de todas ellas mediante mínimos cuadrados. La comparación entre los dos enfoques se hará en relación a la capacidad de predicción, medido como la raíz cuadrada del error cuadrático medio (RECM), y en cuanto

a la complejidad del sistema generado, tanto en número de reglas candidatas generadas como en tiempo consumido (en segundos). Respecto al hardware utilizado, la máquina donde se ejecutaron los experimentos consta de un procesador Intel Xeon E5450 a 3.00GHz y 32GB de memoria RAM.

Para la comparativa se han utilizado 7 datasets del repositorio KEEL[2], con número de variables que va desde 16 hasta 85. En la Tabla I se puede observar, para cada problema, su número de variables e instancias, además del dominio de la variable de salida. Con respecto a la parametrización de los algoritmos de generación de reglas candidatas, se ha fijado el parámetro *min_soporte*= 0,05 en ambos casos, $k_t = 20$ para la fase *prescreening* del algoritmo descrito en [5] (como recomiendan los autores), y *min_quality_improvement*= 0,5 en nuestra propuesta. Finalmente, en problemas de alta dimensionalidad hemos notado que el algoritmo tendía a incluir un elevado número de antecedentes por regla. Este hecho disminuye enormemente la interpretabilidad del sistema. Para evitar este problema, hemos usado un umbral variable para el mínimo soporte, siendo éste $min_support_i = min_support \cdot \sqrt{depth_level}$, siendo $depth_level$ la profundidad del nodo en el árbol de búsqueda.

Tabla I
Caracteristicas de los problemas utilizados en la experimentación

problema	#variables	#instancias	rango Y
house	16	22784	[0, 500001]
elevators	18	16599	[0.012, 0.078]
compactiv	21	8192	[0.0, 99.0]
pole	26	14998	[0.0, 100.0]
puma32h	32	8192	[-0.086661, 0.089805]
ailerons	40	13750	[-0.0036, 0.0]
tic	85	9822	[0, 1]

En la Tabla II se muestran los errores de predicción (RECM tanto para entrenamiento como para test) y el tiempo de aprendizaje en segundos. En la Tabla III se muestra la complejidad de los modelos generados por ambos algoritmos, mostando el número medio de reglas candidatas (|reglas|) y el número medio de antecedentes por regla ($|\#ant|$).

Como puede observarse, en cuanto a capacidad de predicción, nuestra propuesta es mejor para los 7 conjuntos de datos, tanto en error de entrenamiento como de test. Atendiendo a la complejidad de los sistemas de reglas generados, observamos que el método propuesto produce siempre conjuntos con un mayor número de reglas, aunque en 4 de los 7 problemas éstas tienen un menor número medio de antecedentes. Analizando conjuntamente esta información podemos concluir que, aunque nuestra propuesta siempre mejora en términos de error de entrenamiento, puede deberse en parte al aumento en el número de reglas candidatas, ya que la técnica de mínimos cuadrados tiende a sobreajustar el conjunto de entrenamiento. No obstante, también observamos una mejora en cuanto al error de test, lo que nos lleva a concluir que, además, la calidad de las reglas candidatas es similar e incluso mejor.

[2]www.keel.es/

Tabla II
Raíz del error cuadrático medio de entrenamiento y de test, y tiempo de ejecución para el algoritmo de generación basado en dos fases. En el caso de los problemas elevators, puma32h y ailerons se muestra el error $\cdot 10^3$.

	Generación en dos fases		
problema	RECM (entr.)	RECM (test)	Tiempo (s)
house	37292.24	37454.70	220.73
elevators	5.41	5.47	447.97
compactiv	10.92	11.04	183.58
pole	32.16	32.22	411.43
puma32h	24.46	24.59	419.07
ailerons	0.29	0.29	5204.02
tic	0.23	0.24	16784.83
	Generación en una fase		
problema	RECM (entr.)	RECM (test)	Tiempo (s)
house	**35506.00**	**36083.98**	**96.67**
elevators	**3.71**	**3.82**	**113.29**
compactiv	**3.07**	**3.36**	**103.88**
pole	**17.07**	**17.18**	**31.66**
puma32h	**20.00**	**20.42**	**63.39**
ailerons	**0.18**	**0.19**	**719.26**
tic	**0.22**	**0.23**	**313.71**

Tabla III
Número de reglas, reglas candidatas y número medio de antecedentes por regla

	Generación en dos fases		Generación en una fase	
problem	|reglas|	$\|\#ant\|$	|reglas|	$\|\#ant\|$
house	**76.60**	**1.39**	188.90	1.66
elevators	**68.10**	1.82	292.07	**1.81**
compactiv	**66.97**	**1.35**	446.37	1.88
pole	**42.97**	1.48	78.80	**1.17**
puma32h	**53.27**	**1.03**	207.00	1.23
ailerons	**46.60**	1.91	906.83	**1.89**
tic	**38.70**	2.26	384.47	**1.42**

Respecto al esfuerzo computacional, podemos ver una clara diferencia en cuanto a los tiempos de ejecución. En la Tabla II se aprecia una diferencia que puede alcanzar varios órdenes de magnitud. Este resultado es muy importante, y demuestra la capacidad de encontrar un conjunto de reglas candidatas de calidad de una forma muchísimo más eficiente.

Por último, en la Figura 4 podemos ver una comparativa de los tiempos aplicando una transformación logarítmica ($f(x) = \log_{10}(1+x)$), para poder visualizar las diferencias de tiempo para todos los problemas a la vez. Como se puede observar, las diferencias de tiempos se hacen más notables conforme aumenta el número de variables del problema.

V. Conclusión

En este trabajo se ha propuesto un algoritmo para la generación de reglas candidatas tipo TSK-0 en problemas de regresión. Para ello, se ha tomado como punto de partida el trabajo realizado en [5], el cual propone un algoritmo dividido en dos fases. La primera de ellas, apoyada en el principio Apriori para generar un conjunto de reglas general de forma eficientemente. Para ello, el proceso es guiado por la métrica de soporte de cada regla candidata. En una segunda fase, se aplica un filtrado enfocado a evitar la redundancia de reglas

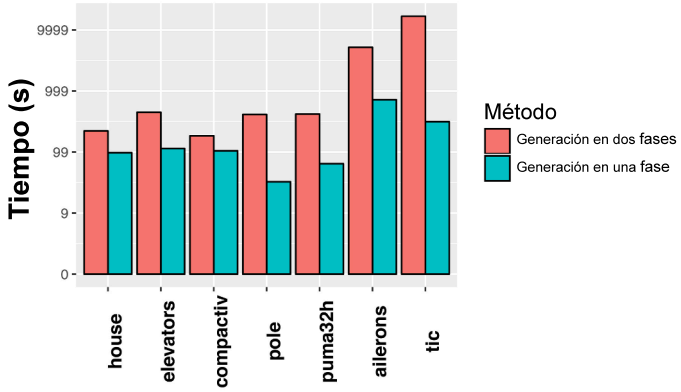


Figura 4. Comparativa de tiempos para ambos métodos en escala logarítmica

candidatas. Además, este proceso es guiado por una métrica de calidad individual de las reglas, centrada en evaluar la calidad predictiva de cada una de ellas.

Existen principalmente dos problemas en la propuesta anterior. Por un lado, se genera un elevado número de reglas candidatas en la primera fase. Por otro lado, la segunda fase requere un gran esfuerzo computacional al aplicar una selección de reglas candidatas (generadas por la primera fase) de forma iterativa. Estos problemas hacen que su uso sea ineficiente y, en ocasiones, impracticable en problemas de alta dimensionalidad. Nuestra propuesta se centra en la unificación de las dos fases, diseñando una métrica de calidad de predicción individual monótona, capaz de ser combinada con el soporte y que sirva como guía en el proceso de construcción del árbol de búsqueda del que se extraen las reglas candidatas.

Los resultados demuestran una calidad similar o incluso superior en cuando a la capacidad de predicción del conjunto de reglas candidatas, y una grandísima mejora en cuanto a la eficiencia. En trabajos futuros pretendemos ampliar la experimentación, utilizando un mayor conjunto de problemas, a la vez que validando el conjunto de reglas candidatas con varios algoritmos de búsqueda para la selección de las reglas que formarán el sistema de reglas. En este sentido, [13] y [14] se centran en utilizar algoritmos de búsqueda local, los cuales permiten realizar esta búsqueda eficientemente explotando la localidad espacial de las etiquetas difusas, lo que los hace adecuados para problemas de alta dimensionalidad.

Agradecimientos

Este artículo ha sido parcialmente financiado por fondos FEDER y la Agencia Estatal de Investigación (AEI/MINECO) mediante el proyecto TIN2016-77902-C3-1-P, y por la Junta de Comunidades de Castilla-La Mancha mediante el proyecto SBPLY/17/18050/000493. Javier Cózar también está financiado por el MECD mediante la beca FPU12/05102.

Referencias

[1] L. Zadeh, "Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 3, no. 1, pp. 28–44, 1973.

[2] E. Mamdani and S. Assilian, "An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller," *International Journal of Man-Machine Studies*, vol. 7, pp. 1–13, 1975.

[3] E. Mamdani, "Applications of fuzzy algorithm for control a simple dynamic plant," pp. 1585–1588, 1974.

[4] J. Alcala-Fdez, R. Alcala, and F. Herrera, "A fuzzy association rule-based classification model for high-dimensional problems with genetic rule selection and lateral tuning," *Fuzzy Systems, IEEE Transactions*, vol. 19, no. 5, pp. 857–872, 2011.

[5] J. Cózar, L. delaOssa, and J. A. Gámez, "TSK-0 fuzzy rule-based systems for high-dimensional problems using the apriori principle for rule generation," *Rough Sets and Current Trends in Computing*, vol. 8536, pp. 270–279, 2014.

[6] R. Agrawal, T. Imieliński, and A. Swami, "Mining association rules between sets of items in large databases," *SIGMOD Rec.*, vol. 22, no. 2, pp. 207–216, Jun. 1993.

[7] T. Takagi and M. Sugeno, "Fuzzy identification of systems and its applications for modeling and control," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 15, no. 1, pp. 116–132, 1985.

[8] L. Zadeh, "The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning," *Information Science*, vol. 8, pp. 199–249, 1975.

[9] L. Wang and J. Mendel, "Generating fuzzy rules by learning from examples," *Systems, Man and Cybernetics, IEEE Transactions*, vol. 22, no. 6, pp. 1414–1427, 1992.

[10] O. Cordón and F. Herrera, "A proposal for improving the accuracy of linguistic modeling," *Fuzzy Systems, IEEE Transactions*, vol. 8, no. 3, pp. 335–344, 2000.

[11] K. Nozaki, H. Ishibuchi, and H. Tanaka, "A simple but powerful heuristic method for generating fuzzy rules from numerical data," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 86, pp. 251–270, 1997.

[12] V. C. Klema and A. J. Laub, "The singular value decomposition: Its computation and some applications," *Automatic Control, IEEE Transactions*, vol. 25, no. 2, pp. 164–176, 1980.

[13] J. Cózar, L. delaOssa, and J. A. Gámez, "Learning TSK-0 linguistic fuzzy rules by means of local search algorithms," *Applied Soft Computing*, vol. 21, no. 0, pp. 57–71, 2014.

[14] J. Cózar, L. delaOssa, and J. A. Gámez, "Learning compact zero-order tsk fuzzy rule-based systems for high-dimensional problems using an apriori + local search approach," *Information Sciences*, vol. 433 - 434, pp. 1 – 16, 2017.

Un modelo difuso lingüístico adaptativo para regresión con selección de reglas en Big Data

Antonio Ángel Márquez Ana María Roldán
Departamento de Tecnologías de la Información
Universidad de Huelva
Huelva – España
amarquez, amroldan@dti.uhu.es

Francisco Alfredo Márquez Antonio Peregrín
C.E. Avanzados en Física, Matemáticas y Computación
Universidad de Huelva
Huelva – España
alfredo.marquez, peregrin@dti.uhu.es

***Abstract*—En el diseño de sistemas basados en reglas difusas para regresión, son bien conocidos los modelos que permiten obtener la base de reglas a partir de conjuntos de datos por cubrimiento, así como los que posteriormente permiten mejorar la precisión del sistema empleando, por ejemplo, un ajuste del operador de defuzzificación adaptativo que, además, permita obtener un conjunto de reglas más compacto y con mejor nivel de cooperación. En este trabajo se lleva a cabo este proceso en entornos de *Big Data*, es decir, adaptando los algoritmos a esta tecnología para que se puedan utilizar partiendo de conjuntos de ejemplos que no serían manejables sin disponer de una infraestructura escalable.**

Keywords—regresión difusa; bases de reglas; defuzzificación adaptativa; Big Data; MapReduce.

I. Introducción

En el área de los *Sistemas Basados en Reglas Difusas* en general, y para modelado y control en particular, existe una considerable cantidad de trabajos que emplean algoritmos evolutivos para aprender y/o ajustar elementos del sistema, que van por ejemplo desde los de la Base de Conocimiento (BC) como el aprendizaje de la Base de Reglas (BR), o ajuste de la Base de Datos (BD), hasta incluso los operadores, como en [1], [2]. A todo este ámbito se le llamó el de los *Sistemas Difusos Evolutivos* [3], [4], [5], y en él se han desarrollado pues, gran cantidad de recursos muy útiles desde hace más de dos décadas. Estos algoritmos utilizan conjuntos de ejemplos desde los que aprender o evaluar los distintos citados elementos.

La posibilidad de emplear conjuntos de ejemplos más grandes con algunas de estas técnicas ha sido tratada a veces por distintos autores: cuando los conjuntos de ejemplos son muy grandes, las técnicas utilizadas pueden necesitar modificaciones o re-implementaciones para que sigan siendo aptas. Tradicionalmente, las mejoras en este sentido [5] se han orientado a la reducción de datos, al uso de aproximaciones o estimaciones, a la introducción de heurísticas en los algoritmos para mejorar su eficiencia, y en algunos pocos casos, al uso de computación distribuida. Sin embargo, es con la llegada de los recursos para afrontar el tratamiento de grandes conjuntos de datos en entornos de Big Data, cuando se dispone de herramientas para hacer verdaderamente escalables algunas de estas técnicas tradicionales.

Este trabajo trata precisamente del uso de recursos computacionales distribuidos del ámbito del *Big Data*, para emplear una técnica tradicional, como es el ajuste de la defuzzificación adaptativa en regresión y control difusos, cuando el conjunto de ejemplos es grande, o simplemente cuando el aprovechamiento de estos recursos nos permite realizar el mismo trabajo en tiempos menores, lo cual por ejemplo con el uso de algoritmos evolutivos, puede ser una interesante mejora.

II. Conocimientos Previos

En esta Sección se van a repasar brevemente dos elementos que empleamos en nuestra propuesta: la defuzzificación adaptativa, y la tecnología *MapReduce*.

A. Defuzzificación Adaptativa Evolutiva

La defuzzificación adaptativa es un recurso tradicional y bien conocido que permite adaptar el comportamiento del mecanismo de obtención de una salida específica desde la aportación de cada regla disparada en la fase de inferencia en regresión difusa, consiguiendo mejorar la precisión del modelo resultante, pues cada regla participa en dicho proceso de una forma específica y diferente al resto [1],[2].

Es posible encontrar múltiples propuestas en la literatura para conseguir regular o adaptar el mecanismo de defuzzificación mediante el uso de parámetros. Sin embargo, lo más frecuente suele ser utilizar la expresión (1), dados sus buenos resultados, su sencillez computacional y facilidad de implementación [2],

$$y_0 = \frac{\sum_i^N h_i \cdot \alpha_i \,.\, CG_i}{\sum_i^N h_i \,.\, \alpha_i}, \qquad (1)$$

donde h_i es el *matching degree* o grado de emparejamiento, α_i es el parámetro que se aplica con la regla i-esima, R_i, con $i=1$ *hasta* N, y CG_i es el Centro de Gravedad de la figura obtenida de la inferencia con la regla R_i. Como se puede ver, se trata de la expresión de un método de defuzzificación que actúa convirtiendo la aportación de cada regla en un número, y posteriormente calculando una media ponderada, es decir, del llamado *Modo-B*. El parámetro α_i pues, tomando valores en el intervalo [0,1], permite a su vez ponderar o reducir el efecto del

grado de emparejamiento, h_i, como si de un peso, w_i, se tratase [6].

Para conseguir el ajuste de los N citados α_i parámetros, es decir, reducir la diferencia entre la salida del sistema difuso y el conjunto de ejemplos, se podrían emplear diferentes métodos. En este sentido, el uso de algoritmos evolutivos suele ser una buena opción. La codificación empleada en este caso es de tipo real, pues como se ha indicado, el valor de los parámetros α_i se encuentra entre 0 y 1.

Obsérvese que este mecanismo de ajuste paramétrico no sólo permite que la aportación de cada regla sea regulada sino que a través de él, se consigue mejorar el nivel de cooperación entre las reglas de la BC [1]. Incluso llevado al extremo, la defuzzificación adaptativa puede emplearse como mecanismo de selección y reducción de reglas: si una regla tiene un valor 0 para su parámetro, dicha regla no participa o deja de ser considerada. El hecho de disponer de un mecanismo que permita eliminar reglas es particularmente interesante cuando dichas reglas provienen de un proceso de aprendizaje que no las ha valorado en su conjunto, como suelen ser los métodos basados en cubrimiento de ejemplos, donde cada regla se obtiene con criterios de calidad individual.

Cabe mencionar también en este sentido, que en [7] se propone un mecanismo para facilitar la eliminación de reglas con aportación baja, basado en eliminar aquellas reglas cuyo parámetro desciende por debajo de cierto umbral (es decir, no sólo cuando el valor es exactamente 0). En el citado trabajo, también se elimina el parámetro de las reglas cuyo valor está cercano a 1, suponiendo por tanto una reducción de la carga computacional y reduciendo la complejidad de la BC, pues se reduce el número de reglas, y el número de reglas con parámetro asociado.

B. *Tecnologías para Big Data*

En los últimos años se han desarrollado un conjunto de tecnologías para el almacenamiento, gestión y tratamiento de grandes conjuntos de datos de forma distribuida y escalable. A estas tecnologías se les suele llamar genéricamente, tecnologías para *Big Data* [8] y los tres pilares en los que se apoyan estas tecnologías actualmente son:

- Sistemas de archivos distribuidos, donde los grandes archivos de datos se almacenan divididos entre varios servidores, tales como el popular *Apache Hadoop Distributed File System* (HDFS) [10].
- Paradigmas de programación tales como *MapReduce* [11] o *Pregel* [12], que permiten implementar procesos de computación en *clusters* de computadoras.
- Entornos para *clusters* de computación como *Apache Hadoop* [10] o *Apache Spark* [13] que nos permiten organizar y gestionar grupos de computadoras tanto como sistemas de almacenamiento (a través de sistemas de archivos distribuidos) como estructuras de procesamiento de datos (implementando modelos de programación distribuida) eficientemente.

El paradigma de programación *MapReduce* lo introdujo Google en 2004 [11]. Una de sus mejor conocidas y empleadas implementaciones en código abierto es *Apache Hadoop*, la cual, implementa características como el almacenamiento y procesamiento escalables, los cuales se pueden usar de forma relativamente sencilla, tienen elevada tolerancia a fallos, alta disponibilidad, redundancia de datos automática, etc. A nivel de procesamiento, *Hadoop* está pensado para emplearse procesando datos en una sola pasada, esto es, no es eficiente implementando múltiples pasadas de procesamiento sobre los datos, así como tampoco está pensando para procesamiento de datos interactivamente. *Apache Spark* [13] sin embargo, sí resuelve estas situaciones.

Apache Spark es igualmente un entorno para la programación distribuida de código abierto, ideado como un paso adelante en cuanto a flexibilidad y eficiencia. No sólo permite utilizar el modelo de computación *MapReduce*, si bien considerablemente más rápido [13] que *Hadoop*, sino también *Pregel* [12] y el suyo propio. Pero una de las ventajas más interesantes de *Spark* es que permite implementar de forma eficiente el procesamiento de datos iterativo o multi-pasada, debido al uso particular de la memoria RAM que implementa, a través de una abstracción de memoria distribuida conocida como RDD (*Resilent Distributed Dataset*) [13], que le permite reducir el acceso a disco intermedio mejorándose así dramáticamente su rendimiento. Los RDDs son conjuntos de datos que se ubican físicamente troceados entre distintos servidores del *cluster*, y que pueden ser procesados en paralelo. Los programadores emplean estos RDDs a través de transformaciones, que los procesan produciendo otros RDDs, o bien mediante acciones, que les aplican un procesamiento que ofrece como salida un valor o cálculo. La tolerancia a fallos se obtiene precisamente gracias a los citados RDDs, ya que estos pueden ser reconstruidos automáticamente si por alguna razón, se perdiesen durante su procesamiento.

Los programas implementados para ser ejecutados en *Spark* se componen de una única aplicación *driver* que se ejecuta en el nodo maestro, y un conjunto de tareas que corren en paralelo en los *ejecutores* sobre los nodos trabajadores del *cluster*, devolviendo sus resultados al *driver*.

Cabe destacar que *Spark* también permite realizar trabajos de computación distribuida de forma interactiva, es decir, instrucción a instrucción desde intérprete de comandos, y que puede utilizar HDFS como sistema de archivos distribuido.

El mecanismo que se propone en este trabajo utiliza *Spark* y el modelo de computación *MapReduce*.

III. Modelo con Post-Procesamiento para el Ajuste de la Defuzzificación y Selección de Reglas

En esta Sección se propone un modelo distribuido escalable implementado en el entorno *Spark*, que consta de dos etapas: en una primera etapa se obtiene la BR basándonos en la versión *MapReduce* de un método archiconocido para la obtención de reglas por cubrimiento de ejemplos, y una segunda en la que también de modo distribuido y escalable, se ajustarán mediante un algoritmo evolutivo los parámetros de la defuzzificación, empleando umbrales para seleccionar el subconjunto de reglas que mejor cooperan.

A. *Obtención Escalable de la BR desde Conjuntos de Datos*

El llamado "Método de Wang y Mendel" dirigido por datos [14] (WM en adelante) es un algoritmo extraordinariamente conocido para obtener BRs partiendo de un conjunto de ejemplos. En un trabajo previo [15], propusimos una versión adaptada del mismo basada en el uso de *MapReduce*, que llamamos *WM-Escalable*. Los resultados que produce son idénticos a los que produciría la metodología secuencial original de WM, y resumimos a continuación:

Los conjuntos de datos de ejemplos son troceados y repartidos entre los servidores del *cluster* para ser procesados de forma separada. En este caso, para obtener la BR usando el método de WM, sólo se necesita un esquema de una sola pasada, es decir, una sola fase *Map* y a continuación una fase *Reduce*. Los elementos son:

- Programa *Driver*: El programa *driver* ejecutado en el nodo maestro, en primer lugar, crea la BD utilizando un número predefinido de funciones de pertenencia distribuidas uniformemente en el universo de discurso de cada variable. En segundo lugar, el conjunto de entrenamiento se divide en *n* particiones disjuntas con el mismo número de instancias, y cada una de estas particiones se distribuye entre los nodos trabajadores del *cluster* junto con la citada BD.
- Función *Map*: Las funciones *Map* consisten en la aplicación de la metodología original de WM por parte de los procesos *ejecutores* sobre nodos trabajadores, cada uno en su subconjunto de ejemplos, que quedan así cubiertos por alguna de las reglas generadas. El método de WM consigue esto en primer lugar cubriendo cada ejemplo con una regla difusa que utiliza las etiquetas que tienen el mayor grado de pertenencia para cada variable, y además le asigna un valor que es el grado de emparejamiento de esa regla con ese ejemplo, el cual será empleado en una segunda fase para reducir el conjunto de reglas, es decir, para no tener tantas reglas como ejemplos sino sólo un subconjunto combinado de las reglas más representativas. La salida de estos procesos *Map* se produce en términos de pares *clave-valor* (siendo recibida por el *driver*), donde la **clave** son *las etiquetas de los antecedentes de las reglas halladas*, y el **valor** asociado son *el consecuente de las reglas encontradas, junto con el grado de emparejamiento de las reglas*.
- Función *Reduce*: La tarea de las funciones *Reduce* en este esquema es la de recibir las distintas reglas producidas por las funciones *Map*, (RB_i), y agruparlas para construir la BR definitiva. Para ello, debe eliminar las reglas repetidas, es decir, las que tienen los mismos antecedentes y el mismo consecuente, y resolver las reglas contradictorias, es decir, las que con los mismos antecedentes tienen distinto consecuente, lo cual se lleva a cabo eligiendo la que viene acompañada por el mayor grado de emparejamiento. En términos del diseño *clave-valor* de *MapReduce*, la función *Reduce* recibe una lista de valores intermedios compuesta por pares agrupados por claves (**clave**: *etiquetas de la parte antecedente de una regla*, y **lista de valores**: *consecuentes para esa parte antecedente de una regla y sus grados de emparejamiento*). La BR final está pues compuesta por el conjunto de reglas obtenidas por las funciones *Reduce*.

B. *Aprendizaje Escalable Evolutivo de los parámetros para la Defuzzificación Adaptativa con Selección de Reglas*

En esta Subsección se describe la parte original de este trabajo, donde se propone un método evolutivo para aprender o ajustar los valores de la defuzzificación adaptativa utilizando conjuntos de ejemplos muy grandes de forma eficiente, y especialmente apropiada al uso de BRs aprendidas mediante métodos de cubrimiento de ejemplos, ya que incorpora un mecanismo de selección de reglas, tal como se introdujo previamente en la Sección II, al que llamaremos *Defuzzificación Adaptativa Evolutiva con Selección de Reglas Escalable* (abreviado como *E-DAESR*). La originalidad en este trabajo está, no en el diseño evolutivo de defuzzificación adaptativa [2], sino en la escalabilidad de la propuesta. No repetiremos pues los detalles ya descritos previamente sino que nos centraremos en el diseño *MapReduce* del mecanismo, el cual, es equivalente exactamente al modelo secuencial original [2].

1) *Algoritmo Evolutivo*

Previamente, se va a describir el esquema evolutivo empleado, ya que de su detalle depende la posterior descripción del mecanismo para la escalabilidad de la propuesta. Se basa en el modelo CHC [16]. Sus componentes son:

Esquema de codificación y población incial

El esquema de codificación empleado es el de [1], que consiste en un cromosoma de tipo real con N genes, α_i, que representan cada uno al parámetro asociado a cada regla R_i de la RB, y cada uno de ellos toma valores en el intervalo [0,1].

$$C = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \mid \alpha_i \in \{0, 1\}$$

La población inicial se inicializa con todos los genes de cada cromosoma elegidos aleatoriamente en el intervalo anteriormente citado, excepto los de uno, cuyos genes se fijan a 1, lo que equivale al método estándar conocido como *CG ponderado por el grado de emparejamiento*.

Evaluación

La evaluación de los cromosomas consiste en tasar el modelo difuso con los parámetros de ese cromosoma. Dado que lo que se pretende resolver con esta propuesta es precisamente el uso de conjuntos de ejemplos muy grandes, este proceso es el que se realiza de forma distribuida por los *ejecutores* de *Spark*, como se describirá posteriormente. Para maximizar la precisión, minimizamos el Error Cuadrático Medio (MSE) cuya expresión es (2), donde $S[i]$ denota a los diferentes modelos difusos probados. Para ello, se utiliza un conjunto de evaluación compuesto por P pares de datos numéricos $Z_k = (x_k, y_k)$, $k=1,..,P$, siendo x_k los valores de las variables de entrada, e y_k los valores correspondientes de las variables de salida.

$$MSE(S[i]) = \frac{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}(y_k - S[i](x_k))^2}{N} \qquad (2)$$

Destacamos que, para llevar a cabo la selección de reglas mediante umbrales como en [7] se tiene en cuenta sólo y

simplemente cuando se evalúa el sistema difuso, es decir, los valores de los parámetros en los cromosomas se mantienen, pero por debajo de cierto umbral (se ha utilizado el valor 0.1), no se usa la regla, al igual que por encima de cierto umbral (se ha usado 0.9), se considera que el peso es 1.

Operador de cruce y criterio de rearranque

Empleamos el operador de cruce BLX-α [17], con $\alpha = 0.5$, y umbral inicial *L/4*. Cuando el umbral es menor que 0, se rearranca, construyéndose la población aleatoriamente excepto para el mejor de los padres de la población anterior.

2) Esquema MapReduce para la Defuzz. Adaptativa

A continuación se describe el diseño MapReduce realizado para construir el modelo *E-DAESR,* ilustrado en la Figura 1.

- Programa *Driver*: El programa *driver*, ejecutado en el nodo maestro, es el que se ocupa de llevar acabo la mayor parte del algoritmo evolutivo que aprende los parámetros de la defuzzificación asociados a cada una de las reglas R_i de la BR, cediendo el proceso más pesado, la evaluación con el conjunto de ejemplos, a la función *Map*, que se ejecuta de forma distribuida en el *cluster* en cada iteración del algoritmo evolutivo. El programa *driver* al inicio, divide y distribuye el conjunto de ejemplos en tantas unidades diferentes como elementos de procesamiento tenga el *cluster*. Asimismo, también distribuye una copia de la BC y la población completa de cromosomas a evaluar.
- Función *Map*: La evaluación de la población de cromosomas del algoritmo evolutivo es llevada a cabo por parte de los procesos *ejecutores* dentro de los nodos *trabajadores* del *cluster*, con su fracción del conjunto de ejemplos, obteniéndose por tanto el MSE para ese subconjunto. La función *Map* produce una lista de pares *clave-valor* intermedios que son devueltos al proceso *driver* tras su ejecución, de modo que la **clave** son *los cromosomas (parámetros asociados con cada regla)* y el **valor** es *el valor de evaluación (MSE) obtenido por la BR con los parámetros para la defuzzificación que lleva cada cromosoma.*
- Función *Reduce*: También son realizadas por los *ejecutores*: una o varias funciones *Reduce* reciben los resultados de los *Map*s y los combinan para tener el resultado completo de la evaluación para cada cromosoma. En términos de pares *clave-valor*, las funciones *Reduce* reciben una lista de valores intermedios agregados por la clave, de modo que la **clave** *es el cromosoma (los valores de los parámetros para cada regla)*, y como **lista de valores**, una *lista de la evaluación de cada cromosoma en cada partición de datos*, y ofrecen una lista de cromosomas con su valor de evaluación con el conjunto de ejemplos completo. La evaluación obtenida por todos los cromosomas es enviada al programa driver para que continúe el proceso evolutivo.

IV. Estudio Experimental

En esta Sección se describe el estudio experimental llevado a cabo para comprobar el funcionamiento del modelo propuesto, tanto en cuanto a precisión como a escalabilidad.

En primer lugar, se hará referencia a los conjuntos de datos empleados, posteriormente se describirá la configuración seleccionada para el estudio experimental y los test estadísticos, y finalmente se mostrarán los resultados y su análisis, así como el estudio de escalabilidad.

Se van a utilizar 10 problemas con diferente nivel de dificultad, por ejemplo, con distinto número de variables e instancias, etc. Provienen del repositorio KEEL [18], y se muestran en la Tabla I junto con sus características.

A. Configuración de los Experimentos

En cuanto la configuración de los experimentos, se ha utilizado validación cruzada de orden 5, es decir, se han hecho 5

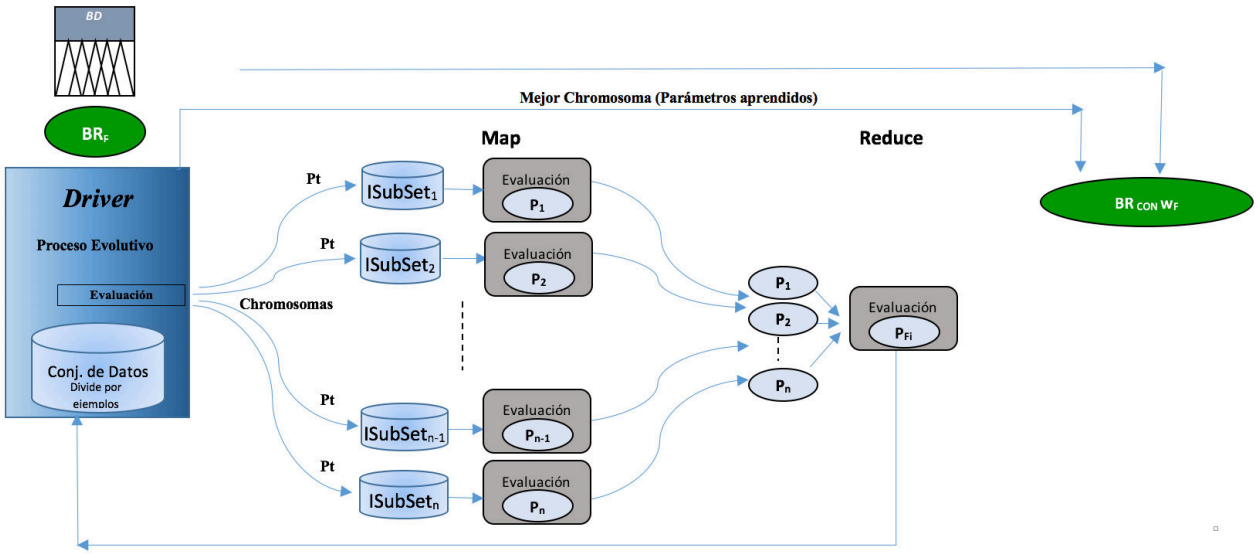


Fig. 1. Esquema de E-DAESR

TABLE I. CONJUNTOS DE DATOS UTILIZADOS, DISPONIBLES EN EL REPOSITORIO KEEL (HTTP://SCI²S.UGR.ES/KEEL/DATASETS.PHP)

Problem	Abbreviation	Instances	Variables
Delta-elv	DELV	9517	6
California	CAL	20640	8
Mv	MV	40768	10
House	HOU	22768	16
Elevators	ELV	16599	18
Compactiv	CA	8192	21
Pole	POL	14998	26
Puma32	PUM	8192	32
Airelons	AIL	13750	40
Tic	TIC	9822	85

particiones aleatorias de los conjuntos de datos, cada una con un 20%, y la combinación de 4 de ellos, es decir, el 80%, se han usado como conjunto de entrenamiento, mientras que los restantes son el conjunto de prueba.

En cuanto a los sistemas difusos, las BCs utilizadas emplean 3 etiquetas lingüísticas triangulares en todos los casos. El operador utilizado como conjunción y como inferencia para ambos casos es la t-norma del mínimo. El método de defuzzificación empleado para la obtención de la BR, por tanto, no adaptativo, es el *CG ponderado por el grado de emparejamiento*, mientras que el adaptativo de la propuesta es el de la expresión (1) (los cuales son equivalentes cuando el parámetro de cada regla tiene el valor 1).

En cuanto al algoritmo evolutivo, cuyo modelo se ha descrito en la Sección III, se ha ejecutado 30 veces: 6 semillas para el generador de números aleatorios, y 5 particiones para cada conjunto de datos o problema. La longitud de población utilizada es 61 cromosomas; la probabilidad de cruce se ha fijado a 1, y el número máximo de evaluaciones configurado ha sido 100000.

Para realizar la experimentación hemos utilizado un *cluster virtual* formado por 17 servidores con 4 núcleos y 8 GB de RAM cada uno. Uno de ellos se ocupa de ejecutar exclusivamente el programa *driver*, es decir, actúa de nodo maestro, y los 16 restantes como trabajadores para los procesos *ejecutores*.

Para realizar los estudios de escalabilidad se ha optado por hacer las dos siguientes configuraciones del *cluster*:

- Una configuración simple, con solo 2 núcleos, para poder medir el tiempo necesario por un servidor básico.
- Una configuración en modo *cluster* con el total de los 16 servidores, tanto con 16 como con 32 núcleos.

Se han realizado test estadísticos [19] [20], para comparar los resultados, empleando un *signed-rank test* de Wilcoxon.

B. Resultados Obtenidos y Análisis

La Tabla II muestra los resultados obtenidos por el modelo propuesto con defuzzificación adaptativa escalable, *E-DAESR,* en comparación con el modelo que no la utiliza, ambos con las mismas BRs obtenidas por el método de *WM-Escalable* [15]. En particular, para cada modelo, se muestra el número de reglas obtenidas, y los MSE en entrenamiento y prueba. Observando esta información, analizamos que:

- El número de reglas que se obtienen en general empleando el método propuesto *E-DAESR* es considerablemente inferior al que se obtiene empleando el método de cubrimiento (*WM-Escalable*), por tanto, se consiguen modelos más compactos. La excepción son precisamente los problemas que por su complejidad, presentan mayor número de reglas: quizás el espacio de búsqueda es "demasiado grande" para la configuración del algoritmo evolutivo básica empleada, por lo que habría que probar otros ajustes que hiciesen la búsqueda más efectiva.
- La precisión en general es de nuevo considerablemente mejor en el modelo propuesto. Sin embargo, se observa que en algunos problemas dicha reducción es escasa, coincidiendo con los problemas que en el párrafo anterior destacábamos con una inferior reducción en el número de reglas: se hace conveniente probar configuraciones diferentes.

Las Tablas III y IV muestran los resultados de los test de Wilcoxon empleados para confirmar que la reducción del número de reglas y la mejora en la precisión son significativas.

TABLA II. WM-ESCALABLE VS. E-DAESR (LOS VALORES DE MSE EN ESTA TABLA DEBEN MULTIPLICARSE POR 10^{-6}. 10^{8}. 10^{9}.10^{-6}. 10^{-8} Y 10^{-4} PARA DELV. CAL. HOU. ELV. AIL Y TIC RESPECTIVAMENTE).

Datasets	WM-Escalable			E-DAESR		
	#R	MSE_{tra}	MSE_{tst}	*#R*	MSE_{tra}	MSE_{tst}
DELV	129.4	2.372718	2.375347	**47.1**	1.602017	**1.628900**
CAL	123.4	5.319310	5.335769	**41.2**	3.215826	**3.225589**
MV	3677.8	13.795066	13.998455	**3126.4**	6.281729	**6.669283**
HOU	756.4	16.445739	16.724978	**281.8**	9.706077	**10.455755**
ELV	508.8	16.446985	16.494120	**108.3**	9.829008	**10.052612**
CA	424.8	40.383642	40.956170	**139.0**	5.345838	**6.636041**
POL	1087.0	399.773700	401.554456	**559.1**	174.488994	**181.557838**
PUM	6553.6	0.000250	0.000589	**6500.1**	0.000242	**0.000587**
AIL	1072.0	3.450536	3.496296	**470.3**	1.893806	**2.004145**
TIC	5802.4	151.609692	500.967975	**5707.9**	126.557568	**499.817874**

TABLA III. WILCOXON TEST PARA COMPARAR LA PRECISIÓN DEL MODELO WM-ESCALABLE CON EL MODELO E-DAESR. (R+ SE CORRESPONDE CON LA SUMA DE LOS RANKINGS PARA EL E-DAESR Y R- AL WM-ESCALABLE)

Comparación	R+	R-	p-value
E-DAESR vs. WM-Escalable	0	55	0.0019532

TABLA IV. WILCOXON TEST PARA COMPARAR EL #R DEL MODELO WM-ESCALABLE CON EL DEL MODELO E-DAESR. (R+ SE CORRESPONDE CON LA SUMA DE LOS RANKINGS PARA EL E-DAESR Y R- AL WM-ESCALABLE)

Comparación	R+	R-	p-value
E-DAESR vs. WM-Escalable	0	55	0.0019532

C. Escalabilidad

Uno de los elementos más interesantes de emplear un enfoque escalable es precisamente, que escale correctamente, es decir, que aumentando el número de elementos de proceso en el *cluster,* le permita reducir los tiempos de ejecución.

Como se comentó en la descripción del estudio experimental, se ha empleado una configuración en el *cluster* con 2 núcleos como equipo básico, y posteriormente con 16 y 32. Los resultados se muestran en la Figura 2: se observa como un mayor número de elementos de cómputo, se refleja en el

speed-up (ganancia del tiempo empleado por 32 y 16 núcleos frente al empleado con sólo 2) si bien no es lineal debido a la carga computacional derivada del *framework*.

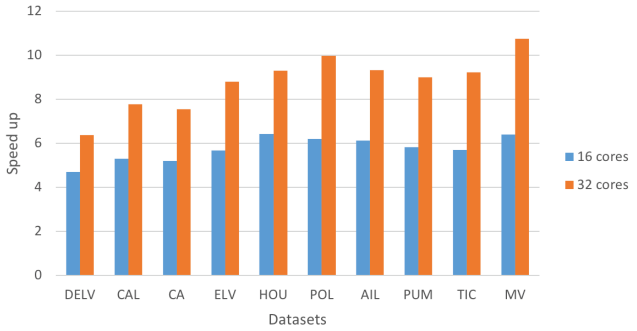


Fig. 2. Escalabilidad obtenida para cada conjunto de datos

V. Conclusiones

El objetivo planteado en este trabajo era estudiar la adaptación de la metodología del uso de defuzzificación adaptativa con selección de reglas mediante umbrales, a entornos escalables, es decir, la adaptación para su uso en *frameworks* de *Big Data*, y al modelo de computación *MapReduce* implementado en *Apache Spark*.

El resultado de este estudio preliminar es positivo, es decir, se ha conseguido un modelo equivalente (sus resultados son idénticos al modelo secuencial del que proviene) que funciona correctamente, si bien también se observa la necesidad de estudiar algunos casos, con un perfil muy claro (mayor número de reglas) en los que seguramente por falta de una configuración específica del algoritmo evolutivo, la calidad de los resultados no es tan buena, y por tanto, este particular será materia de estudio futuro.

Como se ha visto, en este trabajo se parte del uso del clásico método de WM para aprender las RBs. Este método es muy sencillo e incluso podría decirse que "*muy malo*" en cuanto a precisión y compacidad de la BR aprendida comparativamente con otros métodos, algunos de ellos evolutivos, aparecidos en la literatura durante varias décadas. Sin embargo, queremos hacer notar que lo utilizamos intencionadamente porque el modelo evolutivo empleado posteriormente precisamente permite corregir el principal defecto de las reglas aprendidas siguiendo el método de WM, que es el de la falta de cooperación entre ellas, lo cual es fundamental en regresión difusa. El modelo evolutivo empleado no sólo *gradúa* la contribución de cada regla a través del parámetro o peso, sino que busca la cooperación seleccionado las reglas más apropiadas de las encontradas por el método de WM, produciéndose así una BR final de considerable mayor calidad, más precisa y compacta, sin necesidad de usar un modelo más complejo y de mejor calidad en la primera fase. De cualquier modo, y queda pendiente para un futuro, realizar un estudio sobre cómo afecta la calidad del modelo inicial previo al post-procesamiento evolutivo distribuido propuesto empleando otras alternativas al método de WM, aunque *a priori*, por lo expuesto anteriormente, creemos que será escasa.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por el Ministerio de Educación y Ciencia dentro del Proyecto TIN2017-89517-P.

Referencias

[1] J. Alcala-Fdez, F. Herrera, F.A. Márquez, and A. Peregrín, "Increasing fuzzy rules cooperation based on evolutionary adaptive inference systems", Int J Intell Syst. 2007;22(9), pp. 1035–1064.

[2] F.A. Márquez, A. Peregrín, and F. Herrera, "Cooperative evolutionary learning of linguistic fuzzy rules and parametric aggregation connectors for Mamdani fuzzy system", IEEE Trans on Fuzzy Sys. 2007;15(6), pp.1168–1178.

[3] F. Herrera, "Genetic fuzzy systems: taxonomy, current research trends and prospects",. Evol Intell. 2008;1(1), pp.27–46.

[4] M. Fazzolari, R. Alcalá, Y. Nojima, H. Ishibuchi, and F. Herrera, "A review of the application of multi-objective evolutionary systems: Current status and further directions", IEEE Trans Fuzzy Syst. 2013; 21(1), pp.45–65.

[5] A. Fernández, V. López, M.J. del Jesus, and F. Herrera, "Revisiting evolutionary fuzzy systems: Taxonomy, applications, new trends and challenges", Knowl Based Syst. 2015;80, pp.109–121.

[6] J.S. Cho, and D.J. Park, "Novel fuzzy logic control based on weighting of partially inconsistent rules using neural network", J Intel Fuzzy Syst. 2000;8, pp.99–100.

[7] A. Márquez, F.A. Márquez, and A. Peregrín, "A Mechanism to Improve the Interpretability of Linguistic Fuzzy Systems with Adaptive Defuzzification based on the use of a Multi-objective Evolutionary Algorithm", Int. J. of Comp. Intell. Syst., 2012; 5 (2), pp. 297–321.

[8] D. Laney, "3D data management: controlling data volume, velocity and variety", META Group Research Note 6. 2001; 70.

[9] A. Fernández, S. del Río, V. López, A. Bawakid, M.J. del Jesus, J.M. Benítez, and F. Herrera, "Big Data with Cloud Computing: an insight on the computing environment, MapReduce, and programming frameworks", Wiley Interdiscip. Rev. Data Mining Knowl. Discovery. 2014;4(5), pp.380–409.

[10] T. White, "Hadoop: The Definitive Guide", O'Reilly Media, Inc.; 2012.

[11] J. Dean, and S. Ghemawat, "MapReduce: a flexible data processing tool", Commun ACM. 2010; 53(1), pp.72–77.

[12] G. Malewicz, M.H. Austern, A.J. Bik, J.C. Dehnert, I. Horn, N. Leiser, and G. Czajkowski, "Pregel: a system for large-scale graph processing", In Proceedings of the ACM SIGMOD International Conference on Management of Data. 2010, pp. 135–146.

[13] M. Zaharia, R.S. Xin, P. Wendell, T. Das, M. Armbrust, A. Dave, et al., "Apache spark: a unified engine for big data processing", Commun ACM. 2016; 59(11), pp.56–65.

[14] L. Wang and J. Mendel, "Generating fuzzy rules by learning from examples", IEEE Trans Syst, Man, Cybern. 1992;22(6), pp.1414–1427.

[15] A.A. Márquez , F.A. Márquez, and A. Peregrín, "A scalable evolutionary linguistic fuzzy system with adaptive defuzzification in big data", In Proceedings of the IEEE International Conference on Fuzzy System (FUZZ-IEEE). 2017; pp.1–6.

[16] L.J. Eshelman, "The CHC adaptive search algorithm: how to safe search when engaging in nontraditional genetic recombination", in G.J.E. Rawlings (Ed.), Foundations of genetic algorithms. 1991, pp.265–283.

[17] F. Herrera, M. Lozano, and A. Sánchez, "A taxonomy for the crossover operator for real-coded genetic algorithms: An experimental study", Int J Intell Syst. 2003;18, pp.309–338.

[18] J. Alcala-Fdez, L. Sánchez, S. García, M.J. del Jesus, S. Ventura, J. Garrell, et al., "Keel: a software tool to assess evolutionary algorithms for data mining problems", Soft Comput. 2009;13(3), pp.307–318.

[19] J. Demšar, "Statistical comparisons of classifiers over multiple data sets", J Mach Learn Res. 2006;7, pp.1–30.

[20] S. García and F. Herrera, "An extension on statistical comparisons of classifiers over multiple data sets for all pairwise comparisons", J Mach Learn Res. 2008;9, pp.2579–2596.

XIX Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy (XIX ESTYLF)

ESTYLF 4: Adquisición y Representación del Conocimiento

Estudio sobre la evolución de la relación entre objetos y atributos en una sucesión de contextos L-Fuzzy

Cristina Alcalde
Departamento de Matemática Aplicada
Universidad del País Vasco - UPV/EHU
Plaza de Europa 1, 20018 San Sebastian
Email: c.alcalde@ehu.eus

Ana Burusco
Departamento de Estadística, Informática y Matemáticas
Instituto de Smart Cities
Universidad Pública de Navarra
Campus de Arrosadía, 31006 Pamplona
Email: burusco@unavarra.es

***Resumen*—En este trabajo avanzamos en el estudio de la evolución de la relación entre los objetos y los atributos en una sucesión de contextos L-Fuzzy. En concreto, analizamos el grado de crecimiento de las tendencias que se estudian mediante las matrices $Trend$ y $Persistent$. Para hacerlo, daremos unas nuevas definiciones de niveles $Trend$ y $Persistent$ con el fin de priorizar los conceptos formales que se obtienen de las matrices $Trend$ y $Persistent$. Estos niveles $Trend$ y $Persistent$ nos permitirán también comparar los distintos objetos y atributos analizando cuáles han sido los que más han evolucionado positivamente a lo largo del tiempo.**

Finalmente, ilustraremos nuestros resultados con un ejemplo.

I. Introducción

El Análisis de Conceptos L-Fuzzy ([2], [7], [10], [11], [15], [19], [24]) es una herramienta matemática para el análisis y la representación del conocimiento conceptual. Esta teoría utiliza los conceptos L-fuzzy para extraer información de un contexto L-fuzzy. Recordemos que un contexto L-fuzzy es una tupla (L, X, Y, R), donde L es un retículo completo, X e Y son conjuntos de objetos y atributos, y $R \in L^{X\times Y}$ es una relación L-fuzzy entre los objetos y los atributos. Podemos entender el Análisis de Conceptos L-fuzzy como una extensión del Análisis de Conceptos Formales de Wille ([18], [29]).

En algunos casos, podemos tener varias relaciones entre el conjunto de objetos X y el de atributos Y. Representaremos estas situaciones mediante una secuencia de contextos L-fuzzy. Si esta secuencia representa la evolución en el tiempo de un contexto L-fuzzy, intentaremos predecir las tendencias futuras a partir del comportamiento pasado.

En Inteligencia Artificial hay una gran necesidad de representar conocimiento temporal y de modelizar el cambio en el tiempo. En este sentido, este trabajo es un paso más en el estudio de los fenómenos temporales. En concreto, el objetivo del presente trabajo es estudiar en qué medida las relaciones entre los objetos y los atributos mejoran con el paso del tiempo.

Existen trabajos en la literatura que analizan la evolución temporal en un contexto formal, por ejemplo, [27], [30], [31]. En particular, en [30], [31], Wolff introduce un Sistema de Tiempo Conceptual para definir el Análisis de Conceptos Temporales. En este Sistema de Tiempo Conceptual, el estado y la fase se definen como reticulos de conceptos que representan el significado de los estados con respecto a la elegida descripción del tiempo. Además, otros autores definen tendencias de evolución en [27], [28], utilizando temporal matching en el caso del Análisis de Conceptos Formales.

La existencia de contextos Triádicos [21] nos da la posibilidad de utilizar relaciones ternarias para representar el tiempo. Sin embargo, esta aproximación es demasiado exigente para nuestro objetivo y, por esta razón, está sólamente desarrollada para contextos formales.

El Análisis de Tendencias se refiere habitualmente a técnicas para extraer patrones de comportamiento en estadística. En este trabajo, trabajamos con un nuevo método para contextos L-fuzzy con datos cuantitativos. Este método permitirá establecer tendencias que pueden usarse como base para la toma de decisión. En concreto, profundizaremos en el estudio de las tendencias en la relación entre los objetos y atributos incorporando un nuevo elemento al estudio que representa el grado de evolución de dicha relación cuando es positiva.

Aplicaremos nuestros resultados a un ejemplo que muestra las ventas mensuales de artículos deportivos en determinados establecimietnos a lo largo del tiempo.

El trabajo se organiza como sigue: La Sección 2 proporciona un resumen sobre los principales aspectos del Análisis de conceptos L-fuzzy y las sucesiones de contextos L-fuzzy. La seccion 3 establece un estudio general sobre tendencias temporales en una sucesión de contextos L-fuzzy definiendo conceptos formales $Trend$ y $Persistent$ así como niveles de tendencias positivas que nos serviran para establecer distintas priorizaciones en nuestras predicciones. Mostramos un ejemplo donde aplicamos los resultados en Sección 4. Finalmente, las conclusiones y trabajo futuro se exponene en la Sección 5.

II. Preliminares

II-A. Análisis de conceptos L-fuzzy

En trabajos previos ([10], [11]), hemos definido los contextos L-fuzzy (L, X, Y, R), donde L es un retículo completo, $R \in L^{X\times Y}$ es una relación L-fuzzy entre los objetos de X y los atributos de Y. Esta definición es una extensión de los contextos formales de Wille ([18], [29]) que permite trabajar con relaciones entre los objetos y atributos que toman valores en un retículo L, en lugar de valores binarios.

Para trabajar con estos contextos L-fuzzy, hemos definido los operadores derivación 1 y 2 por medio de las expresiones:

Para todo $A \in L^X$, para todo $B \in L^Y$

$$A_1(y) = \inf_{x\in X}\{I(A(x), R(x, y))\}$$

$$B_2(x) = \inf_{y\in Y}\{I(B(y), R(x, y))\}$$

con I un operador de implicación fuzzy definido en el retículo $(L, \leq)$. En este trabajo, utilizaremos operadores de implicación residuados y el retículo $L = [0, 1]$.

Otros autores han utilizado también estos operadores residuados para definir los operadores derivación ([9], [25], [26]).

La información almacenada en el contexto se visualiza por medio de los conceptos L-fuzzy, que representan a un grupo de objetos que comparten, ellos y sólo ellos, un grupo de atributos. Estos pares $(M, M_1) \in L^X \times L^Y$, donde $M \in fix(\varphi)$ es el conjunto de puntos fijos del operador φ, que se define a partir de los operadores derivación 1 y 2 como $\varphi(M) = (M_1)_2 = M_{12}$. La primera y la segunda componentes del concepto L-fuzzy se llaman extensión e intensión, respectivamente.

Utilizando la relación de orden usual en fuzzy sets, podemos definir el conjunto $\mathcal{L} = \{(M, M_1)/M \in fix(\varphi)\}$ con la relación de orden $\preceq$ dada por: $(M, M_1), (N, N_1) \in \mathcal{L}$, $(M, M_1) \preceq (N, N_1)$ si $M \leq N (\text{o}\, N_1 \leq M_1)$.

Se demuestra que $(\mathcal{L}, \preceq)$ es un retículo completo al que llamaremos ([10], [11]) el retículo de conceptos L-fuzzy.

Además, dados $A \in L^X$ (o $B \in L^Y$), podemos obtener los conceptos L-fuzzy asociados aplicando los operadores derivación dos veces. Si utilizamos implicaciones residuadas, como en este trabajo, el concepto L-fuzzy asociado es (A_{12}, A_1) (o (B_2, B_{21})).

Otros resultados importantes sobre esta teoría, que extiende el Análisis de Conceptos Formales al caso difuso, se pueden encontrar en [6], [8], [9], [12]. Extensiones del Análisis de Conceptos Formales al caso intervalo-valorado están en [13], [3], [16], [17] y a fuzzy property-oriented conceptos en [20], [23].

II-B. Sucesiones de contextos L-fuzzy

Un primer estudio de sucesiones de contextos L-fuzzy cuando $L = [0, 1]$ se hizo en [5] y [14]. Comenzaremos recordando la definición principal:

Definición 1. *Una sucesión de contextos L-fuzzy es una sucesión de tuplas (L, X, Y, R_i), $i \in \{1, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, con L retículo completo, X e Y conjuntos de objetos y atributos respectivamente y $R_i \in L^{X\times Y}$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, una familia de relaciones L-fuzzy entre X e Y.*

En [1] desarrollamos un estudio general de estas sucesiones de contextos L-fuzzy utilizando los operadores OWA $n-$arios de Lizasoain y Moreno ([22]). Estos operadores son una generalización de los operadores OWA de Yager ([32], [33]).

En ese trabajo y con el fin de extraer la información almacenada en la sucesión de contextos L-fuzzy, definimos relaciones agregadas utilizando los vectores totalmente ordenados definidos por Lizasoain y Moreno ([22]).

Posteriomente, en [5] hicimos un estudio preliminar en [0,1] y en [4] extendimos y profundizamos los resultados para cualquier retículo completo L. En este caso, tenemos que tener en cuenta que excepto para una cadena completa, los elementos del retículo L no son necesariamente comparables.

III. Tendencias temporales

En [4] analizamos tendencias temporales para identificar la evolución con el tiempo de la sucesión de contextos L-fuzzy $(L, X, Y, R_i), i \in \{1, \ldots, n\}$, cuando L es un retículo completo. Nuestro interés era el estudio de la evolución de la relación entre los objetos (o atributos) respecto de uno o varios atributos (u objetos).

En este trabajo, utilizábamos operadores de implicación residuados en el cálculo de los conceptos L-fuzzy asociados a ciertos objetos o atributos.

Comenzaremos mostrando en el siguiente apartado los principales resultados del trabajo.

III-A. Objetos y atributos $Trend$ y $Persistent$

La mejor manera de estudiar la evolución en el tiempo de un objeto o un atributo es el estudio de sus conceptos L-fuzzy asociados en los diferentes contextos L-fuzzy de la sucesión. Esta es la idea de las siguientes definiciones y resultados que dábamos en [4]:

Definición 2. *Consideremos $x_0 \in X, y_0 \in Y$. Sean $(A_{i\{x_0\}}, B_{i\{x_0\}})$ y $(A_{i\{y_0\}}, B_{i\{y_0\}})$ los conceptos L-fuzzy asociados a $\{x_0\}$ e $\{y_0\}$ en la sucesión de contextos L-fuzzy (L, X, Y, R_i) con $i \leq n$.*

Entonces, podemos definir:

(i) $Trend(x_0) = \{y \in Y/B_{i\{x_0\}}(y) \leq B_{i+1\{x_0\}}(y), \forall i < n\}$ *es el conjunto de atributos cuyos grados de pertenencia en las diferentes intensiones de los conceptos L-fuzzy $(A_{i\{x_0\}}, B_{i\{x_0\}})$ son no decrecientes.*

(ii) $Trend(y_0) = \{x \in X/A_{i\{y_0\}}(x) \leq A_{i+1\{y_0\}}(x), \forall i < n\}$ *es el conjunto de objetos cuyos grados de pertenencia en las diferentes extensiones de los conceptos L-fuzzy$(A_{i\{y_0\}}, B_{i\{y_0\}})$ son no decrecientes.*

Podemos decir que son los atributos cada vez más relacionados con el objeto x_0 y los objetos cada vez más relacionados con el atributo y_0.

Esta es una definición muy exigente pero permite establecer tendencias con un alto grado de cumplimiento.

Además, se puede probar el siguiente resultado:

Proposición 1. *Consideremos* $x \in X, y \in Y$.

$$y \in Trend(x) \Longleftrightarrow x \in Trend(y)$$

Podemos extender esta definición al caso de más de un objeto o un atributo:

Definición 3. *Para cada* $Z, T \neq \emptyset, Z \subseteq X$ *y* $T \subseteq Y$, *definimos* $Trend(Z)$ *y* $Trend(T)$ *como:*

(i) $Trend(Z) = \{y \in Y \ / B_{i\{x\}}(y) \leq B_{i+1\{x\}}(y),$ *para todo* $i < n$, *para todo* $x \in Z\}$

(ii) $Trend(T) = \{x \in X \ / A_{i\{y\}}(x) \leq A_{i+1\{y\}}(x),$ *para todo* $i < n$, *para todo* $y \in T\}$

En este caso, se puede probar también el siguiente resultado:

Proposición 2. *Para todo* $Z, T \neq \emptyset, Z \subseteq X$ *y* $T \subseteq Y$:

(i) *Si* $Trend(Z) = T$, *entonces* $Z \subseteq Trend(T)$

(ii) *Si* $Trend(T) = Z$, *entonces* $T \subseteq Trend(Z)$

Como caso particular, tenemos los conjuntos $Trend(X)$ y $Trend(Y)$ donde se cumple:

$Trend(X) = Y \Longleftrightarrow Trend(Y) = X$.

Como la definición de $Trend$ es muy exigente, en [4] definimos objetos y atributos $Persistent$ para relajar este nivel de exigencia.

Definición 4. *Dados* $x_0 \in X, y_0 \in Y$. *Sean* $(A_{i\{x_0\}}, B_{i\{x_0\}})$ *y* $(A_{i\{y_0\}}, B_{i\{y_0\}})$ *los conceptos L-fuzzy asociados a los crisp singletones* $\{x_0\}$ *e* $\{y_0\}$, *en la sucesión de contextos L-fuzzy* (L, X, Y, R_i) *con* $i \leq n$:

(i) $Persistent(x_0) = \{y \in Y \ / B_{i\{x_0\}}(y) \geq B_{1\{x_0\}}(y),$ *para todo* $i, 1 < i \leq n\}$

es el conjunto de atributos cuyos grados de pertenencia en las intensiones fuzzy de los conceptos L-fuzzy $(A_{i\{x_0\}}, B_{i\{x_0\}})$ *son mayores o iguales que los valores correspondientes en el concepto L-fuzzy* $(A_{1\{x_0\}}, B_{1\{x_0\}})$.

(ii) $Persistent(y_0) = \{x \in X \ / A_{i\{y_0\}}(x) \geq A_{1\{y_0\}}(x),$ *para todo* $i, 1 < i \leq n\}$

es el conjunto de objetos cuyos grados de pertenencia en las extensiones fuzzy de los conceptos L-fuzzy $(A_{i\{y_0\}}, B_{i\{y_0\}})$ *son mayores o iguales que los valores correspondientes del concepto L-fuzzy* $(A_{1\{y_0\}}, B_{1\{y_0\}})$.

Fijado $j \leq n$, se puede dar una definición alternativa de Persitent(x_o) y Persistent(y_o) como sigue:

Para todo $i, j < i \leq n$,

$$Persistent_j(x_0) = \{y \in Y \ / B_{i\{x_0\}}(y) \geq B_{j\{x_0\}}(y)\}$$

$$Persistent_j(y_0) = \{x \in X \ / A_{i\{y_0\}}(x) \geq A_{j\{y_0\}}(x)\}$$

Con esta definición, resultados similares a los de las proposiciones 1 y 2 se verifican:

Proposición 3. *Consideremos* $x \in X, y \in Y$.

$$y \in Persistent(x) \Longleftrightarrow x \in Persistent(y)$$

Podemos también extender esta definición al caso de más de un objeto o atributo:

Definición 5. *Para todo* $Z, T \neq \emptyset, Z \subseteq X$ *y* $T \subseteq Y$, *definimos* $Persistent(Z)$ *y* $Persistent(T)$ *como:*

(i) $Persistent(Z) = \{y \in Y \ / B_{i\{x\}}(y) \geq B_{1\{x\}}(y),$ *para todo* $i < n$, *para todo* $x \in Z\}$

(ii) $Persistent(T) = \{x \in X \ / A_{i\{y\}}(x) \geq A_{1\{y\}}(x),$ *para todo* $i < n$, *para todo* $y \in T\}$

Proposición 4. *For all* $Z, T \neq \emptyset, Z \subseteq X$ *y* $T \subseteq Y$:

(i) *Si* $Persistent(Z) = T$, *entonces* $Z \subseteq Persistent(T)$

(ii) *Si* $Persistent(T) = Z$, *entonces* $T \subseteq Persistent(Z)$

Las definiciones $Trend$ y $Persistent$ establecen pares de objetos y atributos que pueden ser usados para un análisis más completo de la evolución de la sucesión de contextos L-fuzzy $(L, X, Y, R_i), i \in \{1, \ldots, n\}$.

Siguiendo esta idea y la Definición 2, las tendencias de la sucesión de contextos L-fuzzy que hemos estudiado se pueden completar con la construcción de matrices $Trend$ y $Persistent$.

Definición 6. *La Matriz* $Trend\, TM \subseteq X \times Y$ *se define como:*

$$TM(x, y) = \begin{cases} 1 & si\ y \in Trend(x) (equiv.\ x \in Trend(y)) \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Por la Proposición 1, para obtener la matriz $Trend$ es sólamente necesario el cálculo de $Trend(x)$, para todo $x \in X$ o análogamente $Trend(y)$, para todo $y \in Y$.

Podemos considerar ahora el contexto formal (X, Y, TM) y obtener sus conceptos formales para tener una visión general de las tendencias entre los objetos X y los atributos Y.

Definición 7. *Sea el contexto formal* (X, Y, TM) *con* X *conjunto de objetos,* Y *conjunto de atributos y* $TM \subseteq X \times Y$. *Llamaremos a los conceptos de* (X, Y, TM) *conceptos formales* $Trend$.

Es también posible realizar un estudio paralelo utilizando la definición de $Persistent$:

Definición 8. *La matriz* $PM \subseteq X \times Y$ *tal que*

$$PM(x, y) = \begin{cases} 1 & si\ y \in Persistent(x) (x \in Persistent(y)) \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

se llama Matriz $Persistent$.

Podemos ahora considerar (X, Y, PM) y calcular sus conceptos formales para obtener información sobre las tendencias entre los objetos de X y los atributos de Y.

Definición 9. *Sea el contexto formal* (X, Y, PM). *Los conceptos formales de* (X, Y, PM) *se llamarán conceptos formales* $Persistent$.

Ademas, como la definición de $Persistent$ es menos exigente que la de $Trend$, se puede probar de forma sencilla

que $TM \subseteq PM$.

Mediante estos resultados utilizando las matrices $Trend$ y $Persistent$ estudiamos objetos y atributos que mejoran su relación con el tiempo, pero no analizamos cuánto supone esa mejora. Este tema será el que abordaremos en el siguiente apartado.

III-B. Nivel Trend y Persistent

Con el fin de medir el grado de evolución positiva de las relaciones entre los objetos y los atributos, vamos a definir su nivel de tendencia. Para hacerlo trabajaremos con $L = [0, 1]$.

Dados $x_0 \in X, y_0 \in Y$. Sean $(A_{i\{x_0\}}, B_{i\{x_0\}})$ y $(A_{i\{y_0\}}, B_{i\{y_0\}})$ los conceptos L-fuzzy asociados a los crisp singletones $\{x_0\}$ e $\{y_0\}$, en la sucesión de contextos L-fuzzy (L, X, Y, R_i) con $i \leq n$:

Definición 10. *Para cada $x_0 \in X, y \in Y$, el nivel $Trend$ del objeto x_0 para el atributo y se define como:*

$$TrendLevel(x_0)_y = \begin{cases} B_{n\{x_0\}}(y) - B_{1\{x_0\}}(y) & \textit{si } y \in Trend(x_0) \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

Análogamente, podemos definir para cada $y_0 \in Y, x \in X$ el nivel $Trend$ del atributo y_0 para el objeto x:

$$TrendLevel(y_0)_x = \begin{cases} A_{n\{y_0\}}(x) - A_{1\{y_0\}}(x) & \textit{si } x \in Trend(y_0) \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

También podemos dar las definiones para Niveles $Persistent$:

Definición 11. *Para cada $x_0 \in X, y \in Y$, el nivel Persistent del objeto x_0 para el atributo y se define como:*

$$PerLevel(x_0)_y = \begin{cases} B_{n\{x_0\}}(y) - B_{1\{x_0\}}(y) & \textit{si } y \in Persistent(x_0) \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

Análogamente, podemos definir para cada $y_0 \in Y, x \in X$ el nivel Persistent del atributo y_0 para el objeto x:

$$PerLevel(y_0)_x = \begin{cases} A_{n\{y_0\}}(x) - A_{1\{y_0\}}(x) & \textit{si } x \in Persistent(y_0) \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

Es fácil comprobar que se cumple el siguiente resultado:

Proposición 5. *Para todo $x \in X, y \in Y$,*

$$TrendLevel(x)_y = TrendLevel(y)_x$$

$$PerLevel(x)_y = PerLevel(y)_x$$

Demostración. Si consideramos los crips singletones $\{x\}$ e $\{y\}$ y utilizamos una implicación residuada, $B_{i\{x\}}(y) = R_i(x, y) = A_{i\{y\}}(x)$, para todo $i \leq n$. Como además $y \in Trend(x)$ si y sólo sí $x \in Trend(y)$, y análogamente para la definición de $Persistent$, la proposición se verifica. □

Podemos establecer relaciones que nos almacenen estos valores:

Definición 12. *Las matrices $TrendLevelM, PerLevelM \in L^{X \times Y}$ se definen como:*

$$TrendLevelM(x, y) = TrendLevel(x)_y = TrendLevel(y)_x$$

$$PerLevelM(x, y) = PerLevel(x)_y = PerLevel(y)_x$$

Aunque en la definición dada hemos tomado como intervalo temporal el que va desde el instante inicial al final, sería posible también trabajar con otros intervalos:

Definición 13. *Dados $1 \leq j \leq k \leq n$, para cada $x_0 \in X, y \in Y$, el nivel $Trend$ y $Persistent$ del objeto x_0 para el atributo y en el intervalo $[j, k]$ se define como:*

$$TrendLevel_{j,k}(x_0)_y = \begin{cases} B_{k\{x_0\}}(y) - B_{j\{x_0\}}(y) & \textit{si } y \in Trend_{j,k}(x_0) \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

$$PerLevel_{j,k}(x_0)_y = \begin{cases} B_{k\{x_0\}}(y) - B_{j\{x_0\}}(y) & \textit{si } y \in Persistent_{j,k}(x_0) \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

donde $y \in Trend_{j,k}(x_0)$ si $y \in Trend(x_0)$ en el intervalo $[j, k]$ e $y \in Persistent_{j,k}(x_0)$ si $y \in Persistent(x_0)$ en el intervalo $[j, k]$.

Análogamente, dados $1 \leq j \leq k \leq n$, podemos definir para cada $y_0 \in Y, x \in X$ el nivel $Trend$ y $Persistent$ del atributo y_0 para el objeto x en el intervalo $[j, k]$:

$$TrendLevel_{j,k}(y_0)_x = \begin{cases} A_{k\{y_0\}}(x) - A_{j\{y_0\}}(x) & \textit{si } x \in Trend_{j,k}(y_0) \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

$$PerLevel_{j,k}(y_0)_x = \begin{cases} A_{k\{y_0\}}(x) - A_{j\{y_0\}}(x) & \textit{si } x \in Persistent_{j,k}(y_0) \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

donde $y \in Trend_{j,k}(x_0)$ si $y \in Trend(x_0)$ en el intervalo $[j, k]$ e $y \in Persistent_{j,k}(x_0)$ si $y \in Persistent(x_0)$ en el intervalo $[j, k]$.

A continuación, podemos definir el nivel $Trend$ o $Persistent$ de un objeto o de un atributo, agregando valores.

Definición 14. *Para cada $x_0 \in X, y_0 \in Y$:*

$$TrendLevel(x_0) = \underset{y \in Y}{Agr}(TrendLevel(x_0)_y)$$

$$TrendLevel(y_0) = \underset{x \in X}{Agr}(TrendLevel(y_0)_x)$$

$$PerLevel(x_0) = \underset{y \in Y}{Agr}(PerLevel(x_0)_y)$$

$$PerLevel(y_0) = \underset{x \in X}{Agr}(PerLevel(y_0)_x)$$

Al igual que en el caso anterior, podríamos dar estas definiciones para los contextos del intervalo $[j, k]$.

Esta definición nos permite establecer relaciones de preorden en el conjunto de objetos y de atributos de acuerdo con el incremento de su evolución positiva en el tiempo.

Definición 15. *Dados $z_i, z_j \in X$ o $z_i, z_j \in Y$, definimos las relaciones $\leq_{TL}$ y $\leq_{PL}$ como:*

$$z_i \leq_{TL} z_j \textit{ si } TrendLevel(z_i) \leq TrendLevel(z_j)$$

$$z_i \leq_{PL} z_j \textit{ si } PerLevel(z_i) \leq PerLevel(z_j)$$

Proposición 6. *Las relaciones $\leq_{TL}$ y $\leq_{PL}$ son preordenes.*

Demostración. Ya que los valores de $TrendLevel$ y $PerLevel$ son valores en [0,1], es obvio por la definición que se trata de relaciones reflexivas y transitivas. Sin embargo, no son relaciones de orden por no cumplirse la antisimetría. □

Utilizando $\leq_{TL}$ y $\leq_{PL}$ podemos también establecer rankings en el conjunto de objetos X y de atributos Y de nuestra sucesión de contextos. Aquellos objetos o atributos con mayores valores de $TrendLevel$ y $PerLevel$ serán los que hayan evolucionado de forma más positiva a lo largo del tiempo. La elección entre ambos rankings dependerá de nuestro nivel de exigencia.

Por otro lado, mediante las matrices $TrendLevelM$ y $PerLevelM$ podemos establecer prelaciones en los conceptos $Trend$ y $Persistent$ definidos a partir de los contextos formales (X, Y, TM) y (X, Y, PM) que nos permitan establecer qué conceptos son más relevantes que otros. El procedimiento que seguiremos será el siguiente:

(1) Obtención de las matrices $TrendLevelM$ y $PerLevelM$
(2) Obtención de las matrices TM y PM
(3) Cálculo de los conceptos formales de los contextos formales (X, Y, TM) y (X, Y, PM)
(4) Cálculo del peso de cada concepto (A, B) de (X, Y, TM) y (X, Y, PM) definido como:

$$W_{TM}((A,B)) = \begin{cases} \sum_{x_k \in A, y_l \in B} TrendLevelM(x_k, y_l) & \text{si } A, B \neq \emptyset \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$W_{PM}((A,B)) = \begin{cases} \sum_{x_k \in A, y_l \in B} PerLevelM(x_k, y_l) & \text{si } A, B \neq \emptyset \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(5) Ordenación de los conceptos formales de acuerdo con su peso estableciendo rankings.

IV. Ejemplo práctico

Vamos a mostrar la aplicación de los resultados utilizando el siguiente caso práctico:

Sea $(L, X, Y, R_i), 1 \leq i \leq n$ una secuencia de contextos fuzzy que representa las ventas de artículos deportivos (X) en establecimientos (Y) a lo largo de un periodo de tiempo. Queremos estudiar los lugares y los artículos en los que ha habido un mayor incremento de ventas teniendo en cuenta que hay articulos que se venden sólo en ciertas estaciones (por ejemplo, skies o trajes de baño) y en ciertas zonas (es más posible vender skies en Colorado que en Florida). Tomaremos $L = [0, 1]$.

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0.7 & 1 & 0.8 \\ 0 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0 \end{pmatrix} \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 1 \\ 0.2 & 0.4 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$R_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.6 & 0.5 & 0.7 \\ 0 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix} \quad R_4 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.6 \\ 0.1 & 0.5 & 0.3 \\ 0.6 & 0.8 & 0.8 \end{pmatrix}$$

$$R_5 = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 \\ 0.8 & 1 & 0.9 \end{pmatrix}$$

En este caso obtendriamos las siguientes matrices $Trend$ y Persistent :

TM	y_1	y_2	y_3
x_1	0	0	0
x_2	0	1	0
x_3	1	0	1

PM	y_1	y_2	y_3
x_1	0	0	0
x_2	1	1	0
x_3	1	0	1

Vamos a continuar con el desarrollo para el contexto (X, Y, PM), pudiendo hacer uno paralelo para (X, Y, TM). Los conceptos formales de (X, Y, PM) son los siguientes:

$(\{x_1\}, \emptyset)$
$(\{x_2\}, \{y_1, y_2\})$
$(\{x_3\}, \{y_1, y_3\})$
$(\{x_2, x_3\}, \{y_1\})$
$(\emptyset, \{y_1, y_2, y_3\})$

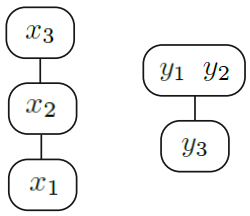
Podemos ahora calcular la matriz $PerLevelM$. El resultado es el siguiente:

$PerLevelM$	y_1	y_2	y_3
x_1	0	0	0
x_2	0.6	0.4	0
x_3	0.8	1	0.9

Si tomamos la media como agregación, obtenemos los valores:

$PerLevel(x_1) = 0$
$PerLevel(x_2) = 0.33$
$PerLevel(x_3) = 0.9$
$PerLevel(y_1) = 0.47$
$PerLevel(y_2) = 0.47$
$PerLevel(y_3) = 0.3$

que nos permiten establecer los siguientes rankings en el conjunto de objetos y de atributos:

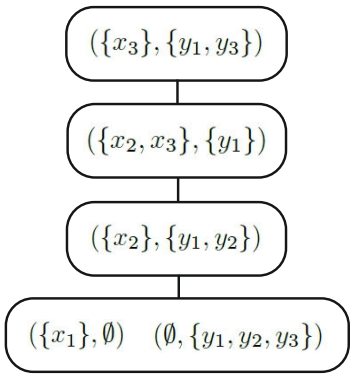


Por tanto, podemos decir que *el artículo x_3 y los establecimientos y_1 e y_2 son los que han experimentado en media un mayor incremento en sus ventas. En contra, el artículo x_1 y el establecimiento y_3 tienen los incrementos de ventas menores.*

Por otra parte, utilizaremos la matriz $PerLevelM$ para ordenar los conceptos de mayor a menor relevancia aplicando el procedimiento descrito en el apartado anterior:

$W_{PM}((\{x_1\}, \emptyset)) = 0$
$W_{PM}((\{x_2\}, \{y_1, y_2\})) = 1$
$W_{PM}((\{x_3\}, \{y_1, y_3\})) = 1.7$
$W_{PM}((\{x_2, x_3\}, \{y_1\})) = 1.4$
$W_{PM}((\emptyset, \{y_1, y_2, y_3\})) = 0$

Por tanto, podemos establecer el siguiente ranking de conceptos (la relevancia de los distintos conceptos disminuye de arriba hacia abajo en el gráfico).



Como conclusión podríamos decir que: *El mayor incremento de ventas ha sido en del artículo x_3 en las ciudades y_1 e y_3. A continuación tendríamos los artículos x_2 y x_3 en y_1. Finalmente, x_2 en y_1 e y_2.*

V. Conclusiones y trabajo futuro

En este trabajo hemos continuado con el estudio de tendencias en una sucesión de contextos L-fuzzy que representa la evolución en el tiempo de un contexto L-fuzzy. Con la introducción de los niveles de tendencias ($Trend$ y $Persistence$ Level) hemos podido establecer qué objetos y atributos son los que sus valores más han aumentado con el paso del tiempo. Además hemos introducido las Matrices $Trend$ y $Persistent$ level que nos han permitivo establecer rankings en los conceptos formales que nos establecen las tendencias en la relación entre los objetos y los atributos de la sucesión de contextos L-fuzzy.

En el futuro queremos analizar no sólo tendencias positivas, sino también las negativas.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por el Grupo de Investigación "Sistemas Inteligentes y Energía (SI+E)" de la Universidad del País Vasco - UPV/EHU (Proyecto GIU 16/54), y por el Grupo de Investigación "Inteligencia Artificial y Razonamiento Aproximado" de la Universidad Pública de Navarra y el Gobierno Español (Proyecto TIN2016-77356-P (MINECO, AEI/FEDER, UE))

Referencias

[1] C. Alcalde, A. Burusco: L-fuzzy context sequences on complete lattices, IPMU 2014, *Lecture Notes in Computer Science* Part III, CCIS 444, pp. 31–40, 2014.

[2] C. Alcalde, A. Burusco: The use of two relations in L-fuzzy contexts, *Information Sciences* 301 (1), pp. 1–12, 2015.

[3] C. Alcalde, A. Burusco, R. Fuentes-González, I. Zubia: Treatment of L-fuzzy contexts with absent values, *Information Sciences* 179 (1-2), pp. 1–15, 2009.

[4] C. Alcalde, A. Burusco, H. Bustince, A. Jurio, J.A. Sanz: Evolution in time of the L-fuzzy context sequences, *Information Sciences* 326, pp. 202-214, 2016.

[5] C. Alcalde, A. Burusco, R. Fuentes-González: The study of fuzzy context sequences *International Journal of Computational Intelligence Systems* 6 (3), pp. 518–529, 2013.

[6] C. Alcalde, A. Burusco, R. Fuentes-González: Application of the L-fuzzy concept analysis in the morphological image and signal processing. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence* 72 (1-2), pp. 115–128, 2014.

[7] L. Antoni, S. Krajci, O. Kridlo, B. Macek, L. Pisková: On heterogeneous formal contexts, *Fuzzy Sets and Systems* 234, pp. 2–33, 2014.

[8] R. Bělohlávek: Fuzzy Galois Connections, *Math. Logic Quarterly* 45 (4), pp. 497–504, 1999.

[9] R. Bělohlávek, V. Vychodil: What is a fuzzy concept lattice, in *Proceedings of the Third International Conference on Concept Lattice and their Applications, CLA 2005,* Olomounc, Czech Republic, pp. 34–45, 2005.

[10] A. Burusco, R. Fuentes-González: The Study of the L-fuzzy Concept Lattice, *Mathware and Soft Computing* 1 (3), pp. 209–218, 1994.

[11] A. Burusco, R. Fuentes-González: Construction of the L-fuzzy Concept Lattice, *Fuzzy Sets and Systems* 97 (1), pp. 109–114, 1998.

[12] A. Burusco, R. Fuentes-González: Concept lattices defined from implication operators, *Fuzzy Sets and Systems* 114 (1), pp. 431–436, 2000.

[13] A. Burusco, R. Fuentes-González: The study of the interval-valued contexts, *Fuzzy Sets and Systems* 121, pp. 69–82, 2001.

[14] C. Alcalde, A. Burusco, R. Fuentes-González: Application of OWA Operators in the L-fuzzy Concept Analysis in *Aggregation Functions in Theory and Practice.* Book Series: Advances in Intelligent Systems and Computing 228, pp. 129–140, 2013.

[15] P. Butka, J. Pócs, J. Pósová: On equivalence of conceptual scaling and generalized one-sided concept lattices, *Information Sciences* 259, pp. 57–70, 2014.

[16] Y. Djouadi, H. Prade: Interval-Valued Fuzzy Galois Connections: Algebraic Requirements and Concept Lattice Construction, *Fundamenta Informaticae* 99 (2), pp. 169–186, 2010.

[17] Y. Djouadi, H. Prade: Possibility- theoretic extension of derivation operators in formal concept analysis over fuzzy lattices, *FODM* 10 (4), pp. 287–309, 2011.

[18] B. Ganter, R. Wille: Formal concept analysis: Mathematical foundations, Springer, Berlin - New York, 1999.

[19] J. Konecny: Isotone fuzzy Galois connections with hedges, *Information Sciences* 181 (10) pp. 1804–1817, 2011.

[20] H. Lai, D. Zhang: Concept lattices of fuzzy contexts: Formal concept analysis vs. rough set theory, *International Journal of Approximate Reasoning* 50 (5) pp. 695–707, 2009.

[21] F. Lehmann, R. Wille: A triadic approach to Formal concept analysis, *Conceptual structures: applications, implementation and theory*, Lecture Notes in Artificial Intelligence 954, pp. 32–43, 1995.

[22] I. Lizasoain, C. Moreno: OWA operators defined on complete lattices, *Fuzzy Sets and Systems* 224, pp. 36–52, 2013.

[23] J. Medina: Multi-adjoint property-oriented and object-oriented concept lattices, *Information Sciences* 190, pp.95–106, 2012.

[24] J. Medina, M. Ojeda-Aciego, J. Ruiz Calvino: Formal concept analysis via multi-adjoint concept lattices, *Fuzzy Sets and Systems* 160 (2), pp. 130–144, 2009.

[25] J. Medina, M. Ojeda-Aciego: Multi-adjoint t-concept lattices, *Information Sciences* 180 (5), pp. 712–725, 2010.

[26] J. Medina, M. Ojeda-Aciego, Dual multi-adjoint concept lattices, Information Sciences 225, 47–54, 2013.

[27] R. Neouchi, A. Y. Tawfik, R. A. Frost: Towards a Temporal Extension of Formal Concept Analysis. In Proceedings of Canadian Conference on Artificial Intelligence, pp. 335–344, 2001.

[28] A. Y. Tawfik, G. Scott: Temporal Matching under Uncertainty. In Proceedings of the Eighth International Workshop on Artificial Intelligence and Statistics, 2001.

[29] R. Wille: Restructuring lattice theory: an approach based on hierarchies of concepts, in: *Rival I. (Ed.), Ordered Sets, Reidel, Dordrecht-Boston*, pp. 445-470, 1982.

[30] K. E. Wolff: States, Transitions, and Life Tracks in Temporal Concept Analysis, *Formal Concept Analysis*, pp. 127–148, 2005.

[31] K. E. Wolff: Temporal Relational Semantic Systems, *ICCS*, pp. 165–180, 2010.

[32] R.R. Yager: On ordered weighted averaging aggregation operators in multi-criteria decision making, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cibernetics* 18, pp. 183–190, 1988.

[33] R.R. Yager: Families of OWA operators, *Fuzzy Sets and Systems* 59, pp. 125–148, 1993.

Procesamiento Semántico Difuso Aplicado a un Modelo de Análisis de Textos basado en Grafos

Wenny Hojas-Mazo, Alfredo Simón-Cuevas
Universidad Tecnológica de La Habana "José Antonio Echeverría", Cujae
Ave. 114, No. 11901, CP: 19390, La Habana, Cuba
{whojas, asimon}@ceis.cujae.edu.cu

José A. Olivas, Francisco P. Romero
Universidad de Castilla La Mancha
Paseo de la Universidad, 4, Ciudad Real, España
{JoseAngel.Olivas, FranciscoP.Romero}@uclm.es

***Resumen*— La obtención de información relevante y conocimiento en textos aún constituye un gran desafío. En este trabajo, se presenta un enfoque de análisis de textos basado en grafos, soportado en el procesamiento semántico difuso del contenido. En esta propuesta se combinan procesos de consultas sobre los grafos obtenidos de los textos, la recomendación de conceptos relevantes y la recuperación de pasajes de texto, incluyendo mecanismos de integración semántica de los grafos como parte de las consultas. La propuesta fue evaluada en el análisis de artículos científicos con resultados prometedores.**

Palabras clave — análisis de textos; representación de textos en grafos; análisis semántico difuso; integración semántica de grafos

I. INTRODUCCIÓN

El gran volumen de información no estructurada actualmente disponible en textos constituye un recurso muy valioso. El procesamiento y análisis efectivo de esas fuentes textuales, para obtener información relevante y conocimiento, aún es una tarea desafiante, demandándose mayor atención a las soluciones de minería de texto [1]. Los textos han sido procesados usando diferentes tipos de representación, donde las bolsas de palabras y los modelos vectoriales son los más usados, fundamentalmente en la recuperación de información. Sin embargo, estas soluciones se enfocan más en facilitar el acceso a los textos, y no en el análisis de su contenido para descubrir patrones y conocimiento, siendo este uno de los objetivos principales del análisis de textos. En este sentido, el uso grafos surge como alternativa prometedora para el análisis y exploración de las estructuras conceptuales de los textos [13].

En este trabajo, se presenta un modelo de análisis de textos basado en grafos, en el que se propone un enfoque difuso para el tratamiento semántico del contenido. En este modelo, el contenido conceptual de los textos es representado en grafos, y se combina el uso de consultas sobre los grafos, la identificación de conceptos relevantes y la recuperación de pasaje, para obtener estructuras conceptuales interesantes e información textual útil asociada. Las consultas están concebidas sobre la base de la integración semántica de los grafos, para lo cual se propone un enfoque difuso mediante la aplicación de la agregación compensatoria [22] de medidas de similitud sintáctica y semántica. Este enfoque ofrece mayor diversidad, en cuanto al análisis del contenido textual, respecto a lo reportado en [5][21][12]. La aplicabilidad del modelo propuesto se evaluó en las tareas de extracción y síntesis de datos en la revisión sistemática de la literatura (SRL: *Systematic Literature Review*) reportada en [8], para soportar estás tareas al recuperar información relevante que apoye a los revisores en la extracción de datos de los artículos y la búsqueda de respuestas a las preguntas de investigación planteadas. El desarrollo de este caso de estudio ejemplifica como el modelo propuesto ofrece soporte computacional a las tareas de extracción y síntesis de datos en una SRL. Las principales contribuciones de este trabajo se resumen en: (1) la aplicación de la lógica difusa en la integración semántica de grafos, basada en la agregación compensatoria [22] de medidas de similitud sintáctica y semántica para evaluar la similitud entre conceptos en los grafos; y (2) la combinación de técnicas de análisis de grafo, tales como: consultas e identificación de conceptos relevantes, y la recuperación de pasajes de texto, para obtener estructuras conceptuales interesantes e información textual útil asociada.

El resto del trabajo está organizado de la siguiente manera: la Sección 2 expone algunos fundamentos teóricos del problema; la Sección 3 describe el enfoque propuesto; la Sección 4 presenta los resultados del caso de estudio desarrollado; y la Sección 5 expone las conclusiones arribadas e ideas de trabajo futuro.

II. ANÁLISIS DE TEXTOS MEDIANTE GRAFOS

La representación de textos basada en grafos evita la pérdida de información contextual y semántica del contenido, y reduce la dispersión de los conceptos y la información en su procesamiento. A través de un grafo, el texto se reduce a un número relativamente pequeño de conceptos y relaciones, por lo que una colección de textos puede ser fácilmente manejada y analizada computacionalmente. En este sentido, el empleo de técnicas y herramientas de procesamiento de grafos facilita la obtención de información y conocimiento a partir de esa representación, así como realizar análisis cualitativos y cuantitativos sobre los conceptos incluidos en un texto, para identificar conceptos fuertemente relacionados, estructuras conceptuales interesantes, conceptos relevantes, entre otras. Las operaciones sobre los grafos (ej. Unión) son una de esas herramientas útiles en este sentido [21]. Estos beneficios se evidencian en: detección de tópicos [7], la recuperación de información [4][14], y en varias revisiones [11][7][21]. Sin

embargo, solo se identificaron dos soluciones orientadas al análisis del contenido de textos representados en grafos y enfocada a conceptos [5][12].

En [5] se propone un enfoque basado en la construcción automática de grafos etiquetados con n-gramas de tamaño variable a partir textos y en la aplicación de operaciones sobre los mismos para identificar y representar los tópicos principales de uno o más textos. En la construcción del grafo, el texto se segmenta en oraciones y se extraen los tokens, y estos son clasificados en: Ignorar (determinantes, pronombres y adverbios), Arco (conjunciones, preposiciones y verbos) y Nodo (secuencia de tokens no asociada a los anteriores), siendo estos dos últimos los utilizados para construir el grafo. Este método solo extrae relaciones explicitas del texto, por lo que es susceptible a que se representen elementos aislados en el grafo, lo cual impacta negativamente en los resultados del análisis a realizar a través de consultas y algoritmos de identificación de conceptos relevantes representados en grafos. En la modelación de los tópicos, inicialmente se generar un grafo por cada documento, luego se integran los grafos en uno solo aplicando la operación Unión. Posteriormente, se obtiene un ranking de relevancia de los nodos del grafo resultante y se aplica la operación de Proyección sobre los *k* nodos más relevantes, para obtener un sub-grafo que modela los tópicos. En esta propuesta, la integración de los grafos que se produce en la operación de Unión se basa en la equivalencia sintáctica de los nodos, sin considerar la semántica subyacente. Esto representa una debilidad, ya que se puede producir la integración de contenidos sin vínculos semánticos entre ellos, dado que los conceptos representados en los nodos pueden estar sujetos a ambigüedades. Este problema es solucionado de alguna manera en [12], donde se propone un enfoque similar de análisis a partir de grafos construidos automáticamente de los textos, pero más enfocado al análisis de conceptos y ofreciendo un mecanismo de operaciones de consulta sobre grafos más abarcador y flexible, que incluye operaciones de: Unión, Intersección y Proyección. En el caso de esta última, se ofrece mayor facilidad al usuario, ya que estos son los que seleccionan los conceptos de interés sobre los que se desea realizar el análisis. En esta solución, se incluye un método de análisis semántico para la búsqueda e integración de estructuras conceptuales de los grafos, soportado por un algoritmo de desambiguación y WordNet, el cual se aplica en el procesamiento de cada consulta. No obstante, también con la desventaja de que, como se plantea en [18], el tratamiento de la semántica basada en la desambiguación aumenta la complejidad de la solución y los recursos de cómputo requeridos, sugiriéndose el uso de técnicas de evaluación de similitud semántica, tales como las basadas en WordNet [20]. Además, estás soluciones no brinda una forma para conocer las fuentes textuales de las cuales provienen los conceptos y/o temas relevantes o de contexto, lo cual enriquecería y proporcionaría más fiabilidad al análisis de texto.

III. Modelo de Análisis Propuesto

El modelo incluye tres procesos fundamentales: representación de textos, análisis de grafos y recuperación de pasajes, e integra varios recursos de conocimiento, según se muestra en la Fig. 1. El primero, tiene el objetivo de estructurar el contenido textual mediante su representación en forma de grafo, a partir del cual se conforma un Repositorio de Grafos de Conocimiento (RGC), y usando n-gramas para la indexación de los textos. Los restantes procesos ofrecen la posibilidad al usuario de recuperar información relevante y obtener conocimiento desde esos contenidos estructurados, a través de consultas sobre el RGC, la identificación y recomendación de conceptos relevantes y la recuperación de pasajes de textos donde aparecen conceptos de interés. Este último da un valor agregado al análisis de conceptos con respecto al resto de las propuestas, pues permite identificar las fuentes textuales donde aparecen los conceptos, obteniendo un análisis más detallado.

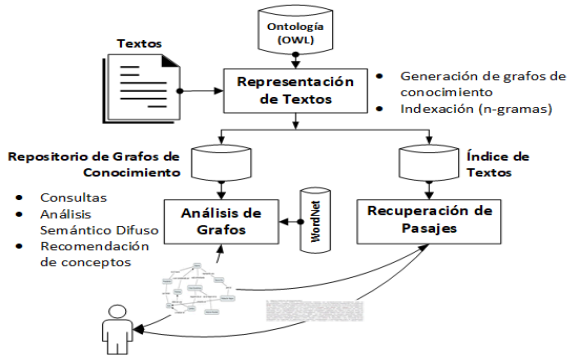


Fig. 1. Visión general del modelo propuesto

A. *Representación de los Textos*

En este proceso, el contenido de los textos es representado mediante dos esquemas: (1) grafos y (2) n-gramas, siendo el primero de ellos, la principal fuente de análisis del contenido textual. La generación del grafo está concebida de forma similar a lo reportado en [12], en tres fases: pre-procesamiento, extracción de conceptos y de relaciones. En el pre-procesamiento, se extrae la información sintáctica y gramatical del texto usando varias técnicas de procesamiento de lenguaje natural (NLP: *Natural Language Processing*) a través de FreeLing, en especial el análisis de dependencia, que aunque es más costoso computacionalmente que el análisis superficial ha dado mejores resultados [10]. Los conceptos se extraen empleando un conjunto de patrones léxico-sintácticos (representan mayoritariamente frases sustantivas) y a través del vocabulario representado en una ontología suministrada por el usuario (preferiblemente del mismo ámbito del texto). La extracción de relaciones abarca la identificación de relaciones explícitas e implícitas entre los conceptos identificados. Las explícitas se extraen de cada oración usando también patrones léxico-sintácticos y las implícitas (conectan conceptos que aparecen en diferentes partes del texto) se extraen mediante la técnica de string matching, el análisis de la proximidad entre conceptos en el texto y tenido en cuenta relaciones representadas en la ontología (si es suministrada). Este último tipo de relaciones permite incrementar la cobertura del texto, en cuanto a la representación de su contenido, aspecto clave para aumentar la eficacia en su análisis. Luego de la extracción de los conceptos y relaciones, se eliminan redundancias e inconsistencias, y se genera el grafo de cada texto. El uso de n-gramas está motivado por la necesidad de crear un índice de los textos, que permita la recuperación de contenidos textuales asociados a conceptos recuperados como resultados de las

consultas a los grafos, siendo esta una funcionalidad a través de la cual se extiende lo reportado en [12]. Los conceptos representados en los grafos pueden constituir secuencias de tokens dentro de las oraciones, por tanto, el uso de n-gramas facilita la recuperación de aquellas oraciones en las cuales estén presentes esos conceptos. La indexación se lleva a cabo segmentando los textos en oraciones, extrayendo de ellas los n-gramas (1-, 2-, y 3-gramas) y almacenándolas con esa estructura en un índice de Lucene. Ambos procesos de estructuración del contenido de los textos se ejecutan en paralelo.

B. *Análisis de Grafos*

El proceso de análisis de grafos se lleva a cabo mediante un mecanismo de consultas basado en [5][12], con la diferencia de que en esta nueva solución se propone un enfoque difuso para realizar el análisis semántico que se lleva a cabo en la integración de los grafos, como parte del procesamiento de las consultas. Adicionalmente, se incluye la identificación y recomendación de conceptos relevantes mediante la obtención de un ranking de conceptos, similar a lo reportado en [5], pero teniendo en cuenta como elementos: la frecuencia de aparición de los conceptos en los textos y la relevancia obtenida por el algoritmo PageRank [6], aplicado sobre el grafo que representa el contenido de la colección de textos.

1) Consultas

A través de estas consultas, se puede recuperar información relevante y obtener conocimiento desde un espacio de búsqueda especificado por el usuario y constituido por un conjunto de grafos almacenados en el RGC. El resultado de las consultas se puede expresar en conceptos individuales y/o estructuras conceptuales en forma de grafo. El procesamiento de las consultas incluye tareas de búsqueda e integración de información, por lo que, aunque los conceptos recuperados estén presentes en diferentes fuentes textuales, estos pueden ser integrados en el resultado final, propiciando así la generación de conocimiento. Los tipos de consultas incluidas en este proceso son: Unión, Intersección y Proyección.

La unión de dos grafos $G_1 = (N_1, E_1)$ y $G_2 = (N_2, E_2)$ se denota como $G_1 \cup G_2$ y de la misma manera $(N_1 \cup N_2, E_1 \cup E_2)$. El grafo unión se puede ver como una forma de mezclar dos grafos sin ninguna pérdida de información (es decir, sin excluir ningún nodo N_i, ni arco E_i). Por tanto, es un operador útil para mezclar información de múltiples documentos de texto [5]. En efecto, si se considera el corpus $D = \{d_1, \ldots, d_n\}$ y si G_i denota el modelo de grafo correspondiente para cada d_i, entonces la información combinada del corpus se puede representar por:

$$G_D = \bigcup_{i=1}^{n} G_i$$

Esta representación conlleva un rápido crecimiento del número de nodos y por consiguiente la obtención de una cantidad abrumadora de información. Por tanto, el uso de la unión de grafos para mezclar documentos textuales requiere típicamente post-procesamiento con un operador que extraiga la información relevante del grafo combinado [5].

La *Intersección* (*Inter*) permite recuperar conceptos y estructuras conceptuales comunes a un % (cota mínima) de los grafos que conforman el espacio de búsqueda, el cual requiere ser especificado por el usuario como parámetro, y es definido como Valor de Soporte (VS) [12]. La *Proyección* ($Proj^R$), en sus diferentes variantes, permite recuperar las estructuras conceptuales asociadas a determinados conceptos de interés especificados por el usuario, considerando diferentes niveles de vecindad (denotado por *R*); el cual también es especificado por el usuario. Se utilizan tres tipos de consultas *Proyección*, para ofrecer diferentes perspectivas de recuperación de información, considerando sobre el concepto de interés: (1) solo enlaces de entrada ($Proj^{R, IN}$); (2) solo enlaces de salida ($Proj^{R, OUT}$); y (3) todos los tipos de enlaces ($Proj^R$). Las primeras dos, son útiles para analizar los niveles de autoridad o centralidad de los conceptos de interés, respecto a otros conceptos con los que está relacionado en el texto; inspirado en los conceptos de Kleinberg [16]. Notar que esta consulta puede conducir a un subgrafo que formado por varios componentes (mutuamente desconectados). La *Intersección* y *Proyección* también ofrecen la posibilidad de obtener automáticamente resúmenes de la colección de textos, desde diferentes perspectivas, ya sea general (*Intersección*) o enfocados a conceptos de interés (*Proyección*).

2) Análisis Semántico Difuso

En el modelo propuesto, el proceso análisis semántico se lleva a cabo con el objetivo de integrar la información contenida en la colección de textos a través de la integración de los grafos que representan sus estructuras conceptuales. Este proceso se ejecuta como parte del procesamiento de las consultas definidas para la obtención de resultados sobre un contenido semánticamente integrado, aunque provenga de fuentes textuales diferentes. La integración de los grafos está basada en la integración de conceptos semánticamente similares. En [12] este proceso se realiza a partir de la identificación del sentido en WordNet de los conceptos (usando un algoritmo de desambiguación) y la unificación de aquellos que tengan el mismo significado. Sin embargo, el análisis semántico de la información textual, a nivel del significado de las palabras, está usualmente sujeto a la subjetividad, vaguedad y problemas de imprecisión, dada la inherente ambigüedad del lenguaje natural. Debido a esto y a las limitaciones mencionadas sobre el uso de algoritmos de desambiguación en este tipo de enfoques, es que se decide tratar este problema desde la perspectiva de la lógica difusa.

En esta nueva propuesta, el análisis de la similitud semántica difusa entre los conceptos se lleva a cabo mediante la combinación de la medida de similitud sintáctica de Levenshtein [17], con otras tres medidas de similitud semántica definidas sobre la base de lo reportado en [18] para medir la similitud sentencia-a-sentencia y varias de las medidas disponibles en el paquete WordNet::Similarity [20] (Resnik - R , Lin - LIN, and Jiang & Conrath – J & C)); un enfoque similar se aplica en [2]. Esta combinación se realiza a través de la función de agregación compensatoria reportada en [22] (ecuaciones 1 y 2) y la *t-norma* algebraica descrita en la ecuación (3), obteniendo un solo valor de similitud entre conceptos a partir de los valores numéricos (s_i) resultantes de

cada medida. En el campo de la medición de similitud semántica, las funciones de agregación son generalmente definidas y usadas para combinar varios valores numéricos, a partir de la agregación de los resultados de diferentes medidas de similitud semántica para obtener un único valor resultante [19]. El flujo de esta propuesta se muestra en Fig. 2, y la misma permite reducir los efectos negativos derivados de la incertidumbre que se produce en la decisión sobre qué medidas son más relevantes y el peso que ha dicha relevancia se asigna.

$$Z_\gamma(s_1, s_2, \dots, s_n) = \left(\prod_{i=1}^{n} s_i\right)^{1-\gamma} * \left(1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - s_i)\right)^{\gamma} \quad (1)$$

$$\gamma = \frac{T(s_1, s_2, \dots, s_n)}{T(s_1, \dots, s_n) + T(1 - s_1, \dots, 1 - s_n)} \quad (2)$$

$$T(s_1, s_2, \dots, s_n) = \prod_{i=1}^{n} s_i \quad (3)$$

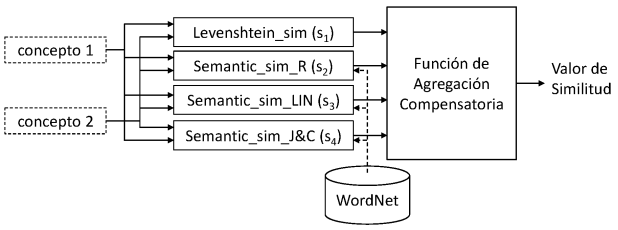


Fig. 2. Flujo de trabajo para la evaluación de la similitud entre conceptos.

En la integración de información entre dos grafos G_1 y G_2 se define un umbral U, que representa el valor mínimo de similitud existente entre dos nodos-conceptos para ser integrados. Cada nodo del grafo puede agrupar uno o varios conceptos en dependencia de las integraciones anteriores. En este proceso, se mide la similitud entre cada nodo N_i de G_1 y todos los nodos de G_2 y luego se integran aquellos nodos que tengan una similitud igual o superior a U. Este proceso se ejecuta iterativamente hasta que se compare el último nodo N_i con todos los nodos de G_2. La ecuación (4) describe el cálculo de la similitud entre dos nodos N y M, donde N está formada por el conjunto de conceptos $\{cn_1, cn_2, \dots, cn_n\}$ y M por otro conjunto de conceptos $\{cm_1, cm_2, \dots, cm_m\}$. Donde *simSD* es la función de agregación descrita anteriormente y *ln* y *lm* las cantidades de conceptos en los nodos N y M. Los nodos con etiqueta l_r, representan el primer concepto del grupo y estos conceptos se representan a su vez por conceptos separados por una coma y encerrados entre [ ] (ej. [c_1, c_2]).

$$sim(N, M) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} simSD(cn_i, cm_j)}{\ln * lm} \quad (4)$$

Los conceptos representados en un mismo nodo se consideran que tienen una fuente relación de sinonimia y por tanto, de esa manera son tratados en el modelo de recuperación concebido como parte de las consultas de *Proyección* (*Q*). En este tipo de consultas el usuario especifica uno o varios conceptos de interés (*CQ*), y selecciona un conjunto de grafos del RGC para formar el espacio de búsqueda (G_D). Se definieron varias reglas para identificar si un nodo $n_j / n_j \in N^{Gd}$ es recuperado o no, a partir del concepto $c_i \in CQ$. Estas reglas son ejecutadas en el mismo orden en que aparecen. Siendo, los conceptos $a / a \in CQ$, y $b / b \in N^{Gd}$, $T(c_i)$ el conjunto de palabras que conforman c_i, $l_r(b)$ la etiqueta representativa del nodo n_j y $ST(n_i)$ el grupo de conceptos de n_i. El nodo b es recuperado si: (R_1) $a \equiv l_r(b)$*(sintácticamente);* o (R_2) $a \in T(l_r(b))$*;* o (R_3) $a \in ST(b)$. Este tipo de consultas requiere que el usuario conozca los CQ que serán objeto de análisis. En tal sentido, se incorpora al modelo un mecanismo de identificación y recomendación de conceptos relevantes, el cual se describe a continuación.

3) Identificación y Recomendación de conceptos

En este proceso se obtiene un ranking de los *k* conceptos más relevantes de la colección de textos, teniendo en cuenta como criterios: frecuencia de aparición de los conceptos en los textos y la relevancia de los conceptos en el grafo que representa el contenido de la colección de textos. La frecuencia de aparición de los conceptos se computa en el mismo proceso de integración de los grafos generados que se ejecuta como parte de la *Unión*, a partir de esta consulta se extraen y ordenan los *k* conceptos más frecuentes de forma descendentemente para ser mostrados al usuario. La identificación de conceptos relevantes de acuerdo al segundo criterio se lleva a cabo mediante la aplicación del algoritmo PageRank [6] sobre el grafo resultante de la operación de *Unión*, en el cual está representada la conceptualización de la colección de textos. De la misma forma, como resultado se muestra al usuario de forma ordenada descendentemente los *k* conceptos con mayor valor de relevancia, según el PageRank. Esta funcionalidad potencia el uso de las consultas de *Proyección*, ya que el resultado de estos procesos sirve de guía al usuario en cuanto al análisis de los textos sobre la base de disponer de información sobre los conceptos más relevantes y representativos de la colección.

C. Recuperación de Pasajes

La inclusión de este proceso tiene el objetivo de ofrecer al usuario la posibilidad de recuperar fragmentos de textos de las fuentes primarias de información, a partir de conceptos representados en el grafo resultante de las consultas definidas para el análisis de los grafos, mediante el uso de Lucene. La forma en que se utiliza la recuperación de pasajes en este trabajo también puede considerarse como un tipo de análisis de grafos, pues se está analizando el grafo con respecto a los textos. En este caso, las consultas se construyen a partir de la selección por el usuario, de conceptos y/o proposiciones de interés representados en el grafo y se utiliza el conjunto de conceptos agrupados en un mismo nodo del grafo, para ejecutar un proceso de expansión de las consultas. Además, se emplea el operador *OR* para los conceptos de la consulta y *AND* para las proposiciones. La construcción de los pasajes se lleva a cabo a partir de la identificación de oraciones centrales en el Índice de Textos, las cuales pueden ser expandidas según el tamaño del pasaje (*PS*) especificado por el usuario. La oración central constituye la oración en la que aparecen los conceptos incluidos en la consulta, según el operador utilizado. *PS* se define como la cantidad máxima de oraciones que conforma el pasaje, y como este valor numérico puede ser par o impar, se

definieron reglas para determinar la cantidad real de oraciones (adyacentes a la oración central) a ser incluidas en el pasaje: *(R1) Si PS = 1 entonces se devuelve la oración central; (R2) Si PS es par entonces se incluyen las PS/2 oraciones anteriores a la oración central y las (PS/2)-1 oraciones contiguas; y (R3) Si PS es impar entonces se incluyen PS/2 oraciones anteriores y contiguas a la oración central.* Como resultado, por cada concepto y/o proposición, se muestran los pasajes de texto recuperados, los identificadores de los textos fuentes y la cantidad de pasajes recuperados por cada uno, resaltando los conceptos incluidos en la consulta.

IV. Evaluación del Modelo Propuesto: Caso de Estudio

La evaluación experimental de esta propuesta resulta compleja debido, fundamentalmente, a la ausencia de métodos y colecciones de evaluación estandarizados para este tipo de soluciones, en especial para la representación del texto [10], de la cual depende en gran medida el resto de los procesos. La evaluación de la recuperación de información suele enfocarse en la medición de resultados a partir de los documentos recuperados dado una consulta, y no a estructuras conceptuales incluidas en ellos, como se pretende con esta propuesta. En este sentido, se decidió aplicar un enfoque de evaluación similar a [12], en el contexto de las SLR.

La SLR es un medio de identificación, interpretación y evaluación de la evidencia científica relevante sobre una pregunta de investigación, tópico o fenómeno de interés [15]. Muchas de las tareas de la SLR, como la extracción y síntesis de datos, requieren alto consumo de tiempo, y mucho trabajo manual, implicando un gran esfuerzo [3]. En la extracción de datos se extraen de cada uno de los estudios un conjunto de datos (ej. bibliográficos, cuantitativos y cualitativos) que se definen en la fase de planificación en forma de un formulario. En la síntesis se combinan esto datos para darle respuesta a las preguntas de investigación iniciales. Este caso de estudio se enfoca en las tareas de extracción y síntesis de datos de la SLR reportada en [8], donde se analizan 11 artículos científicos. El objetivo del caso de estudio es ejemplificar la aplicabilidad del modelo propuesto para las tareas mencionadas. A partir de esos artículos, se conformaron 11 textos, con 822 palabras y 33 oraciones cada uno (como promedio) usando las secciones de resumen, introducción y conclusiones de cada artículo. Según la propuesta, inicialmente se indexan los textos y se generan los grafos a partir de ellos, constituyéndose el Índice y el RGC.

El modelo propuesto permite soportar y combinar la extracción y síntesis de datos mediante la utilización y combinación de sus principales procesos. La aplicación de la consulta de intersección (*Inter*) (similar a [12]) y el uso de la recomendación de conceptos, obtienen los conceptos que tienen una frecuencia igual o superior al *SV* en la colección de textos y las relaciones entre ellos representadas en los grafos. Estos conceptos pueden considerarse palabras claves o terminología que caracteriza ese contenido, y permitan responder a las preguntas de investigación. En la Fig. 3 se ejemplifica el resultado de la consulta $Inter^{50}$(RGC), donde el tamaño de los nodos representa el nivel de frecuencia de los conceptos. En esta Fig. se identifican [*software*], [*dependability*, *reliability*] e [*ISO*] como conceptos más relevantes, lo que se corrobora con el título del artículo [8], donde tres de ellos aparecen. En este ejemplo, también se ilustran resultados del análisis semántico difuso en la unificación de '*dependability*' y '*reliability*', lo cual contribuye a conocer rápidamente la terminología usada para referirse al mismo concepto. La relación '*strong relation*' indica que los conceptos [*software*] e [*ISO*] tienen una fuerte relación contextual, sugiriendo un análisis adicional, que puede soportarse con el uso de la *Proyección* y/o la recuperación de pasajes. El uso de la recuperación de pasajes en este trabajo brinda, a diferencia de las otras propuestas, la posibilidad de conocer en que fuentes se encuentran los conceptos y su contexto, permitiendo extraer datos que se requieran para llenar los formularios de los estudios, y así poder registrar esta información. Además, de las etiquetas de los campos del formulario pueden obtenerse conceptos de referencia que sirvan de base al modelo para obtener información, principalmente cualitativa, que sirva tanto para la extracción como para la síntesis de datos.

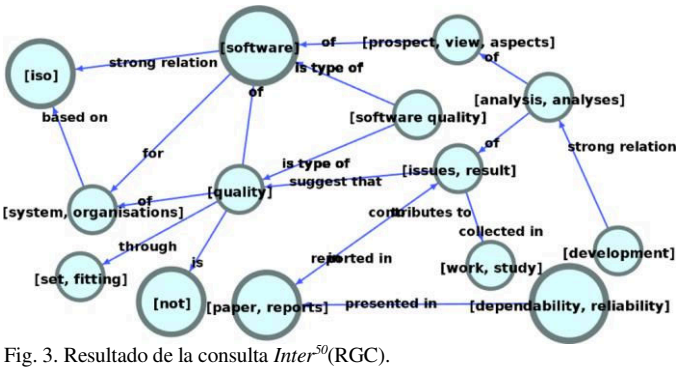


Fig. 3. Resultado de la consulta $Inter^{50}$(RGC).

Al tener identificados conceptos de interés se puede aplicar la consulta de *Proyección*, así como la recuperación de pasajes para profundizar en el análisis de los mimos. En este caso, se ejecutó esta consulta usando el RGC como espacio de búsqueda y '*standard*' como concepto de interés ($Proj^{1}$*(RGC, standard)*), respondiendo a la pregunta: *"Which software reliability models have been developed by following the recommendations in International Standards?"* [8], donde '*standard*' es uno de los términos relevantes. El resultado se muestra en la Fig. 4, donde se representan varios conceptos relacionados con '*standard*' y asociados a '*International Standards*', tales como: *ISO*, *IEEE*, *SQuaRE*, y *COSMIC*. En la Fig. 4 se representan también conceptos presentes en diferentes fuentes textales, lo cual es posible a partir del análisis semántico difuso concebido. Este análisis se complementó con la recuperación de los pasajes, donde aparecen algunos de los conceptos representados en la Fig. 4 (se muestra en la misma figura), y puede ser utilizado en la extracción de datos para conocer en estudios aparecen los distintos estándares. Los resultados expuestos reflejan beneficios de la propuesta como soporte a las SLR para las tareas de extracción y síntesis de datos a partir del análisis del contexto en el que están siendo usados los conceptos, la obtención de vistas resumidas y sintetizadas del contenido, que facilitan el análisis cualitativo y cuantitativo sobre los conceptos, entre otros aspectos.

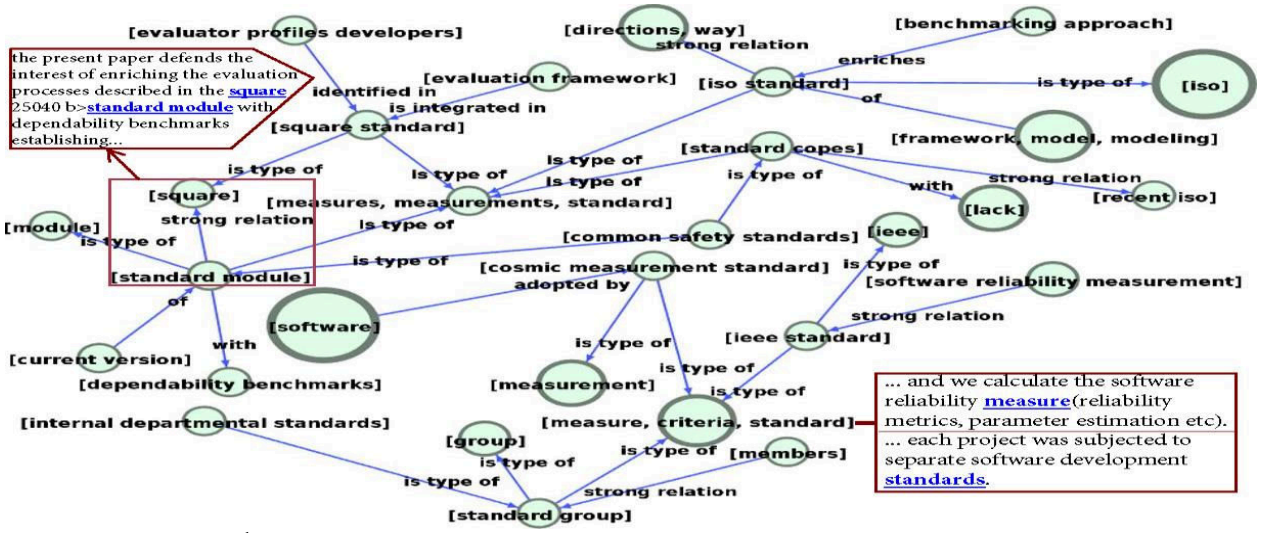


Fig. 4. Resultado de la consulta *Proj*^{I}*(RGC, standard)*.

CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

Este trabajo presentó un modelo de análisis de textos basado en grafos, soportado en el procesamiento semántico difuso del contenido. En el modelo se combinan técnicas de análisis de grafo y recuperación de pasajes, para recuperar información relevante de una colección de textos. El enfoque difuso propuesto para el análisis semántico, donde se combinan medidas de similitud entre conceptos a través de una función de agregación, permitió incrementar los resultados obtenidos en las consultas. El caso de estudio desarrollado evidenció beneficios de esta propuesta para soportar computacionalmente las tareas de extracción y síntesis de datos en el contexto de una SLR. En trabajos futuros, se considerarán otras operaciones sobre los grafos como la detección de patrones frecuentes, así como otros operadores de agregación y métricas de similitud en el análisis semántico sobre los conceptos.

AGRADECIMINETOS

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el proyecto METODOS RIGUROSOS PARA EL INTERNET DEL FUTURO (MERINET), financiado por el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER) y el Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO), Ref. TIN2016-76843-C4-2-R.

REFERENCIAS

[1] Aggarwal, C. C., y Zhai, C. X.: “Mining Text Data”. Springer (2012).

[2] Al-Amin, S. T., M. Hasan, y M. M. A. Hashem. “A Modified Fuzzy Relational Clustering Approach for Sentence-Level Text”. In Proceedings of EICT 2015, 2015, pp. 1-5.

[3] Al-Zubidy, A., J. C. Carver, D. P. Hale, y E. E. Hassler. “Vision for SLR tooling infrastruc-ture: Prioritizing value-added requirements”. Information and Software Technology. 91, 2017, pp. 72-81.

[4] Benkoussas, C., y P. Bellot. “Information Retrieval and Graph Analysis Approaches for Book Recommendation”. The Scientific World Journal. 2015, pp. 1-8.

[5] Bronselaer, A. y G. Pasi. “An approach to graph-based analysis of textual documents”. In Proceedings of EUSFLAT. 2013, pp. 634-641.

[6] Brin, S. y L. Page. “The anatomy of a large-scale hypertextual Web search engine”. Comput. Netw. ISDN Syst. 30(1-7), 1998. pp. 107–117.

[7] Chang, J. Y., y I. M. Kim. “Research Trends on Graph-Based Text Mining”. Int. J. of Software Engineering and Its Applications. 8(4). 2014, pp. 147-156.

[8] Febrero, F., C. Calero, y M. A. Moraga. “Software reliability modeling based on ISO/IEC SQuaRE”. Information and Software Technology. 70. 2016, pp. 18-29.

[9] Felizardo, B. K., G. Andery, F. V. Paulovich, R. Minghim, y J. C. Maldonado. “A Visual Analysis Approach to Validate the Selection Review of Primary Studies in Systematic Reviews”. Information and Software Technology. 54. 2012, pp. 1079-1091.

[10] Glauber, R., y D. Barreiro-Claro. “A systematic mapping study on open information extraction”, Expert Syst. Appl. 112. 2018, pp.372-387.

[11] Hassan, G. S., A. K. Abdulsahib, y S. S. Kamaruddin. “Graph-Based Text Representation: A Survey of Current Approaches”. Research J. of Applied Sciences, Engineering and Technology. 14(9), 2017, pp. 334-340.

[12] Hojas-Mazo, W., A. Simón, M. de la Iglesia, F. P. Romero, J. A. Olivas. “A concept-based text analysis approach using knowledge graph”. In Proceedings of IPMU 2018, CCIS 854, 2018, pp. 696–708.

[13] Indurkhya, N. “Emerging directions in predictive text mining”. WIREs Data Mining and Knowledge Discovery. 5, 2015, pp. 155-164.

[14] Karim, G., T. K. Mouna, T. Lynda, y B. J. Maher. “Graph-based Methods for Significant Concept Selection”. Procedia Computer Science. 60, 2015, pp. 488–497.

[15] Kitchenham, B. A., y S. Charters. “Guidelines for performing systematic literature reviews in software engineering”. Tech. Rep.EBSE 2007-001. Keele University and Durham University Joint Report. 2007.

[16] Kleinberg, J. M. “Authoritative sources in a hyperlinked environment”. Journal of the ACM. 46(5), 1999, pp. 604–632.

[17] Levenshtein, A. “Binary Codes Capable of Correcting Deletions, Insertions and Reversals”. Soviet Physics Doklady. 10(8), 1966, pp. 707-710.

[18] Li, Y., D. McLean, Z. Bandar, J. O’Shea, y K. Crockett. “Sentence similarity based on semantic nets and corpus statistics”. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering. 2006, pp.1138–1150.

[19] Martinez-Gil, J. “CoTO: A Novel Approach for Fuzzy Aggregation of Semantic Similarity Measures”. Cognitive Systems Research, 40. 2016, pp. 8-17.

[20] Pedersen, T., S. Patwardhan, y J. Michelizzi. “WordNet::Similarity - Measuring the Relatedness of Concepts”. In: Proc. of the 19th National Conference on Artificial Intelligence (AAAI-04), 2004, pp. 1024-1025.

[21] Sonawane, S. S., y P. A. Kulkarni. “Graph based Representation and Analysis of Text Document: A Survey of Techniques”. International Journal of Computer Applications. 96(19), 2014, pp. 1-8.

[22] Zimmermann, H.-J., y P., Zysno. “Latent connectives in human decision making”. Fuzzy Sets and Systems. 4(1), 1980, pp. 37-51.

Definición de particiones difusas condicionadas usando transformadas difusas.

Nicolás Madrid
Departamento de Matemática Aplicada
Universidad de Málaga
Málaga, España
nicolas.madrid@uma.es

Sergio Díaz-Gómez
Universidad de Málaga
Málaga, España
sergiodg96@hotmail.com

***Abstract*—Las particiones difusas pueden definirse de diferentes formas, pero casi siempre, la definición se efectúa atendiendo a las características generales de la totalidad del universo. En este trabajo se presenta un método para definir particiones difusas condicionadas a la satisfacción de cierto atributo difuso. En concreto, se muestra cómo definir diferentes particiones difusas atendiendo a las características de diferentes subconjuntos difusos del universo.**

I. Introduction

Todo sistema difuso consta de tres partes bien conocidas: *fuzzificación, inferencia* y *defuzzificación*. En muchos casos, estos tres pasos se apoyan en uno de los conceptos más importantes del paradigma de los sistemas difusos: la partición difusa.

Aunque la definición de partición difusa difiere según diferentes autores (ver [2], [4], [5], [10]), en general la idea es dividir al universo de discurso en una serie de clases difusas (normalmente asociados a etiquetas lingüísticas). Existen multitud de formas de definir particiones difusas sobre un universo $\mathcal{U}$. La más conocida, que no necesariamente la más conveniente, es la familia de particiones dadas por expertos. Éste tipo de particiones es útil cuando la partición viene dada por conceptos lingüísticos propios del ser humano sin sustento científico ni definición formal; como pueden ser la división del día en intervalos de tiempo vagos como la mañana, tarde, noche, etc; la división de vegetales en fruta o verdura; o la clasificación de animales en mascotas.

Otra familia de particiones difusas muy utilizada es la constituida por las particiones uniformes. Éstas dividen el universo de manera homogénea en espacio y forma. A pesar de su simplicidad, han mostrado ser de gran utilidad para muchas tareas, como puede comprobarse en el área de procesamiento de imágenes [9].

Con el fin de definir particiones difusas óptimas para ciertas tareas, se han definido algoritmos automatizados para el cálculo de particiones basados en clustering y/o estadística [10], [3]. Sin entrar en detalles, estos algoritmos consideran uno o varios atributos de los elementos del universo y calculan parámetros de referencia (clusters o parámetros estadísticos) que se utilizan para la definición de las clases que definirán la partición. Como ejemplo, las particiones basadas en clustering han mostrado ser útiles para la obtención de reglas difusas [1], [6].

Independientemente de cómo se defina la partición, es obvio que ésta depende de un contexto. Supongamos que deseamos tener una partición difusa del atributo altura para personas. En este caso, la clase de *personas altas*, que podría ser una clase de dicha partición difusa, depende claramente del contexto: no es lo mismo una persona alta en una liga de baloncesto, en un campeonato de hípica o en un colegio de primaria. En la mayoría de los casos, este contexto está implícito en la tarea a resolver y, aunque no se mencione, se considera en la definición de la partición. Por ejemplo, si el sistema difuso se plantea para clasificar alumnos con sobrepeso de un colegio de primaria, de nada sirve considerar el concepto de altura que pueda derivarse de un contexto de liga profesional de baloncesto.

En este trabajo proponemos posibilitar el uso de diferentes particiones difusas dependiendo del contexto. Siguiendo el ejemplo anterior, si queremos un sistema difuso para clasificar personas con sobrepeso, sería interesante disponer de multitud de particiones difusas acorde al contexto al que dicha persona pertenezca. Así, el sistema utilizaría una partición diferente si la persona es un alumno de primaria, un jugador profesional de baloncesto o un jinete de la carrera Sanlúcar. Cuando el contexto viene dado por una serie de conjuntos crisp, la definición de dichas particiones se reduce al caso clásico. Sin embargo, cuando los conjuntos que definen los diferentes contextos son también difusos, la definición de dichas particiones difusas no es una tarea trivial. Siguiendo el ejemplo, podríamos estar interesados en definir un sistema difuso para detectar sobrepeso en personas con ingresos medios.

En este trabajo presentamos un método para definir particiones difusas para aquellos elementos del universo que tengan cierta propiedad difusa. Dicha partición se definirá mediante el uso de transformadas difusas [8], [7], que pueden entenderse como medias ponderadas por conjuntos difusos. En pos de una mejor comprensión de la metodología, se presenta cómo se definen cinco particiones difusas de un conjunto de muestras de generación energética acorde al momento del día en el que fueron tomadas; i.e., durante la madrugada, la mañana, el mediodía, la tarde o la noche.

El trabajo está estructurado de la siguiente manera. Comen-

zamos presentando ciertos conceptos básicos en la Sección II. En la Sección III presentamos como se definen las F-transformadas directa e inversa. En la Sección IV mostramos cómo definir particiones difusas de tres clases para los elementos del universo que tengan cierto atributo difuso. En esta sección mostraremos además cómo se aplica la metodología al caso de la generación eléctrica condicionada al tramo horario. Finalmente, en la Sección V presentamos las conclusiones y el trabajo futuro.

II. Preliminaries

El concepto de partición difusa se define de manera general de la siguiente forma.

Definición 1: Una partición difusa Δ de un universo $\mathcal{U}$ es un conjunto $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_n\}$ de conjuntos difusos sobre $\mathcal{U}$ que cumplen la condición de recubrimiento, es decir, para todo $x \in \mathcal{U}$ existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\Delta_k(x) > 0$.

En la bibliografía se pueden encontrar una gran cantidad de propiedades adicionales que se imponen sobre las particiones difusas. A continuación enumeramos una serie de propiedades que cumplirán las particiones definidas en este trabajo. Una partición $\Delta = \{\Delta_1, \ldots, \Delta_n\}$ sobre $[0, 1]$ se define a partir de ciertos nodos $0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 1$ tales que:

- (normalidad) $\Delta_k(x_k) = 1$.
- (soporte acotado) $\Delta_k(x) = 0$ si $x \notin (x_{k-1}, x_{k+1})$.
- (continuidad) $\Delta_k(x)$ es continua.
- (convexidad)
  - $\Delta_k(x)$ es estrictamente creciente en (x_{k-1}, x_k) y
  - $\Delta_k(x)$ es estrictamente decreciente en (x_k, x_{k+1}).
- (Ruspini) para todo $x \in [0, 1]$:

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta_k(x) = 1$$

Las funciones de pertenencia de los conjuntos difusos que forman las particiones difusas pueden darse de infinidad de maneras. Por practicidad, suelen elegirse funciones de pertenencia sencillas que se definen a partir de ciertos parámetros. En este trabajo vamos a considerar funciones de pertenencia triangulares y trapezoidales, que se definen sobre el universo de los números reales a partir de tres/cuatro parámetros $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ de la siguiente forma:

$$triangular(a,b,c)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a < x \leq b \\ \frac{b-x}{b-c} & \text{si } b < x \leq c \\ 0 & \text{si } c < x \end{cases}$$

$$trapezoidal(a,b,c,d)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a < x \leq b \\ 1 & \text{si } b < x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c} & \text{si } c < x \leq d \\ 0 & \text{si } d < x \end{cases}$$

En algunos casos haremos un pequeño abuso de notación aceptando, en el caso de las funciones de pertenencia trapezoidales, que los parámetros a, b y c, d puedan ser $-\infty$ o ∞, respectivamente. En dichos casos, las funciones de pertenencia refieren a

$$trapezoidal(-\infty,-\infty,c,d)(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c} & \text{si } c < x \leq d \\ 0 & \text{si } d < x \end{cases}$$

y

$$trapezoidal(a,b,\infty,\infty)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a < x \leq b \\ 1 & \text{si } b < x \end{cases}$$

En general, existen multitud de formas de definir particiones difusas en un cierto universo $\mathcal{U}$, aunque éstas se pueden clasificar en dos familias: particiones basadas puramente en etiquetas lingüísticas dadas por un experto y particiones definidas a partir de herramientas de clustering o parámetros estadísticos (con o sin supervisión). En el Ejemplo 1 se describe una partición dada por un experto concerniente a los intervalos temporales de un día.

Ejemplo 1: El ser humano suele dividir las 24 horas del día en los siguientes cinco intervalos temporales: *madrugada, mañana, mediodía, tarde* y *noche*. Dichos intervalos se pueden modelar como cinco conjuntos difusos trapezoidales de la siguiente manera:

Madrugada = trapezoidal $(00,\ 02,\ 05,\ 07)$
Mañana = trapezoidal $(05,\ 07,\ 11,\ 13)$
Mediodía = trapezoidal $(11,\ 13,\ 14,\ 15)$
Tarde = trapezoidal $(14,\ 15,\ 18,\ 20)$
Noche= trapezoidal $(18,\ 20,\ 23,\ 01)$

donde el tiempo viene dado en horas con notación 24h. Las gráficas de los cinco conjuntos difusos que forman esta partición vienen dadas en la Figura 1. Obsérvese que dicha partición satisfacen todas las propiedades adicionales de normalidad, soporte acotado, continuidad, convexidad y Ruspini.□

Puesto que este trabajo está orientado en el uso de parámetros estadísticos para la definición de particiones difusas, vamos a esbozar a continuación un sencillo algoritmo para definir una posible partición difusa de tres clases a partir de la información de un atributo difuso X; es decir, un conjunto difuso $X\colon \mathcal{U} \to [0, 1]$. Las tres clases van a representar las etiquetas lingüísticas "*atributo X bajo*", "*atributo X medio*" y "*atributo X alto*". Uno de los valores más representativos, si no el que más, de lo que sería un valor "*medio*" del atributo X sería la *media* del conjunto de valores $\{X(u)\}_{u\in\mathcal{U}}$. De este modo, cuanto más cerca esté el atributo X de la media, más "*medio*" será. Modelar este concepto de cercanía se puede hacer a través de múltiples expresiones y un punto clave es determinar qué valores del atributo X dejan de clasificarse como "*medios*". Quizás la forma más natural para hacer esto último es mediante el cálculo de una medida de dispersión sobre el conjunto de valores $\{X(u)\}_{u\in\mathcal{U}}$, que determinaría un intervalo para los valores "*medios*".

Ejemplo 2: Supongamos que queremos realizar una partición sobre los números reales (i.e., $\mathcal{U} = \mathbb{R}$) acorde a cierto atributo $X\colon \mathbb{R} \to [0, 1]$. Supongamos que la media y la

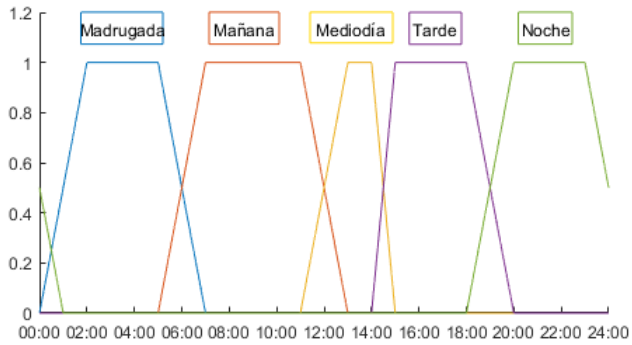


Figure 1. Partición difusa para el día dada por un experto acorde a las etiquetas lingüísticas *madrugada, mañana, mediodía, tarde* y *noche*.

desviación típica de $\{X(u)\}_{u\in\mathbb{R}}$ son μ y σ, respectivamente. Entonces, la partición difusa formada por las siguientes tres clases:

$\Delta_1 =$ trapezoidal $(-\infty, -\infty, \mu-\sigma,\ \mu)$

$\Delta_2 =$ triangular $(\mu-\sigma,\ \mu, \mu+\sigma)$

$\Delta_3 =$ trapezoidal $(\ \mu, \mu+\sigma, \infty, \infty)$

modeliza los conceptos "*atributo X bajo*","*atributo X medio*" y "*atributo X alto*", respectivamente.

Merece la pena mencionar la existencia de otros métodos para definir particiones difusas basados en cuartiles o clústering [4], [10].

III. Transformadas difusas

Las transformadas difusas fueron aplicadas en su origen sobre funciones definidas entre el intervalo unidad [8] y recientemente extendidas para ser aplicadas a un conjunto de puntos arbitrario del producto cartesiano $\mathcal{U}\times[0,1]$ para $\mathcal{U}$ un conjunto arbitrario [7].

Las transformadas discretas para datos sin estructura funcional se definen de la siguiente manera.

Definición 2: Dado $\mathbf{T} = \{(x_i, y_i)\}_{i\in\mathbb{I}} \subseteq \mathcal{U}\times[0,1]$ y una partición difusa $\Delta = \{\Delta_1, \ldots, \Delta_n\}$ de $\mathcal{U}$, decimos que la n-tupla $\mathbf{F}_\Delta[\mathbf{T}] = [F_1, \ldots, F_n] \in [0,1]^n$ es la F-transformada directa de $\mathbf{T}$ con respecto a Δ si se cumple la igualdad

$$F_k = \frac{\sum_{i\in\mathbb{I}} y_i \Delta_k(x_i)}{\sum_{i\in\mathbb{I}} \Delta_k(x_i)} \tag{1}$$

No es difícil comprobar que la definición anterior extiende a la original [8] dada en el contexto de funciones, identificando la función $f\colon \mathcal{U}\to[0,1]$ con el subconjunto $\mathbf{T}_f = \{(x, f(x) \mid x\in\mathcal{U}\} \subseteq \mathcal{U}\times[0,1]$, i.e., $\mathbf{F}_\Delta[\mathbf{T_f}] = \mathbf{F}_\Delta[f]$. El siguiente resultado muestra que las componentes de la F-transformada directa coinciden con la solución de un problema de *mínimos cuadrados* ponderado por las funciones de la partición Δ.

Proposición 1: Dado $\mathbf{T} = \{(x_i, y_i)\}_{i\in\mathbb{I}} \subseteq \mathcal{U}\times[0,1]$ y una partición difusa $\Delta = \{\Delta_1, \ldots, \Delta_n\}$ de $\mathcal{U}$, la k-ésima componente de la F-transformada coincide con el mínimo de la función

$$\phi(z) = \sum_{i\in\mathbb{I}} (y_i - z)^2 \Delta_k(x_i) \tag{2}$$

A partir de la F-transformada directa, podemos definir la F-transformada inversa como se muestra a continuación.

Definición 3: Dado $\mathbf{T} = \{(x_i, y_i)\}_{i\in\mathbb{I}} \subseteq \mathcal{U}\times[0,1]$ y su F-transformada directa $\mathbf{F}_\Delta[\mathbf{T}] = [F_1, \ldots, F_n] \in [0,1]^n$ con respecto a Δ se define la F-transformada inversa de $\mathbf{T}$ con respecto a Δ como la función:

$$\mathbf{T}^F_\Delta(x) = \frac{\sum_{k=1}^n F_k \Delta_k(x)}{\sum_{k=1}^n \Delta_k(x)}. \tag{3}$$

Antes de proseguir, vamos a comentar algunos aspectos de la definición anterior. La F-transformada inversa es una función de $\mathcal{U}$ a $[0,1]$ independientemente de si $\mathbf{T}$ tiene estructura de función o no (i.e., tiene estructura de función si para todo $u\in\mathcal{U}$ existe $x\in[0,1]$ tal que $(u,x)\in\mathbf{T}$ y si además tenemos que dos tuplas (u,x) y (u,y) pertenecen a $\mathbf{T}$, entonces $x = y$). En segundo lugar, el dominio de la F-transformada inversa es todo $\mathcal{U}$ independientemente de si para cierto $u\in\mathcal{U}$ existen o no valores tales que $(u,y)\in\mathbf{T}$. Finalmente, como se muestra en el siguiente teorema (Teorema 1), la transformada inversa está estrechamente relacionada con la función que asigna a cada $u\in\mathcal{U}$ el valor medio de los valores $x_i\in[0,1]$ tales que $(u,x_i)\in\mathbf{T}$. Formalmente, definimos los conjuntos

$$D_u = \{x\in[0,1] \mid (u,x)\in\mathbf{T}\} \qquad \text{para cada } u\in\mathcal{U} \tag{4}$$

y

$$D_{\mathbf{T}} = \{u\in\mathcal{U} \mid \text{ tal que existe } (u,x)\in\mathbf{T}\} \tag{5}$$

Sobre el domino $D_{\mathbf{T}}$ definimos la función $m_{\mathbf{T}}(u)$ que asigna a cada $u\in D_{\mathbf{T}}$ el valor

$$m_{\mathbf{T}}(u) = \frac{\sum_{x_i\in D_u} x_i}{|D_u|} \tag{6}$$

donde $|D_u|$ denota la cardinalidad del conjunto D_u. Observe que $m_{\mathbf{T}}$ es la función que asigna a cada $u\in\mathcal{U}$ la media de todos los valores x_i tales que $(u,x_i)\in\mathbf{T}$.

Teorema 1: Para todo $\mathbf{T} = \{(u_i, x_i)\}_{i\in\mathbb{I}} \subseteq \mathcal{U}\times[0,1]$ existe una partición difusa Δ tal que

$$\mathbf{T}^F_\Delta(u) = m_{\mathbf{T}}(u),$$

donde $m_{\mathbf{T}}$ es la función definida en la Ecuación (6).

A partir del teorema anterior, podemos decir que la F-transformada inversa aproxima en cierto modo la función $m_{\mathbf{T}}$ que asigna a cada $u\in\mathcal{U}$ el valor medio de los valores $x_i\in[0,1]$ tales que $(u,x_i)\in\mathbf{T}$.

IV. Definiendo particiones condicionadas

A. Descripción del procedimiento

Vamos a considerar un universo $\mathcal{U}$ junto con dos atributos X e Y que poseen los elementos de $\mathcal{U}$. En la Sección II hemos visto cómo definir particiones difusas de $\mathcal{U}$ basándonos en la información de uno de los atributos X o Y. En esta sección vamos a presentar un método para definir una partición difusa en $\mathcal{U}$ basándonos en un atributo Y condicionado a la información que tenemos sobre otro atributo X. Por simplicidad en la exposición, vamos a definir particiones difusas con tres

clases, aunque el método puede extenderse fácilmente para el cálculo de particiones difusas con más clases.

Comenzamos asumiendo una partición difusa Δ de $\mathcal{U}$ acorde a los valores que toma el atributo X. Entonces, la coordenada F_k de la F-transformada directa de $\mathbf{T}_X = \{(u_i, Y(u_i))\}_{i\in\mathbb{I}} \subseteq \mathcal{U}\times[0,1]$ con respecto a Δ puede considerarse como la media del atributo Y para aquellos elementos de $\mathcal{U}$ que tienen el atributo X en Δ_k. De este modo, si queremos hacer una partición de tres clases para los elementos de $\mathcal{U}$ que tengan el atributo X en Δ_k, F_k es sin duda un buen candidato para ser el núcleo de la clase central, que representa los elementos con atributo Y medio. Para representar el resto de los valores del atributo Y que pueden considerarse *"medios"*, vamos a establecer una estimación, en forma de intervalo, para la dispersión de los datos a partir de la media ponderada dada por F_k. Los límites de dicho intervalo van a consistir en el cálculo de otras dos F-transformada directas, una para los valores del atributo Y que tienen valores superiores a la media F_k, y otro para los valores inferiores. La interpretación de este intervalo es similar al del rango intercuartílico pero a través de expectiles, en lugar de cuartíles.

Para ser más específicos, el procedimiento que se lleva a cabo para la definición de la partición condicionada es el siguiente:

1) Calculamos la F-transformada directa de
$$\mathbf{T}_Y = \{(u_i, Y(u_i))\}_{i\in\mathbb{I}}$$
con respecto a una partición difusa Δ_X definida acorde al atributo X;
2) Calculamos la F-transformada inversa $(\mathbf{T}_Y)^F_\Delta(x)$ de $\mathbf{T}_Y = \{(u_i, Y(u_i))\}_{i\in\mathbb{I}}$ con respecto a Δ_X;
3) Definimos los siguiente dos conjuntos:
$$\mathbf{T}^{\uparrow}_Y = \{(u_i, Y(u_i)) \mid Y(u_i) \geq (\mathbf{T}_Y)^F_\Delta(u_i)\}_{i\in\mathbb{I}}$$
$$\mathbf{T}^{\downarrow}_Y = \{(u_i, Y(u_i)) \mid Y(u_i) \leq (\mathbf{T}_Y)^F_\Delta(u_i)\}_{i\in\mathbb{I}}$$
4) Calculamos las F-transformadas directas
$$F_{\Delta_X}[\mathbf{T}^{\uparrow}_Y] \quad \text{y} \quad F_{\Delta_X}[\mathbf{T}^{\uparrow}_Y]$$
de los conjuntos $\mathbf{T}^{\uparrow}_Y$ y $\mathbf{T}^{\downarrow}_Y$ respectivamente;
5) En pos de una presentación más eficiente, vamos a denotar por
   - $F^{\uparrow}_k$ a la coordenada F_k en $F_{\Delta_X}[\mathbf{T}^{\uparrow}_Y]$;
   - $F^{\downarrow}_k$ a la coordenada F_k en $F_{\Delta_X}[\mathbf{T}^{\downarrow}_Y]$;
   - F^{*}_k a la coordenada F_k en $F_{\Delta_X}[\mathbf{T}_Y]$;

   Para cada $(\Delta_X)_k$, definimos la partición difusa $\Delta_Y \mid X_k$ definida por los siguiente tres conjuntos difusos:
   $\Delta_1 = trapezoidal(-\infty, -\infty, F^{\downarrow}_k, F^{*}_k)$
   $\Delta_2 = triangular(F^{\downarrow}_k, F^{*}_k, F^{\uparrow}_k)$
   $\Delta_3 = trapezoidal(F^{*}_k, F^{\uparrow}_k, \infty, \infty)$.

B. Ejemplo: generación de energía

Para mostrar el procedimiento de una forma clara, vamos a definir particiones difusas para la producción de energía condicionadas al momento del día al que dicha energía es generada. Para ello, utilizaremos la división temporal descrita en el Ejemplo 1 para el día; a saber, en *madrugada, mañana, mediodía, tarde* y *noche*. El objetivo es, por lo tanto, definir cinco particiones difusas acorde a la generación de energía teniendo en cuenta de si ésta se ha producido durante la *madrugada, mañana, mediodía, tarde* o *noche*.

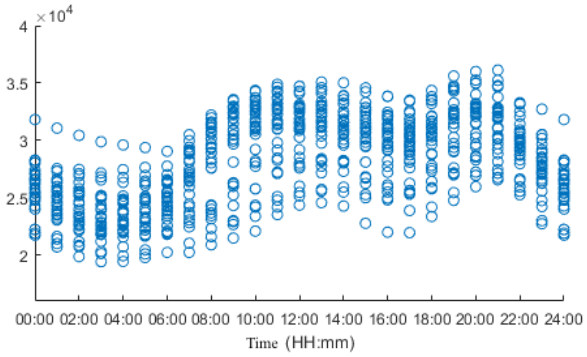


Figure 2. Nube de puntos de la energía generada en la zona peninsular de España durante enero del 2018.

Para llevar a cabo el ejemplo haremos uso de los datos disponibles en la página web del Ministerio de Energía, Turismo y Agenda Digital (`www..minetad.gob.es`) para la generación de energía en la zona peninsular de España durante el mes de enero del 2018. La generación viene dada por intervalos de una hora y la nube de puntos asociada a dicha base de datos viene dada en la Figura 2.

Los componentes de la F-transformada directa $\mathbf{F}_\Delta[\mathbf{T}]$ son:

$$F_1 = 23891\ MWh \qquad F_2 = 28802\ MWh$$
$$F_3 = 30826\ MWh \qquad F_4 = 29877\ MWh$$
$$F_5 = 29391\ MWh$$

Como ejemplo, para una interpretación más clara de los resultados obtenidos, el valor $F_2 = 28802\ MWh$ representa la media de la generación de energía durante *las mañanas* de enero del 2018. La correspondiente F-transformada inversa está dibujada en la Figura 3 junto con la subdivisión de los datos en dos clases: aquellos con valores superiores (azules en la figura y denotados por $\mathbf{T}^{\uparrow}$) e inferiores (rojos en la figura y denotados por $\mathbf{T}^{\downarrow}$) a la media dada por $\mathbf{F}_\Delta[\mathbf{T}]$, respectivamente.

Al calcular las correspondientes F-transformadas directas de $\mathbf{T}^{\uparrow}$ y de $\mathbf{T}^{\downarrow}$ obtenemos las componentes:

$$F^{\uparrow}_1 = 25834\ MWh \qquad F^{\uparrow}_2 = 31468\ MWh$$
$$F^{\uparrow}_3 = 32550\ MWh \qquad F^{\uparrow}_4 = 31804\ MWh$$
$$F^{\uparrow}_5 = 32105\ MWh$$

y

$$F^{\downarrow}_1 = 22411\ MWh \qquad F^{\downarrow}_2 = 25027\ MWh$$
$$F^{\downarrow}_3 = 27863\ MWh \qquad F^{\downarrow}_4 = 27129\ MWh$$
$$F^{\downarrow}_5 = 26754\ MWh$$

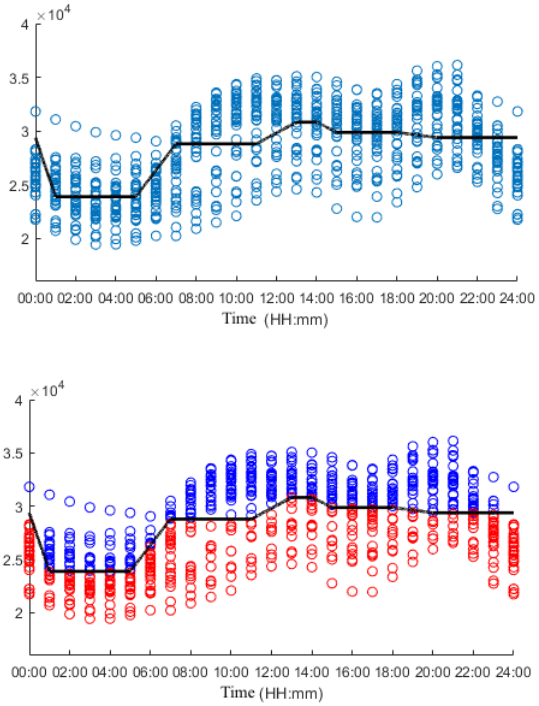


Figure 3. Transformada inversa de los datos de generación eléctrica junto con los dos conjuntos de datos $\mathbf{T}^{\uparrow}$ (azul) y $\mathbf{T}^{\downarrow}$ (rojo).

Las dos F-transformadas directas dadas justo arriba tienen una interpretación muy similar al rango intercuartílico pero en términos de expectativas. Específicamente, puesto que $\mathbf{T}^{\uparrow}$ y $\mathbf{T}^{\downarrow}$ representan las medias de los datos por encima y por debajo de la F-transformada inversa, que a su vez representa una media, es esperable que la mitad de los datos se encuentren entre $\mathbf{T}^{\uparrow}$ y $\mathbf{T}^{\downarrow}$. En concreto, en este ejemplo, podemos decir que esperamos que en la mayoría de las mañanas (Δ_2), la generación eléctrica se encuentre entre $F_2^{\downarrow} = 25027\ MWh$ y $F_2^{\uparrow} = 31468\ MWh$. Siguiendo esta línea, durante las mañanas podemos atribuir a los valores de la generación eléctrica menores a $25027\ MWh$ (resp. mayores a $31468\ MWh$) la etiqueta de *generación eléctrica baja* (resp. *generación eléctrica alta*). Tenemos, por lo tanto, cinco particiones difusas, una para cada conjunto de la partición Δ, en la que podemos establecer cuándo la generación eléctrica es alta, media o baja, condicionado al momento del día en que se esté considerando: *madrugada, mañana, mediodía, tarde* o *noche*. Dichas particiones vienen dadas como sigue:

Madrugadas:
$\Delta_1 = \text{trapezoidal } (-\infty, -\infty, 22411, 23891)$
$\Delta_2 = \text{triangular } (22411, 23891, 25834)$
$\Delta_3 = \text{trapezoidal } (23891, 25834, \infty, \infty)$

Mañanas:
$\Delta_1 = \text{trapezoidal } (-\infty, -\infty, 25027)$
$\Delta_2 = \text{triangular } (25027, 28802, 31468)$
$\Delta_3 = \text{trapezoidal } (28802, 31468, \infty, \infty)$

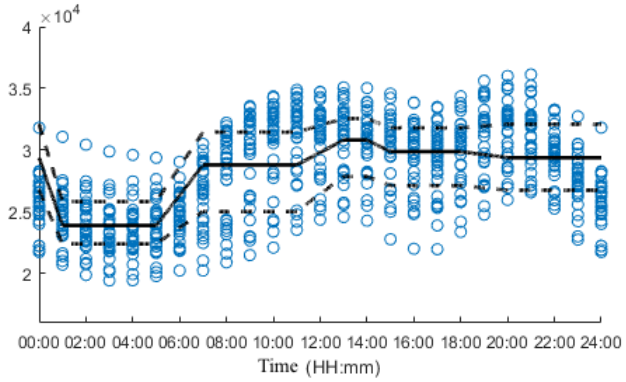


Figure 4. F-transformada inversa de $\mathbf{T}$, $\mathbf{T}^{\uparrow}$ y $\mathbf{T}^{\downarrow}$.

Mediodías:
$\Delta_1 = \text{trapezoidal } (-\infty, -\infty, 27863)$
$\Delta_2 = \text{triangular } (27863, 30826, 32550)$
$\Delta_3 = \text{trapezoidal } (30826, 32550, \infty, \infty)$

Tardes:
$\Delta_1 = \text{trapezoidal } (-\infty, -\infty, 27129)$
$\Delta_2 = \text{triangular } (27129, 29877, 31804)$
$\Delta_3 = \text{trapezoidal } (29877, 31804, \infty, \infty)$

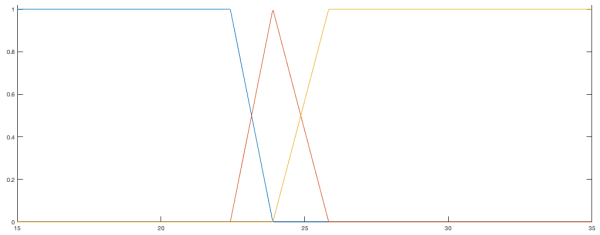
Noches:
Δ_1 trapezoidal $(-\infty, -\infty, 26754)$
Δ_2 triangular $(26754, 29391, 32105)$
Δ_3 trapezoidal $(29391, 32105, \infty, \infty)$

Las gráficas de las particiones difusas descritas arriba se exponen en la Figura 5. Obsérvese que lo que se considera *"generación eléctrica media"* es diferente en cada momento del día; de hecho, lo que se considera generación eléctrica *media* durante las mañanas, es una generación *baja* durante el mediodía. Además, en la Figura 4 mostramos las F-transformadas inversas de $\mathbf{T}$, $\mathbf{T}^{\uparrow}$ y $\mathbf{T}^{\downarrow}$. De este modo se puede apreciar de una manera más directa la relación entre los conjuntos difusos que definen la partición condicionada y los datos de partida.

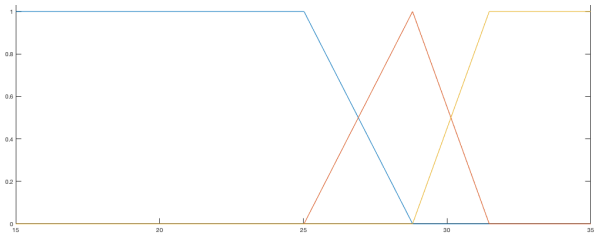
V. Conclusiones

En este trabajo hemos mostrado cómo definir particiones difusas condicionadas a la satisfacción de cierto atributo difuso. Para ello hemos recordado la metodología de las transformadas difusas y hemos mostrado mediante un ejemplo, cómo definir particiones difusas de tres clases en un contexto de la generación de energía.

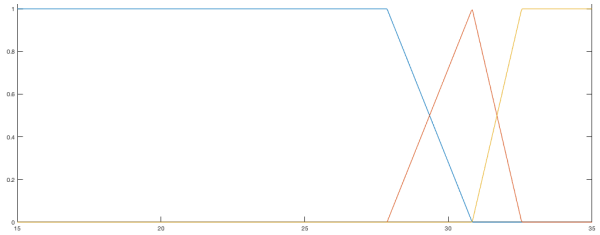
Como trabajo futuro, sería conveniente estudiar cómo definir particiones difusas siguiendo la idea subyacente de este trabajo para más de tres clases y/o utilizando diferentes metodologías a la transformadas difusas. Con un cariz más aplicado, sería interesante utilizar este tipo de particiones para definir reglas de inferencia.



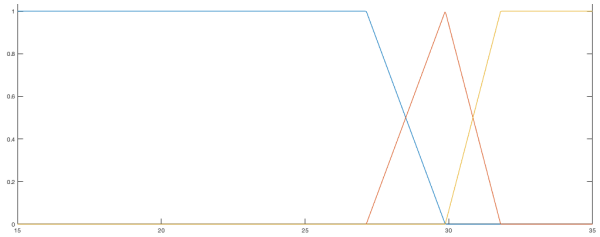
Partición para las madrugadas



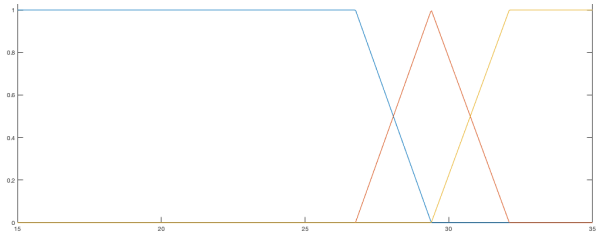
Partición para las mañanas



Partición para los mediodías



Partición para las tarde



Partición para las noche

Figure 5. Las gráficas de las cinco particiones difusas de la generación eléctrica condicionadas al momento del día considerado.

References

[1] Baczyaski, M., Beliakov, G., Sola, H. B., and Pradera, A. *Advances in Fuzzy Implication Functions*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013.

[2] Bezdek, J. C. Pattern Recognition with Fuzzy Objective Functions Algorithms. *Plenum Press, New York*, 1981.

[3] Bezdek, J. C., Ehrlich, R., and Full, W. Fcm: The fuzzy c-means clustering algorithm. *Computers & Geosciences 10*, 2, 191 – 203, 1984.

[4] Bouchon, B. and Cohen, C Partitions and fuzziness, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 116, 165–183, 1986.

[5] Butnariu, D. Additive fuzzy measures and integrals, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 93, 436–452, 1983.

[6] Hoppner, F., and Klawonn, F. Obtaining interpretable fuzzy models from fuzzy clustering and fuzzy regression. in *Fourth International Conference on Knowledge-Based Intelligent Engineering Systems and Allied Technologies,* 162–165, 2000.

[7] Madrid, N. An extension of f-transforms to more general data: Potential applications. *Soft Comput. 21*, 13, 3551–3565, 2017.

[8] Perfilieva, I. Fuzzy transforms: Theory and applications. *Fuzzy Sets and Systems 157*, 8, 993 – 1023, 2006.

[9] Perfilieva, I., Hurtík, P. Di Martino, F. and Sessa, S. Image reduction method based on the F-transform *Soft Computing*, 21(7), 1847 – 1861, 2017.

[10] Ruspini, E. H. A new approach to clustering, *Information and Control*, 15, 22–32, 1969.

XIX Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy (XIX ESTYLF)

ESTYLF 5: Sesión Especial: Soft Computing en Aprendizaje

Organizadores:

Mikel Galar, José Antonio Sanz

A PageRank-based method to extract fuzzy expressions as features in supervised classification problems*

*Note: The full contents of this paper have been published in the volume *Lecture Notes in Artificial Intelligence 11160* (LNAI 11160)

Pablo Carmona
Industrial Engineering School
University of Extremadura
Badajoz, Spain

Juan Luis Castro
Department of Computer Science and Artificial Intelligence
University of Granada
Granada, Spain

Jesús Lozano
Industrial Engineering School
University of Extremadura
Badajoz, Spain

José Ignacio Suárez
Industrial Engineering School
University of Extremadura
Badajoz, Spain

***Abstract*—This work presents a new ranking method inspired on PageRank to reduce the dimensionality of the feature space in supervised classification problems. More precisely, as it relies on a weighted directed graph, it is ultimately inspired on TextRank, a PageRank based method that adds weights to the edges to express the strength of the connections between nodes. The method is based on dividing each original feature used to describe the training set into a set of fuzzy predicates and then ranking all of them by their ability to differentiate among classes in the light of this training set. The fuzzy predicates with the best scores can be then used as new features, replacing the original ones. The novelty of the proposal relies on being an approach halfway between feature selection and feature extraction approaches, being able to improve the discrimination ability of the original features but preserving the interpretability of the new features in the sense that they are fuzzy expressions. Preliminary results supports the suitability of the proposal.**

***Index Terms*—fuzzy logic, supervised classification, ranking methods, feature selection, feature extraction, PageRank, TextRank**

Un estudio sobre el uso de diferentes familias de funciones de fusión para la combinación de clasificadores en la estrategia Uno-contra-Uno

M. Uriz, D. Paternain, H. Bustince, M. Galar
Departamento de Estadística, Informática y Matemáticas, *Universidad Pública de Navarra*,
Campus Arrosadía s/n, 31006 Pamplona, España
{mikelxabier.uriz, daniel.paternain, bustince, mikel.galar}@unavarra.es

***Resumen*—Es este trabajo estudiamos el uso de diferentes familias de funciones fusión para la combinación de clasificadores en un sistema de múltiples clasificadores formado por clasificadores Uno-contra-Uno (del inglés *One-vs-One*, OVO). OVO es una estrategia de descomposición usada para tratar los problemas de clasificación multi-clase, donde el problema original se divide en tantos problemas como pares de clases. En los sistemas de múltiples clasificadores se combinan los clasificadores que provienen de diferentes paradigmas como máquinas de vectores de soporte, algoritmos de inducción de reglas o árboles de decisión. En la literatura, se han desarrollado varios métodos de selección de clasificadores para este tipo de sistemas, donde se busca el clasificador más adecuado para cada par de clases. En este trabajo consideramos el problema desde una perspectiva diferente, con el objetivo de analizar el comportamiento de diferentes familias de funciones fusión para combinar los clasificadores. De hecho, un sistema de múltiples clasificadores OVO puede verse como un problema de toma de decisión multi-experto. En este contexto, para las funciones de fusión que dependen de pesos o medidas difusas, proponemos obtener los parámetros necesarios a partir de los datos. Apoyados en un fuerte análisis experimental, mostramos que la función de fusión utilizada es un factor clave en el sistema final. Además, aquellas funciones basadas en pesos o en medidas difusas pueden permitir modelar mejor el problema de agregación.**

***Index Terms*—Agregaciones, Funciones de fusión, clasificación, One-vs-One, Sistema de múltiples clasificadores**

I. Introducción

En aprendizaje automático, la clasificación consiste en aprender una función (clasificador) utilizando datos etiquetados capaz de asignar la etiqueta correcta a nuevos patrones. Entre los problemas de clasificación se pueden considerar dos escenarios dependiendo del número de clases a distinguir: binario (2 clases) y problemas multi-clase. La clasificación multi-clase generalmente es más difícil ya que la asignación de las fronteras de decisión se vuelve más compleja. Una posible solución para hacer frente a esta dificultad es utilizar estrategias de descomposición [1], donde se divide el problema multi-clase original en problemas binarios más fáciles de resolver. Evidentemente, esta simplificación en la fase de aprendizaje conlleva un coste en la fase de combinación, donde las salidas de todos los clasificadores que se han aprendido en cada nuevo sub-problema deben ser combinados.

Una de las estrategias de descomposición más utilizada es *One-vs-One* (OVO). En OVO, se crean tantos sub-problemas nuevos como pares de clases diferentes, y cada sub-problema es abordado por un clasificador base independiente. Las nuevas instancias son clasificadas sometiéndolas a todos los clasificadores base, donde se combinan sus salidas. Un ventaja importante de esta técnica es que generalmente funciona mejor incluso cuando el clasificador subyacente es capaz de abordar el problema multi-clase directamente [2].

En este trabajo, nos centramos en la estrategia OVO y más específicamente en la fase de combinación de los Sistemas de Múltiples Clasificadores (SMC) formados por clasificadores OVO. Un SMC es un conjunto formado por clasificadores provenientes de diferentes paradigmas de aprendizaje [3]. En el caso de OVO, la idea es que clasificadores diferentes pueden adaptar mejor la clasificación de cada par de clases. Por esta razón, varios trabajos previos han considerado la selección del mejor clasificador para cada par de clases en los SMC [4], [5]. En este trabajo, nuestro objetivo es abordar este problema como un problema de toma de decisión multi-experto, donde tenemos los diferentes expertos (tipos de clasificadores) y sus matrices de confianza para las alternativas consideradas (clases). En este contexto, queremos estudiar la influencia de las funciones de fusión consideradas para combinar las matrices de los diferentes expertos en una única.

En las últimas décadas, el estudio de las funciones de agregación ha crecido significativamente, ya que la necesidad de fusionar o agregar información cuantitativa surge en casi todas las aplicaciones [6], [7], [8], [9]. Sin embargo, en los últimos años, se han propuesto nuevas extensiones de las funciones de agregación, que son capaces de modelar la interacción entre los datos de una mejor manera a pesar de que las propiedades clásicas exigidas a las agregaciones, como la monotonía, no se satisfagan [10], [11]. Desde un punto de vista amplio, estas extensiones se llaman funciones de fusión[12].

Uno de los ejemplos de funciones de fusión que son capaces de modelar la importancia de las entradas o de las interacciones entre ellas son la integral discreta de Choquet [13] y sus extensiones [10], que están basadas en medidas difusas. En este trabajo, proponemos construir estas medidas directamente del conocimiento que podemos extraer de los expertos (clasificadores) utilizando los datos de entrenamiento.

Para realizar este estudio, utilizamos veintiocho conjuntos de datos de KEEL [14] y consideramos el uso de test es-

tadísticos no paramétricos para analizar los resultados obtenidos [15]. Dado que estamos tratando con conjuntos de datos de múltiples clases, no consideraremos solo la precisión para evaluar los resultados, sino que también utilizaremos otras métricas que se centran en la correcta clasificación de todas las clases, como el promedio de precisiones o la media geométrica. Desarrollaremos un estudio jerárquico, donde consideraremos comparaciones intra e inter-familiares para analizar el uso de las diferentes funciones de fusión.

La estructura del artículo es la siguiente. En la sección 2, se recuerdan las diferentes funciones de fusión consideradas en este trabajo. La sección 3 contiene una introducción a la descomposición de los problemas multi-clase, la estrategia OVO y el SMC formado por clasificadores OVO. En la sección 4, describimos con detalle el marco experimental considerado en este estudio, incluyendo como establecer los parámetros de las funciones de fusión parametrizables. La sección 5 contiene el análisis de los resultados obtenidos. Finalmente, en la Sección 6 mostramos las conclusiones obtenidas del estudio.

II. Funciones de fusión

En la literatura reciente, la agregación de información cuantitativa se ha abordado mediante el uso de las funciones de agregación. Una función de agregación se define como una función $f : [0,1]^n \to [0,1]$ (el intervalo $[0,1]$ puede ser extendido a cualquier otro intervalo) tal que $f(0,\ldots,0) = 0$, $f(1,\ldots,1) = 1$, satisfaciendo la propiedad de monotonía, es decir, si $x_i \leq y_i$ para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$, entonces $f(x_1,\ldots,x_n) \leq f(y_1,\ldots,y_n)$ [6], [7], [8], [9]. De acuerdo a [6], [7], las principales clases de funciones de agregación son las siguientes: promedios (o medias), conjuntivas, disyuntivas y mixtas. En este trabajo nos hemos centrado principalmente (pero no exclusivamente) en las funciones de agregación promedio, aquellas que están acotadas por el mínimo y el máximo de las entradas.

Sin embargo, en los últimos dos años la propiedad de monotonía de las funciones de agregación se ha visto innecesaria en algunas aplicaciones e incluso se ha generalizado a nuevos tipos de monotonía (ver por ejemplo [12]). A partir de estos estudios, se han definido nuevos conceptos como el de función de pre-agregación [10] o función de fusión interna [11]. Dado que en este artículo modelamos la agregación de datos desde un amplio punto de vista y utilizamos varias funciones no monótonas, hemos utilizado la definición más general de funciones de fusión (ver [12]).

Para clasificar el gran número de funciones de fusión consideradas en este trabajo, hemos establecido una clasificación basada en la necesidad de definir pesos o medidas asociadas a ellas. Básicamente hemos considerado: funciones de fusión no ponderadas, funciones de fusión ponderadas y funciones de fusión basadas en medidas.

Funciones de fusión no ponderadas En esta sub-sección consideramos varias funciones de agregación clásicas:

- La media aritmética $AM(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{n}(x_1,\ldots,x_n)$;
- La mediana

$$MED(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(x_{(k)} + x_{(k+1)}\right) & \text{si } n = 2k \text{ es par,} \\ x_{(k)} & \text{si } n = 2k-1 \text{ es impar,} \end{cases}$$

  donde $x_{(k)}$ es el k elemento más largo (más pequeño) de $x_1,\ldots,x_n$;
- La media geométrica $GM(x_1,\ldots,x_n) = (\prod_{i=1}^n x_i)^{\frac{1}{n}}$;
- La media armónica $HM(x_1,\ldots,x_n) = n\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}\right)^{-1}$.

Funciones de fusión ponderadas En esta sub-sección consideramos funciones de agregación cuyo comportamiento es modelado por un vector de pesos. Esto quiere decir que no todas las entradas son igualmente importantes para calcular el valor agregado, un hecho que claramente nos permite incorporar cierta información externa para el proceso de fusión. Consideramos los vectores de pesos $w = (w_1,\ldots,w_n)$ que satisfagan $w_i \in [0,1]$ y $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ [6], [7].

Las funciones de agregación ponderadas son:

- Media aritmética ponderada $WAM(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^n w_i x_i$;
- Operador OWA $OWA(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^n w_i x_{(i)}$, donde $(.)$ es una permutación tal que $x_{(1)} \geq \cdots \geq x_{(n)}$.

Funciones de fusión basadas en medidas En esta sub-sección consideramos el conjunto de funciones de fusión basadas en medidas difusas. A diferencia de las funciones de fusión ponderadas, las cuales te permiten modelar la importancia de cada entrada individual, el uso de las medidas difusas nos permiten modelar de manera más general la interacción entre las entradas. En este sentido, la importancia no solo se da a cada entrada individual sino que se asigna también a colecciones (grupos o coaliciones) de entradas. Obviamente, la construcción de la medida difusa es el punto clave para esta familia de funciones de fusión.

Definition 1: Sea $\mathcal{N} = \{1,\ldots,n\}$. Una medida difusa discreta es una función $m : 2^{\mathcal{N}} \to [0,1]$ monótona, es decir, $m(S) \leq m(T)$ siempre que $S \subseteq T$ y satisfaga $m(\emptyset) = 0$ y $m(\mathcal{N}) = 1$.

Una vez visto el concepto de medida difusa podemos definir la integral de Choquet, que es un ejemplo destacado de operador promedio basado en medidas. Empezamos considerando una permutación σ tal que $x_{\sigma(1)} \leq \cdots \leq x_{\sigma(n)}$ con la convención $x_{\sigma(0)} = 0$:

- La integral discreta de Choquet

$$Ch(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^n (x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(i-1)}) * m(\{\sigma(i),\ldots,\sigma(n)\})$$

Como hemos mencionado antes, en [10] se proponen extensiones de las agregaciones, llamados funciones de pre-agregación. Uno de los métodos mas sencillos para construir las pre-agregaciones es cambiando ciertas operaciones en la integral de Choquet. Hemos considerado las siguientes funciones de pre-agregación:

- Integral de Choquet basada en la t-norma mínimo

$$Ch_M(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^n \text{mín}\{x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(i-1)}, m(\{\sigma(i),\ldots,\sigma(n)\})\};$$

- Integral de Choquet basada en la t-norma de Lukasiewicz

$$Ch_L(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\text{máx}\{0,x_{\sigma(i)}-x_{\sigma(i-1)}+m(\{\sigma(i),\ldots,\sigma(n)\})-1\}$$

III. One-vs-One para problemas multi-clase y sistemas de múltiples clasificadores

En esta sección introducimos los problemas de clasificación y, más específicamente, la estrategia One-vs-One (OVO) para tratar los problemas de clasificación multi-clase y los sistemas de múltiples clasificadores con el objetivo de mejorar el rendimiento de la clasificación mediante la combinación de varios clasificadores.

En aprendizaje automático, un problema de clasificación consiste en aprender un sistema (clasificador) capaz de predecir la salida deseada (etiqueta) para cada patrón de entrada. Formalmente, el objetivo es buscar un función $\mathbb{A}^i \rightarrow \mathbb{C}$ donde $a_1,\ldots,a_i \in \mathbb{A}$ son los atributos que caracterizan cada ejemplo de entrada $x_1,\ldots,x_n$ y cada entrada tiene asociada la salida deseada $y_j \in \mathbb{C} = \{c_1,\ldots,c_m\}$. Se espera que el clasificador generalice bien a nuevos ejemplos del problema que no se han considerado en el entrenamiento, esto es, debería tener una buena habilidad de generalización.

Un problema de clasificación multi-clase se da cuando el número de clases es mayor que dos ($|\mathbb{C}| > 2$). Estos problemas se consideran mas difíciles que los problemas de clasificación binarios dado que las fronteras de decisión son generalmente más complejas y existe un mayor solapamiento entre clases. Es por esto que se crearon las estrategias de descomposición [1], para tratar con los problemas de clasificación multi-clase dividiendo el problema original en problemas de clasificación binarios más fáciles de resolver. Por lo tanto, se aprende un clasificador binario por cada nuevo problema, conocidos como clasificadores base, y se combinan las salidas de estos clasificadores cuando se quiere clasificar un nuevo ejemplo no etiquetado. Se ha probado que estas estrategias no son solo útiles cuando se trabaja con clasificadores que solo soportan problemas binarios (como las maquinas de vectores de soporte, SVM [16]), sino que también con clasificadores que soportan la clasificación multi-clase. En estos casos, el rendimiento final se puede mejorar descomponiendo el problema [2].

III-A. La estrategia One-Vs-One

La estrategia OVO es la estrategia de descomposición más utilizadas. En OVO, se divide un problema con m clases en tantos problemas como posibles pares de clases haya, generando $m(m-1)/2$ sub-problemas que son abordados mediante clasificadores base independientes. En cada sub-problema, solo se consideran los ejemplos que pertenezcan al par de clases considerado, descartando el resto. A la hora de clasificar un nuevo ejemplo, se somete éste a todos los clasificadores cuyas salidas tienen que ser combinadas para decidir la clase final. Para realizar la combinación, generalmente se almacenan todas las salidas en una matriz de confianza (Eq. 1) donde cada posición $r_{ij}, r_{ji} \in [0,1]$ corresponde al grado de confianza del clasificador distinguiendo las clases $\{C_i, C_j\}$. Dado que la mayoría de clasificadores devuelven la confianza basada en estimaciones de probabilidad, generalmente r_{ji} se calcula como $r_{ji} = 1 - r_{ij}$. Sin embargo, si este no es el caso, como ocurre con los clasificadores basados en reglas difusas [17], la matriz de confianza se normaliza para que $r_{ij} + r_{ji} = 1$ [17].

$$R = \begin{pmatrix} - & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ r_{21} & - & \cdots & r_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & - \end{pmatrix} \quad (1)$$

Finalmente, se combinan las salidas de los clasificadores base por cada fila (clase) y se asigna la clase que consiga la mayor confianza total. En la literatura, se han desarrollado varias estrategias de combinación para este propósito. Se realizó una completa revisión en [2] y se han desarrollado varias extensiones de combinación considerando la selección de clasificadores y el mecanismo de ponderación [18], [19]. En este trabajo, consideramos la estrategia del voto ponderado (WV) [20] ya que se ha demostrado que es un método simple y robusto. En este método, cada clasificador base vota por ambas clases basándose en la confianza dada por el par de clases. Finalmente, se devuelve la clase con mayor valor

$$Class = arg \max_{i=1,\ldots,m} \sum_{1 \le j \ne i \le m} r_{ij}. \quad (2)$$

III-B. Sistema de Múltiples clasificadores y OVO

La estrategia OVO se puede ver como un modelo ensemble [2], donde se utiliza una combinación de clasificadores con el objetivo de mejorar los resultados de un único clasificador. Este término se considera generalmente para describir la combinación de variantes menores del mismo clasificador. De otra manera, un sistema de múltiples clasificadores (SMC) es una categoría más amplia incluyendo esas combinaciones considerando el uso de diferentes modelos de clasificación [3].

Recientemente, se han considerado varios trabajos centrados en la hibridación de ensembles OVO (donde se utiliza el mismo clasificador base para cada sub-problema, p. ej. SVM) con SMC. Esto es, para construir varios ensembles OVO con diferentes clasificadores (por ejemplo, uno utilizado SVM, otro utilizando métodos de inducción de reglas y otro utilizando árboles de decisión) y para combinar las salidas de todos los ensembles OVO para tomar la decisión final.

Otros trabajos se han centrado en seleccionar estática o dinámicamente el mejor clasificador para distinguir cada par de clases [4], [5]. Sin embargo, nuestro objetivo en este trabajo es ver el problema desde un perspectiva diferente para probar el uso de diferentes funciones de fusión en la combinación de los diferentes clasificadores.

Una vez que se han entrenado todos los clasificadores OVO del SMC (asumiendo que teniendo tres clasificadores diferentes y un problema de cuatro clases, tendríamos $3 \cdot 4 \cdot (4-1)/2$ clasificadores), se clasifica un nuevo ejemplos sometiéndolo a todos los clasificadores. Como resultado, en vez de obtener una única matriz de confianza, tendríamos tantas matrices como clasificadores considerados (tres en nuestro ejemplo). El problema es cómo combinar estas matrices en una única donde podamos aplicar la estrategia WV para clasificar el ejemplo. Es por esto que podemos entender el problema como un problema

de toma de decisión multi-experto. Nuestra propuesta en este trabajo es combinar las diferentes matrices de confianza utilizando las funciones de fusión. Nuestro objetivo es estudiar cómo el uso de diferentes funciones de fusión afecta al rendimiento del SMC. Para ello, consideraremos las diferentes funciones de fusión mencionadas en la sección anterior y propondremos diferentes mecanismos para asignar los pesos o crear las medidas difusas en las funciones que requieran estos parámetros. Más detalles acerca de la obtención de dichos parámetros se dan en la Sección IV-B.

IV. Marco experimental

IV-A. Datasets, evaluación, test estadísticos y algoritmos

Para llevar a cabo el estudio experimental, hemos utilizado veintiocho conjuntos de datos numéricos del repositorio de datos de KEEL [14], cuyas características principales se muestran en la Tabla I.

Tabla I
Resumen de las características de los conjuntos de datos utilizados en el estudio experimental.

Dataset	#Ej.	#Atr.	#Clas.	Dataset	#Ej.	#Atr.	#Clas.
autos	159	25	6	nursery	1296	8	5
balance	625	4	3	pageblocks	548	10	5
car	1728	6	4	penbased	1100	16	10
cleveland	297	13	5	satimage	643	36	7
contraceptive	1473	9	3	segment	2310	19	7
dermatology	358	34	6	shuttle	2175	9	7
ecoli	336	7	8	splice	319	60	3
flare	1066	11	6	tae	151	5	3
glass	214	9	7	thyroid	720	21	3
hayes-roth	132	4	3	vehicle	846	18	4
iris	150	4	3	vowel	990	13	11
led7digit	500	7	10	wine	178	13	3
lymphography	148	18	4	yeast	1484	8	10
newthyroid	215	5	3	zoo	101	16	7

El resultado de cada método y conjunto de datos se ha obtenido utilizando validación cruzada con 5 particiones. Además, para analizar apropiadamente los resultados obtenidos, hemos aplicado test estadísticos no paramétricos[15]. Más específicamente, hemos utilizado el test de Wilcoxon para comparar un par de métodos, mientras que se considera el test de rangos alineados de Friedman para comparar un grupo de métodos con el objetivo de detectar si existen diferencias estadísticas. En tal caso, se utiliza el test *post-hoc* de Holm para buscar los algoritmos que rechazan la hipótesis nula de equivalencia frente al método de control seleccionado.

Dado que estamos tratando con problemas multi-clase, hemos considerado tres medidas de rendimiento para analizar los resultados obtenidos: el ratio de precisión (Acc), esto es, el ratio de los ejemplos clasificados correctamente; media aritmética (AvgAcc) y media geométrica (GM) de los ratios de los ejemplos correctamente clasificados por cada clase. Por lo tanto, Acc nos da un medida global de la calidad del algoritmo, mientras que AvgAcc y GM se centran más en medir apropiadamente si todas las clases del problema se están clasificando apropiadamente.

Respecto a los algoritmos de clasificación considerados para formar nuestro SMC, hemos considerado los siguientes (los cuales también fueron considerados en nuestros trabajos previos [2], [18], [19]): *Support Vector Machine* (SVM) [16], *C4.5 decision tree* [21], *k−Nearest Neighbors* (*k*NN) [22], *Repeated Incremental Pruning to Produce Error Reduction* (Ripper) [23], *Positive Definite Fuzzy Classifier* (PDFC)[24].

Estos clasificadores se han entrenado utilizando los parámetros mostrados en la Tabla II. Estos valores son comunes para todos los problemas, y se han seleccionado de acuerdo a las recomendaciones de los autores correspondientes, que son sus valores por defecto incluidos en KEEL, software [14] utilizado para realizar nuestros experimentos.

Tabla II
Especificación de los parámetros para los clasificadores base utilizados en la experimentación.

Algoritmo	*Parámetros*
SVM_{Poly}	C = 1.0, Tolerance Parameter = 0.001, Epsilon = 1.0E-12, Kernel Type = Polynomial Polynomial Degree = 1, Fit Logistic Models = True
SVM_{Puk}	C = 100.0, Tolerance Parameter = 0.001, Epsilon = 1.0E-12, Kernel Type = Puk PukKernel ω = 1.0, PukKernel σ = 1.0, Fit Logistic Models = True
C4.5	Prune = True, Confidence level = 0.2, Minimum number of item-sets per leaf = 2
3NN	$k = 3$, Distance metric = HVDM
Ripper	Size of growing subset = 66 %, Repetitions of the optimization stage = 2
PDFC	C = 100.0, Tolerance Parameter = 0.001, Epsilon = 1.0E-12, Kernel Type = Polynomial Polynomial Degree = 1, PDRF Type = Gaussian

Debemos recordar que las matrices de confianza representan las confianzas obtenida de los clasificadores. Dado que no todos los clasificadores devuelven la confianza directamente, detallamos cómo se han obtenido.

- **SVM –** Estimación de la probabilidad de la SVM
- **C4.5 –** Precisión de la hoja realizando la predicción (ejemplos de entrenamiento bien clasificados divido por el número total de ejemplos de entrenamiento cubiertos).
- ***k*NN –** Confianza basada en distancia.$Confianza = \frac{\sum_{l=1}^{k} \frac{e_l}{d_l}}{\sum_{l=1}^{k} \frac{1}{d_l}}$ Donde d_l es la distancia entre el patrón de entrada y el vecino l y $e_l = 1$ si el vecino l es de la clase y 0 en otro caso.
- **Ripper –** Precisión de la regla utilizada en la predicción (como en C4.5 considerando reglas en vez de hojas).
- **PDFC –** La predicción del clasificador, esto es, la confianza es 1 para la clase predicha.

IV-B. Parámetros para las funciones de fusión

En lo sucesivo presentamos el método para estimar los parámetros requeridos por algunas funciones de fusión.

Cálculo de pesos Para la media aritmética ponderada necesitamos establecer los pesos para cada entrada (clasificador, p. ej., SVM, 3NN, ...). Establecemos cada peso como la precisión normalizada de cada método en el conjunto de entrenamiento, esto es, $w_i = \frac{Acc_i}{\sum_{j=1}^{n} Acc_j}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Además, hemos utilizado dos versiones diferentes para las funciones de fusión ponderadas: un enfoque global y otro local. En el enfoque global, asignamos un peso a cada clasificador. Sin embargo, en el enfoque local, cada clasificador obtiene un peso por cada problema individual (precisión sobre cada par de clases).

El cálculo de los pesos para los operadores OWA se realiza mediante el uso de cuantificadores difusos crecientes (ver [25]), y son dados por $w_i = Q\left(\frac{i}{n}\right) - Q\left(\frac{i-1}{n}\right)$ para

todo $i \in \{1,\ldots,n\}$. En este trabajo hemos considerado 3 cuantificadores difusos diferentes obteniendo tres operadores OWA: 'al menos la mitad' (OWA_alh) con $a = 0, b = 0{,}5$; 'la mayor cantidad posible' (OWA_amap) con $a = 0{,}5, b = 1$; y 'la mayoría de' (OWA_mot) con $a = 0{,}3, b = 0{,}8$.

Valores de la medida difusa Para las funciones de fusión basadas en medidas, necesitamos construir una medida difusa $m : 2^{\mathscr{N}} \to [0,1]$ con $\mathscr{N} = \{1,\ldots,n\}$, siendo n el número de clasificadores considerados. Empezamos considerando la medida difusa uniforme m_U la cual se construye con $m_U(A) = \frac{|A|}{n}$ para todo $A \subseteq \mathscr{N}$ (la integral de Choquet con esta medida equivale a la media aritmética).

Sin embargo, para capturar las interacciones entre clasificadores, utilizaremos no solo la precisión de los clasificadores individuales sino también la precisión de cada posible combinación de clasificadores. Denotaremos estas precisiones como Acc_A, para todo $A \subseteq \mathscr{N}$. Ahora, por cada nivel de la medida difusa (todos los elementos de la medida difusa con la misma cardinalidad), calculamos la media aritmética de las precisiones en cada nivel correspondiente, llamándola $MeanAcc_i$ para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$. Finalmente, el valor de la medida difusa para cada $A \subseteq \mathscr{N}$ vendrá dado por

$$m(A) = m_U(A)(1 + Acc_A - MeanAcc_{|A|}). \tag{3}$$

Analizando esta expresión, el valor de la medida difusa asociado a los clasificadores que son mejores que la precisión media en el mismo nivel aumentarán (respecto a la medida uniforme) y el valor de aquellos que son peores decrementarán. De manera similar al cálculo anterior de pesos, consideraremos un enfoque global y otro local.

Es importante hacer notar que no podemos garantizar la monotonía de m para todo posible valor de Acc y $MeanAcc$. Para corregir esto, y basándonos en la verificación de monotonía dada en [26], hemos utilizado una corrección top-down: empezamos en el nivel superior de la medida $m(\mathscr{N})$ y vamos evaluando los valores de la medida en los niveles inferiores $m(A)$ donde $|A| = n-1$. Si encontramos algún A tal que $m(A) > m(\mathscr{N})$, entonces establecemos $m(A) = m(\mathscr{N})$. Una vez que el nivel $n-1$ es verificado (con respecto al nivel n), verificamos el nivel $n-2$ con respecto al nivel $n-1$. Repetimos este proceso hasta que la medida satisfaga el criterio de monotonía.

V. Estudio experimental

Por un lado, la Tabla III muestra las precisiones (Acc), la media aritmética (AvgAcc) y la media geométrica (GM) de las precisiones de cada clase obtenidas sobre el conjunto de test utilizando diferentes funciones de fusión para combinar las matrices OVO en el SMC. El mejor resultado de cada métrica esta subrayado.

Por otro lado, la Figura 1 resume el estudio estadístico llevado a cabo para cada métrica de rendimiento para analizar cuál es la función de fusión que mejor funciona en cada caso. Para crear esta figura, hemos enfrentada las funciones dentro de cada familia utilizando el test de rangos alineados de Friedman. Luego, se comparan los mejores de cada familia en una etapa final que nos da la mejor función de fusión. En cada comparación, mostramos los rangos obtenidos por cada método (cuanto menor, mejor) y marcamos con **negrita** los rangos en los que el test post-hoc detecta diferencias significativas (con $\alpha = 0{,}1$) en favor del método ganador.

Tabla III
Resultados medios obtenidos en todos los conjuntos de test con diferentes funciones de fusión para cada métrica de rendimiento

Family	Fusion	Acc	AvgAcc	GM
Unweighted	AM	0.8544	0.7911	0.6240
	MED	0.8580	0.7951	0.6332
	GM	0.8285	0.7535	0.5588
	HM	0.8252	0.7515	0.5610
Weighted	WAM	0.8544	0.7916	0.6308
	WAM_local	0.8481	0.7893	0.6344
	OWA_alh	0.8573	0.7996	0.6448
	OWA_amap	0.8496	0.7815	0.6073
	OWA_mot	0.8554	0.7921	0.6254
Choquet	Ch	0.8552	0.7940	0.6305
	Ch_local	0.8541	0.7924	0.6334
	Ch_L	0.8487	0.7789	0.6087
	Ch_L_local	0.8502	0.7803	0.6088
	Ch_M	0.8548	0.7939	0.6395
	Ch_M_local	0.8556	0.7964	0.6397

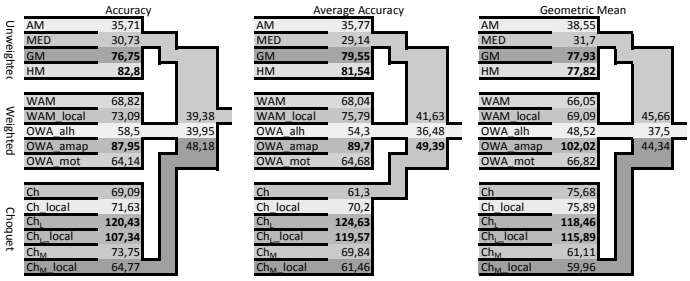


Figura 1. Estudio estadístico jerárquico comparando las funciones de fusión en cada familia y la mejor de cada familia para cada medida de rendimiento utilizando el test de rangos alineados de Friedman.

Finalmente, completamos el análisis estadístico comparando la media aritmética (AM, función comúnmente utilizada) con el ganador de cada familia. Estas comparaciones se muestran en la Tabla IV, donde se muestra el p-valor de la comparación y si existen o no diferencias estadísticas en **negrita**.

Tabla IV
Comparación de la AM contra las mejores funciones de cada familia utilizando el test de Wilcoxon.

Perf. Measure	Unweighted	Weighted	Choquet
Acc	MED	OWA_alh	Ch_M_local
	0.0152	**0.0298**	0.7610
AvgAcc	MED	OWA_alh	Ch
	0.0194	**0.0126**	**0.0994**
GM	MED	OWA_alh	Ch_M_local
	0.0169	**0.0036**	**0.0400**

Viendo estos resultados, podemos observar los siguientes hechos:

- Analizando los resultados por cada familia, vemos que dentro de las funciones no ponderadas, AM y MED son

las que mejores resultados obtienen. Viendo los test de Wilcoxon vemos que MED supera estadísticamente a AM en las tres las medidas de rendimiento.
Analizando las funciones ponderadas, OWA_alh es la que mejor funciona, aunque solo existen diferencias estadísticas con respecto a OWA_amap. Esto es posible debido a que dicho OWA actúa como el promedio de los tres clasificadores más competitivos. En este caso, obtener los pesos de los datos (WAM y su versión local) obtiene peores resultados que estableciendo los pesos de manera predefinida. Finalmente, en cuanto a las funciones basadas en medidas difusas, las pre-agregaciones que utilizan el mínimo son mejores en casi todos los casos, mostrando robustez frente a la medida de rendimiento considerada (aunque no se encuentran diferencias estadísticas)
Se podrían esperar mejores resultados en los casos donde los parámetros se obtienen de los datos. Aunque no se han encontrado diferencias estadísticas con respecto a la WAM y a la Choquet, en el futuro nuestro objetivo es centrarnos en estas funciones e intentar mejorar el modelado de los parámetros para ser más competitivos. De hecho, los operadores OWA son un caso particular de la integral de Choquet y, por lo tanto, parece razonable poder obtener una medida difusa que por lo menos llegue al comportamiento de cualquier OWA.

- Finalmente, analizando la Tabla IV se puede ver que la función comúnmente utilizada (AM) es superada estadísticamente por la MED y la OWA_alh en todos los casos y por la Choquet en los casos de AvgAcc y GM. Por lo tanto, existe un margen de mejora considerando diferente funciones de fusión.

VI. Conclusiones

En este trabajo, hemos considerado un SMC formado por clasificadores OVO y hemos enfocado la fase de combinación como un problema de toma de decisión multi-experto. En consecuencia, hemos desarrollado un estudio empírico completo para analizar el comportamiento de las diferentes funciones de fusión. También hemos propuesto diferentes formas de obtener los parámetros para las funciones ponderadas y basadas en medias difusas utilizando los datos. Aunque se esperarían mejores resultados para ese tipo de funciones, los operadores OWA son los que mejores resultados obtienen. Dado que los OWA son un caso particular de medida difusa, se motiva un estudio para construir las medidas difusas de diferentes maneras para mejorar la calidad de sus resultados.

Agradecimientos.: Este trabajo ha sido apoyado en parte por el Ministerio Español de Ciencia y Tecnología bajo el Proyecto TIN2016-77356-P (AEI/FEDER, UE).

Referencias

[1] A. C. Lorena, A. C. Carvalho, and J. M. Gama, "A review on the combination of binary classifiers in multiclass problems," *Artificial Intelligence Review*, vol. 30, no. 1-4, pp. 19–37, 2008.

[2] M. Galar, A. Fernández, E. Barrenechea, H. Bustince, and F. Herrera, "An overview of ensemble methods for binary classifiers in multi-class problems: Experimental study on one-vs-one and one-vs-all schemes," *Pattern Recognition*, vol. 44, no. 8, pp. 1761 – 1776, 2011.

[3] T. K. Ho, J. J. Hull, and S. N. Srihari, "Decision combination in multiple classifier systems," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 16, no. 1, pp. 66–75, 1994.

[4] S. Kang, S. Cho, and P. Kang, "Multi-class classification via heterogeneous ensemble of one-class classifiers," *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, vol. 43, pp. 35–43, 2015.

[5] I. Mendialdua, J. M. Martínez-Otzeta, I. Rodriguez-Rodriguez, T. Ruiz-Vazquez, and B. Sierra, "Dynamic selection of the best base classifier in One versus One," *Knowledge-Based Systems*, vol. 85, pp. 298–306, 2015.

[6] G. Beliakov, A. Pradera, and T. Calvo, *Aggregation Functions: A Guide for Practitioners*. Springer, 2007.

[7] G. Beliakov, H. Bustince, and A. Pradera, *A Practical Guide to Averaging Functions*, 2nd ed. Springer, 2015.

[8] T. Calvo, G. Mayor, and R. Mesiar, *Aggregation Operators. New Trends and Applications*. Physica-Verlag, 2002.

[9] M. Grabisch, J. L. Marichal, R. Mesiar, and E. Pap, *Aggregation Functions*. Cambridge University Press, 2009.

[10] G. Lucca, J. Sanz, G. Dimuro, B. Bedregal, R. Mesiar, A. Kolesárová, and H. Bustince, "Preaggregation functions: Construction and an application," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 24, pp. 260–272, 2016.

[11] D. Paternain, M. J. Campión, H. Bustince, I. Perfilieva, and R. Mesiar, "Internal fusion functions," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, InPress.

[12] H. Bustince, J. Fernandez, A. Kolesárová, and R. Mesiar, "Directional monotonicity of fusion functions," *European Journal of Operational Research*, vol. 244, pp. 300–308, 2015.

[13] G. Choquet, "Theory of capacities," *Ann. Inst. Fourier*, vol. 5, pp. 1953–1954, 1953.

[14] J. Alcalá-Fdez, A. Fernandez, J. Luengo, J. Derrac, S. García, L. Sánchez, and F. Herrera, "KEEL data-mining software tool: Data set repository, integration of algorithms and experimental analysis framework," *Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing*, vol. 17:2-3, pp. 255–287, 2011.

[15] S. García, A. Fernández, J. Luengo, and F. Herrera, "Advanced nonparametric tests for multiple comparisons in the design of experiments in computational intelligence and data mining: Experimental analysis of power," *Information Sciences*, vol. 180, pp. 2044–2064, 2010.

[16] V. Vapnik, *Statistical Learning Theory*. New York: Wiley, 1998.

[17] M. Elkano, M. Galar, J. Sanz, A. Fernandez, E. Barrenechea, F. Herrera, and H. Bustince, "Enhancing multi-class classification in farc-hd fuzzy classifier: On the synergy between n-dimensional overlap functions and decomposition strategies," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 23, no. 5, pp. 1562 – 1580, 2015.

[18] M. Galar, A. Fernández, E. Barrenechea, H. Bustince, and F. Herrera, "Dynamic classifier selection for one-vs-one strategy: Avoiding non-competent classifiers," *Pattern Recognition*, vol. 46, no. 12, pp. 3412–3424, 2013.

[19] M. Galar, A. Fernández, E. Barrenechea, and F. Herrera, "DRCW-OVO: Distance-based relative competence weighting combination for one-vs-one strategy in multi-class problems," *Pattern Recognition*, vol. 48, no. 1, pp. 28–42, 2015.

[20] E. Hüllermeier and S. Vanderlooy, "Combining predictions in pairwise classification: An optimal adaptive voting strategy and its relation to weighted voting," *Pattern Recognition*, vol. 43, no. 1, pp. 128–142, 2010.

[21] J. R. Quinlan, *C4.5: Programs for Machine Learning*, 1st ed. San Mateo-California: Morgan Kaufmann Publishers, 1993.

[22] D. W. Aha, D. Kibler, and M. K. Albert, "Instance-based learning algorithms," *Machine Learning*, vol. 6, pp. 37–66, 1991.

[23] W. W. Cohen, "Fast effective rule induction," in *ICML'95: Proc. of the Twelfth Int. Conf. on Machine Learning*, 1995, pp. 1–10.

[24] Y. Chen and J. Z. Wang, "Support vector learning for fuzzy rule-based classification systems," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 11, no. 6, pp. 716–728, 2003.

[25] R. Yager, "Quantifier guided aggregation using owa operators," *International Journal of Intelligent Systems*, vol. 11, pp. 49–73, 1998.

[26] M. Grabisch, "A new algorithm for identifying fuzzy measures and its application to pattern recognition," in *Int. Joint Conf. of the 4th IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems and the 2nd Int. Fuzzy Engineering Symposium*, 1995, pp. 145–150.

Clustering difuso con pertenencias intervalares

Aranzazu Jurio
Departamento de Estadística,
*I*nformática y Matemáticas
*I*nstituto de Smart Cities
Universidad Pública de Navarra
Pamplona, España
aranzazu.jurio@unavarra.es

Humberto Bustince
Departamento de Estadística,
*I*nformática y Matemáticas
*I*nstituto de Smart Cities
Universidad Pública de Navarra
Pamplona, España
bustince@unavarra.es

Vicenç Torra
School of Informatics
University of Skövde
Skövde, Sweden
vtorra@ieee.org

***Resumen*—En este trabajo estudiamos cómo solucionar el problema que presentan los outliers a la hora de realizar un proceso de agrupamiento. Para ello, presentamos una función objetivo que extiende a la del algoritmo Fuzzy Cluster Means, mediante el uso de conjuntos intervalo-valorados difusos. En este caso, las pertenencias de cada dato a cada grupo se representan mediante intervalos. Posteriormente, presentamos un algoritmo que minimiza la función objetivo propuesta y mostramos cómo se comporta ante diferentes conjuntos de datos.**

***Index Terms*—clustering, intervalo, pertenencia**

I. Introducción

El problema de clustering o agrupamiento es un problema de clasificación no supervisada cuyo objetivo es encontrar los grupos naturales existentes en un conjunto de datos. Para ello, se basa en la idea de que los datos que pertenecen a un mismo grupo deben compartir características similares, mientras que los datos que pertenecen a diferentes grupos deben diferenciarse en dichas características [4].

Los algoritmos de agrupamiento se pueden dividir de manera general en dos tipos: algoritmos jerárquicos y algoritmos de particiones. Los algoritmos jerárquicos crean un árbol (dendograma) que mide las similitudes entre los datos [5] [9]. Por su parte, los algoritmos de particiones separan los datos en un número prefijado de grupos. Cada uno de esos grupos se representa mediante un centroide, que es el punto cuya suma de distancias desde todos los datos del grupo a sí mismo es mínima [6] [7] [8]. En este trabajo nos centramos en los algoritmos de particiones.

Dentro de los algoritmos de particiones uno de los más conocidos y utilizados es el k-means [3] [8]. En este algoritmo se separan todos los datos en c grupos y se calculan los centroides de cada grupo. El objetivo es minimizar la suma de las distancias de cada dato a su centroide correspondiente.

$$J = \sum_{i=1}^{c} \sum_{x_k \in cluster_i} ||x_k - v_i||_A^2$$

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte mediante el programa José Castillejo para estancias de movilidad en el extranjero de jóvenes doctores. También ha sido parcialmente financiado por el Ministerio de Economía, Industria y Competitividad del Gobierno de España mediante el proyecto TIN2016-77356-P (AEI/FEDER, UE).

donde $||x||_A = \sqrt{x^t A x}$ es cualquier norma asociada a un producto escalar.

Uno de los problemas que presenta el algoritmo k-means, así como muchos algoritmos de agrupamiento de particiones, es que no son capaces de manejar situaciones en las que los grupos de datos se encuentran solapados. En esos casos, los datos que se encuentran en la zona solapada entre dos o más grupos deberían pertenecer a todos esos grupos y no solo a uno de ellos.

Una de las maneras de solucionar este problema es utilizando la lógica difusa [10]. De este modo, cada uno de los datos puede pertenecer a más de un grupo, con diferente valor de pertenencia. Estos valores de pertenencia son números entre 0 y 1. El algoritmo Fuzzy Cluster Means (FCM) [1] extiende la idea del algoritmo k-means empleando la lógica difusa.

En el FCM, cada dato tiene una pertenencia total de 1, que reparte entre todos los grupos. De esta manera, un mismo dato puede pertenecer a todos los grupos existentes, siempre y cuando la suma de sus valores de pertenencia sea 1. El objetivo es minimizar la suma ponderada de las distancias de cada dato a todos los centroides. Los pesos de esta suma vienen dados por el valor de pertenencia de cada dato a cada grupo.

$$J = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{c} (u_{ik})^m ||x_k - v_i||_A^2$$

Este algoritmo consigue solucionar el problema del solapamiento entre grupos. Sin embargo, cuando existen outliers entre los datos a clasificar, el FCM no es capaz de detectarlos y por ello sus resultados se ven distorsionados.

Para solucionar este problema, en este trabajo presentamos un nuevo algoritmo de agrupamiento que extiende el FCM, de tal forma que es capaz de detectar los datos que no pertenecen a los grupos naturales existentes en el conjunto de datos.

De la misma forma que el uso de los conjuntos difusos permite aportar nueva información al proceso de agrupamiento, en nuestra propuesta utilizamos una extensión de los conjuntos difusos: los conjuntos intervalo-valorados difusos. En este trabajo, utilizamos dichos conjuntos para cuantificar las pertenencias, por lo que cada dato va a pertenecer a todos los grupos con un valor de pertenencia que es un intervalo en [0,1]. Utilizamos la amplitud de dicho intervalo

para representar la seguridad que tenemos de que ese dato pertenezca a los grupos presentes en el dataset que estamos clasificando. De esta forma, si estamos totalmente seguros de que un dato pertenece a uno o varios de los grupos existentes, las pertenencias de dichos datos a todos los grupos tendrán amplitud 0. Por el contrario, si estamos totalmente seguros de que un dato no pertenece a ninguno de los grupos presentes, las pertenencias de ese dato a todos los grupos tendrán amplitud 1, que es el máximo permitido.

El resto de este trabajo está organizado de la siguiente forma: en la Sección II repasamos brevemente el algoritmo Fuzzy Cluster Means; en la Sección III explicamos en detalle el algoritmo que proponemos en este trabajo y en la Sección IV vemos cómo se comporta mediante el uso de varios ejemplos de datos. Finalmente, en la Sección V mostramos las conclusiones obtenidas.

II. FCM

El Fuzzy Cluster Means (FCM) [1] es uno de los algoritmos de agrupamiento difuso más utilizados. Al utilizar conjuntos difusos, permite que cada uno de los datos pertenezca a más de un grupo al mismo tiempo. De hecho, basa su idea en que cada dato debe pertenecer a todos los grupos presentes con un grado de pertenencia dado. Estos grados de pertenencia son valores entre 0 y 1, de tal forma que la suma de los valores de pertenencia de cada dato a todos los grupos siempre sea 1.

Con esta premisa, el algoritmo FCM trata de minimizar la suma de distancias ponderadas de cada dato a todos los centroides, haciendo que los pesos de ponderación sean proporcionales al valor de pertenencia del dato a ese grupo.

$$J = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{c}(u_{ik})^m ||x_k - v_i||_A^2$$

donde x_k es el k-ésimo dato a clasificar, v_i es el centroide del grupo i, u_{ik} es el grado de pertenencia del dato k al grupo i y m es un valor real mayor que 1. Además, se deben cumplir tres restricciones:

- $u_{ik} \geq 0, \quad k = 1..n,\ i = 1..c$
- $\sum_{k=1}^{n} u_{ik} > 0, \quad i = 1..c$
- $\sum i = 1^c u_{ik} = 1, \quad k = 1..n$

La solución a este problema es un proceso iterativo que comienza con unos centroides elegidos aleatoriamente. A partir de los centroides se pueden calcular los nuevos valores de pertenencia de cada dato a cada grupo:

$$u_{ik} = \left(\sum_{j=1}^{c} \left(\frac{||x_k - v_i||_A}{||x_k - v_j||_A} \right)^{2/(m-1)} \right)^{-1}$$

$k = 1..n$, $i = 1..c$. Y a partir de los valores de pertenencia se pueden calcular los nuevos centroides:

$$v_i = \frac{\sum_{k=1}^{n}(u_{ik})^m x_k}{\sum_{k=1}^{n}(u_{ik})^m}$$

$i = 1..c$. El proceso termina cuando los cambios en los valores son suficientemente pequeños.

Uno de los problemas que presenta el algoritmo FCM se produce cuando el conjunto de datos a clasificar presenta ruido, o outliers. En estos casos, todos los datos se asignan a los diferentes grupos, por lo que los datos alejados pueden modificar erróneamente sus centroides. En la Figura 1 podemos ver un conjunto de datos marcados con asteriscos negros. Claramente podemos ver dos grupos de datos que se solapan y un dato que no pertenece a ninguno de los grupos. Marcados con círculos rojos se ven los centroides de los dos grupos detectados por el algoritmo FCM.

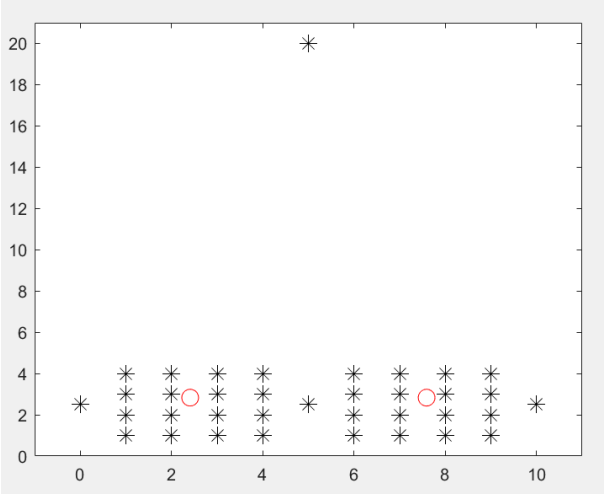


Figura 1. Ejecución del algoritmo FCM sobre un conjunto de datos con un outlier. Conjunto de datos a clasificar marcados con asteriscos negros. Centroides obtenidos por el FCM marcados con círculos rojos.

Los dos grupos de datos están centrados verticalmente en el punto 2.5. Sin embargo, como el dato situado en el punto $(5, 20)$ pertenece a ambos grupos, los centroides se desplazan hacia arriba hasta el valor vertical 2.83.

Además, si analizamos los valores de pertenencia de cada dato a los dos grupos, vemos que el dato situado en el punto (5, 2.5) tiene un valor de pertenencia de 0.5 a cada uno de los grupos. Por su parte, el dato situado en el punto (5, 20) también tiene un valor de pertenencia de 0.5 a cada grupo. Por tanto, el algoritmo nos indica que ambos datos son iguales a la hora de formar los dos grupos. Sin embargo, observando la figura, vemos que uno de los dos datos pertenece a la zona solapada de los dos grupos mientras que el otro dato no pertenece a ninguno de los grupos.

A partir de este ejemplo, podemos afirmar que el algoritmo Fuzzy Cluster Means no funciona adecuadamente cuando en el conjunto de datos a clasificar hay datos que no pertenecen a ninguno de los grupos existentes.

III. Nuevo algoritmo de clustering intervalar

En esta sección explicamos nuestra propuesta de algoritmo de agrupamiento. Su principal novedad es que hace uso de los conjuntos intervalo-valorados difusos para representar las pertenencias de los datos a cada cluster.

Llamamos $L([0,1])$ al conjunto de todos los subintervalos cerrados en $[0,1]$, es decir,

$$L([0,1]) = \{\mathbf{x} = [\underline{x}, \overline{x}] | (\underline{x}, \overline{x}) \in [0,1]^2 \quad \text{y} \quad \underline{x} \leq \overline{x}\}$$

Un conjunto intervalo-valorado difuso Z en el universo $U \neq \emptyset$ es una función $Z : U \rightarrow L([0,1])$.

Una de las interpretaciones existentes de los conjuntos intervalo-valorado difusos, la cual utilizamos en este trabajo, es la siguiente: "el grado de pertenencia de un elemento al conjunto es un valor dentro del intervalo de pertenencia considerado. No conocemos exactamente el valor, por lo que proporcionamos sus extremos" [2].

Siguiendo esta idea, podemos asumir que la amplitud del intervalo representa la ignorancia que tenemos a la hora de asignar el valor de pertenencia del elemento al conjunto.

Aplicándolo sobre nuestro problema de agrupamiento, queremos que si el algoritmo está completamente seguro de que un dato pertenece a un grupo, entonces la amplitud de su intervalo de pertenencia será mínima. No importa si la pertenencia es $[1,1]$ a un grupo y $[0,0]$ a los demás, o si pertenece $[0{,}5, 0{,}5]$ a dos grupos. Por el contrario, si el algoritmo no está seguro de que un dato pertenezca a los grupos que se han creado en los datos, entonces la amplitud de sus intervalos de pertenencia deberá ser mayor. En el caso extremo, si un dato parece no pertenecer a ninguno de los grupos existentes, los intervalos de pertenencia a todos los grupos pueden ser $[0,1]$.

Por tanto, a diferencia del algoritmo Fuzzy Cluster Means, en nuestra propuesta la suma de los extremos inferiores y superiores de las pertenencias de un dato a todos los grupos tiene que ser un valor entre 2 y c, siendo c el número de grupos. En el caso en el que no existe ninguna duda sobre la pertenencia de los datos a los grupos, los extremos inferiores de todos los valores de pertenencia son iguales a los extremos superiores. Manteniendo la misma restricción que existía en el FCM, estos deben sumar 1, por lo que la suma total es 2. En el caso de que la duda sobre la pertenencia sea máxima, los intervalos de pertenencia a todos los grupos serán $[0,1]$, por lo que la suma total será igual al número de grupos.

De forma análoga al k-means y al FCM, con este nuevo algoritmo queremos minimizar la suma ponderada de distancias entre cada dato y los centroides de cada grupo, utilizando como pesos los valores de pertenencia. En este caso, esos valores de pertenencia son intervalos. Cuando no existe duda sobre el valor de pertenencia, el extremo inferior y superior del intervalo son muy parecidos y representan el valor que debe tomar el peso. Por el contrario, cuando existe una gran duda de que un dato pertenezca a un grupo, no queremos que su información modifique en gran medida el valor del centroide, por lo que queremos que su peso sea pequeño. Al ser la amplitud del intervalo grande, eso significa que su extremo inferior tiene que ser pequeño. Por tanto, en ambos casos podemos utilizar un peso para la suma ponderada proporcional al extremo inferior del intervalo de pertenencia.

También es necesario restringir la suma total de las amplitudes de los intervalos de pertenencia. De no hacerlo, nuestro sistema se minimizaría al decir que tenemos una duda máxima sobre la pertenencia de todos los datos existentes.

Por tanto, la función objetivo que queremos minimizar en nuestra propuesta es la siguiente:

$$J = \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{c}(\underline{u_{ik}})^m ||x_k - v_i||_A^2 + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{c}(\overline{u_{ik}} - \underline{u_{ik}})^m$$

donde x_k es el k-ésimo dato a clasificar, v_i es el centroide del grupo i, $[\underline{u_{ik}}, \overline{u_{ik}}]$ es el intervalo de pertenencia del dato k al grupo i y m es un valor real mayor que 1.

El parámetro $1/a$ permite ajustar la importancia relativa de los dos términos de la ecuación. Hay que tener en cuenta que ambos términos no tienen por que estar en la misma escala: el primer término depende de las distancias entre los datos y el segundo es siempre un valor entre 0 y 1. Mediante este parámetro podemos conseguir que la solución obtenida se parezca más a la obtenida por el FCM si hacemos que el segundo término tenga mucha importancia, o que la solución presente en general amplitudes muy grandes, si es el primer término el más importante.

Esta función está sujeta a las siguientes restricciones:

- Los intervalos tienen que estar bien formados. $\overline{u_{ik}} \geq \underline{u_{ik}}$, $k = 1..n$, $i = 1..c$
- Todos los grupos tienen que tener por lo menos un dato con extremo inferior de pertenencia positivo. $\sum_{k=1}^{n} \underline{u_{ik}} > 0, \quad i = 1..c$
- La suma de los extremos de las pertenencias de un dato a todos los grupos tiene que estar entre 2 y c. $2 \geq \sum_{i=1}^{c}(\underline{u_{ik}} + \overline{u_{ik}}) <= c, \quad k = 1..n$

Cuando el número de grupos es 2, esta función se puede minimizar utilizando multiplicadores de Lagrange. De esta forma, obtenemos un algoritmo iterativo análogo al FCM. A partir de una inicialización aleatoria, podemos actualizar los intervalos de pertenencia basándonos en los datos de los centroides.

$$\underline{u_{ik}} = \frac{2(2a)^{1/m-1}}{||x_k - v_i||^{2/m-1}\left[c + 2(2a)^{1/m-1}\sum_{j=1}^{c}\frac{1}{||x_k - v_j||^{2/m-1}}\right]}$$

$$\overline{u_{ik}} = \frac{2\left[||x_k - v_i||^{2/m-1} + (2a)^{1/m-1}\right]}{||x_k - v_i||^{2/m-1}\left[c + 2(2a)^{1/m-1}\sum_{j=1}^{c}\frac{1}{||x_k - v_j||^{2/m-1}}\right]}$$

para $k = 1..n$, $i = 1..c$. A partir de los datos de los intervalos de pertenencia, podemos actualizar los centroides.

$$v_i = \frac{\sum_{k=1}^{n}(u_{ik})^m x_k}{\sum_{k=1}^{n}(u_{ik})^m}$$

para $i = 1..c$. El proceso termina cuando los cambios en los valores son suficientemente pequeños.

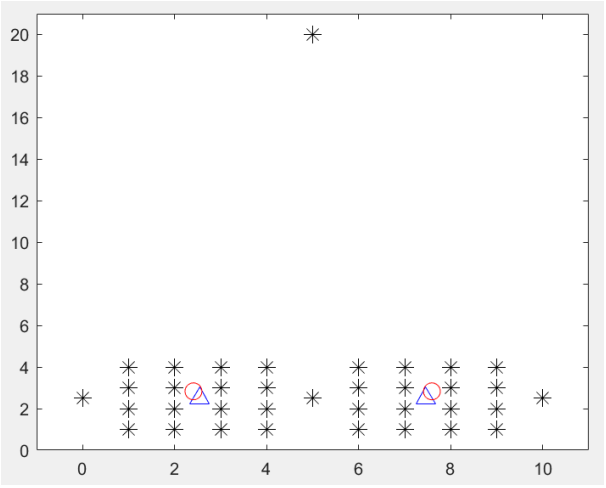


Figura 2. Ejecución del algoritmo propuesto y del FCM sobre un conjunto de datos con un outlier. Conjunto de datos a clasificar marcados con asteriscos negros. Centroides obtenidos por nuestro algoritmo marcados con triángulos azules. Centroides obtenidos por el FCM marcados con círculos rojos.

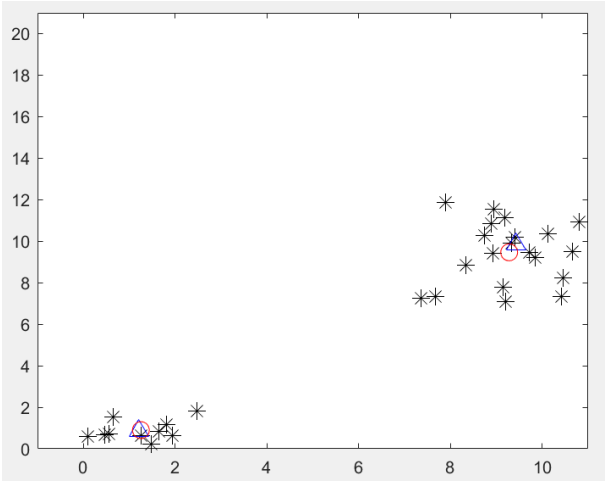


Figura 3. Ejecución del algoritmo propuesto y del FCM sobre un conjunto de datos sin outliers. Conjunto de datos a clasificar marcados con asteriscos negros. Centroides obtenidos por nuestro algoritmo marcados con triángulos azules. Centroides obtenidos por el FCM marcados con círculos rojos.

IV. Ejemplos numéricos

En esta sección mostramos el comportamiento del algoritmo que hemos propuesto. Para poder visualizar los ejemplos con mayor simplicidad y que sean más fáciles de entender, en todos ellos utilizamos sólo dos dimensiones.

Comenzamos con el mismo ejemplo que hemos visto en la Figura 1. Como ya hemos comentado, el FCM no es capaz de resolver este ejemplo correctamente. Al aplicar nuestro algoritmo, los centroides obtenidos ya no se desplazan hacia arriba de donde deberían estar y se colocan en el centro real de los grupos existentes. En la Figura 2 hemos marcado con triángulos azules los centros obtenidos por nuestro algoritmo y con círculos rojos aquellos obtenidos por el FCM.

Si analizamos los intervalos de pertenencia resultantes de este ejemplo, el dato situado en la intersección de los dos grupos (punto (5, 2.5)) tiene pertenencia [0.3488, 0.6512] a cada uno de los grupos, con una amplitud de 0.3024. Por su parte, el dato outlier (punto 5, 20)) tiene pertenencia [0.0004, 0.9996] a cada uno de los grupos, con una amplitud de 0.9991. Podemos ver claramente como el algoritmo es capaz de identificar que estos dos datos no son iguales a la hora de hacer la clasificación. Al tener una amplitud tan grande el outlier, esto hace que casi no se tenga en cuenta a la hora de calcular los centroides, y por eso estos se sitúan en el centro geométrico del grupo correspondiente.

En la Figura 3 podemos ver un nuevo conjunto de datos y cómo se comportan sobre él nuestro algoritmo (centroides marcados con triángulos azules) y el FCM (centroides marcados con círculos rojos). Se puede comprobar que ambos algoritmos obtienen una solución muy similar.

Si a ese mismo conjunto de datos le añadimos tres outliers, entonces vemos que los dos algoritmos ya cambian su comportamiento. Esta nueva ejecución se puede ver en la Figura 4, siguiendo la misma leyenda.

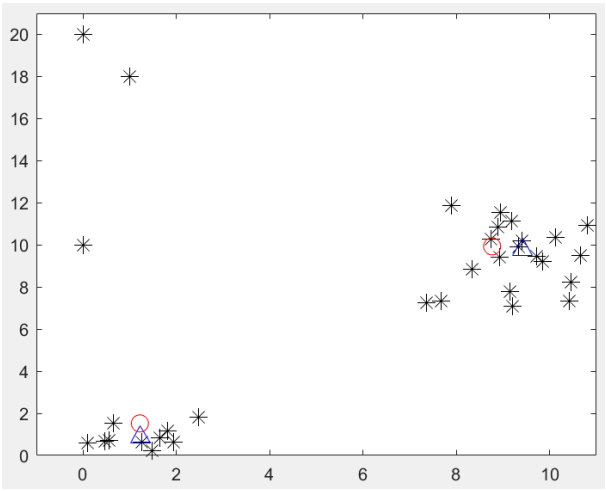


Figura 4. Conjunto de datos igual al de la figura 3 al que se le han añadido tres outliers en los puntos (0,20), (1,18) y (0,10). Ejecución del algoritmo propuesto y del FCM. Conjunto de datos a clasificar marcados con asteriscos negros. Centroides obtenidos por nuestro algoritmo marcados con triángulos azules. Centroides obtenidos por el FCM marcados con círculos rojos.

Como podemos comprobar visualmente, la adición de tres outliers casi no ha modificado los valores de los centroides obtenidos por nuestro algoritmo. Analíticamente, estos valores han pasado de ser

- Grupo1→ (1.2107, 0.8496)
- Grupo2→ (9.4268, 9.8496)

a valer

- Grupo1→ (1.2223, 0.8670)
- Grupo2→ (9.4149, 9.7710)

Sin embargo, en la ejecución del FCM los nuevos centroides se ven claramente influenciados por los outliers, y se desplazan hacia allí. El centroide del grupo 1 se desplaza hacia arriba y el centroide del grupo 2 lo hace hacia la izquierda. De esta forma, pasan de valer

- Grupo1→ (1.2531, 0.8985)
- Grupo2→ (9.2796, 9.4647)

a valer

- Grupo1→ (1.2181, 1.5217)
- Grupo2→ (8.7661, 9.9312)

Uno de los aspectos más importantes a la hora de aplicar nuestro algoritmo de agrupamiento es el ajuste del parámetro $1/a$. Este parámetro permite ajustar la amplitud de los intervalos de pertenencia. Si el parámetro $1/a$ toma valores muy grandes, entonces el algoritmo obtiene soluciones donde las amplitudes de todas las pertenencias son grandes. Por el contrario, si el parámetro $1/a$ toma valores pequeños, entonces el algoritmo encuentra soluciones donde las amplitudes de los intervalos de pertenencia son pequeñas. Para cada uno de los problemas es necesario ajustar este parámetro, para obtener las soluciones deseadas.

En la Figura 5 vemos un nuevo conjunto de datos marcado con asteriscos negros y tres pares de puntos que representan los centros obtenidos con tres valores del parámetro $1/a$ distintos. Mediante cuadrados rojos los centros obtenidos cuando $1/a = 1/0{,}0001$, triángulos azules cuando $1/a = 1/10000$ y círculos verdes cuando $1/a = 1/1$.

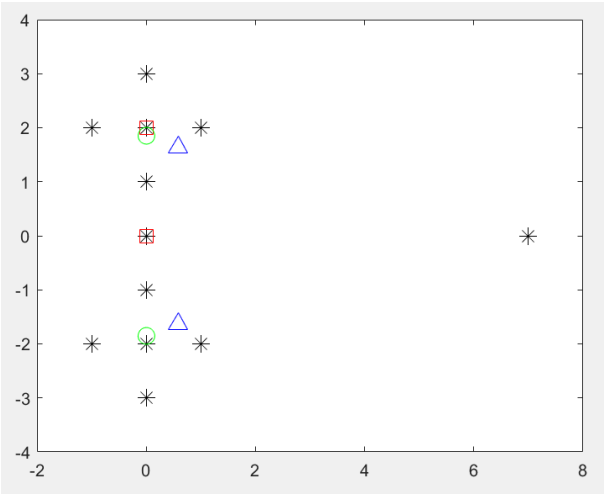


Figura 5. Conjunto de datos marcado mediante asteriscos negros. Centros obtenidos mediante el algoritmo propuesto cuando $1/a = 1/0{,}0001$ (cuadrados rojos), $1/a = 1/10000$ (triángulos azules) y $1/a = 1/1$ (círculos verdes).

Como se puede observar, los resultados varían en gran medida dependiendo del valor del parámetro. En el Cuadro I se muestran los valores de los intervalos de pertenencia de cada dato a cada grupo. Cuando $1/a = 1/0{,}0001$, el algoritmo encuentra dos centroides aleatorios, cuyas pertenencias son $[0, 0]$ y $[1, 1]$ a los dos grupos. El resto de datos tienen una pertenencia de $[0, 1]$ a los dos grupos, es decir, la máxima amplitud posible. En este ejemplo de ejecución, los datos elegidos para convertirse en centroides son el $(0, 2)$ y el $(0, 0)$. Por el contrario, cuando $1/a = 1/10000$, todos los intervalos de pertenencia tienen amplitud 0 y, por ello, pueden ser considerados como valores puntuales. En este caso, el resultado obtenido es muy parecido al obtenido por el FCM.

Por último, el caso en el que $1/a = 1/1$ muestra un ejemplo de buen balance entre los dos extremos. En este caso, los datos que están muy cercanos a algún centroide y que, por lo tanto, el algoritmo está seguro de su pertenencia a los grupos existentes, tienen intervalos de pertenencia con amplitudes pequeñas. El dato situado en el punto $(0, 0)$, justo en la intersección de los dos grupos, tiene una amplitud mayor que el resto de datos, puesto que está más alejado de los centroides, pero mucho menor que el dato $(7, 0)$, que no debería pertenecer a ninguno de los dos grupos. Este dato tiene una pertenencia de $[0, 0015, 0{,}9985]$ a ambos grupos, casi la máxima posible.

Por tanto, es muy importante ajustar el parámetro $1/a$, que balancea la importancia relativa de las distancias entre los datos y los centroides con las amplitudes de las pertenencias. Según nuestras pruebas hechas sobre varios conjuntos de datos, un valor que funciona en la mayoría de los casos es cuando a toma el valor del percentil 10 o 15 de las distancias entre los datos del conjunto de datos.

V. Conclusiones

En este trabajo hemos presentado una extensión del algoritmo Fuzzy Cluster Means. Mediante nuestra propuesta, utilizamos una extensión de los conjuntos difusos, los conjuntos intervalo-valorados difusos, para permitir que el algoritmo detecte los datos considerados outliers y que estos no interfieran en el proceso de agrupamiento del resto de datos. Mediante varios ejemplos ilustrativos hemos comprobado que el algoritmo se comporta de manera correcta, tanto cuando existen outliers como cuando no. Además, hemos comprobado que es muy importante la elección de un buen valor para el parámetro que pondera los dos términos de la función objetivo, ya que este parámetro permite una variedad total entre soluciones con la máxima y la mínima amplitud en las pertenencias de todos los datos a todos los grupos.

Referencias

[1] J.C. Bezdek, “Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms” Plenum Press, 1981.
[2] H. Bustince, E. Barrenechea, M. Pagola, J. Fernandez, Z. Xu, B. Bedregal, J. Montero, H. Hagras, F. Herrera, B. De Baets, “A historical account of types of fuzzy sets and their relationships” IEEE Transactions on Fuzzy Systems 24, 179-194, 2016.
[3] E.W. Forgy, “Cluster analysis of multivariate data: efficiency versus interpretability of classifications”, Biometrics 21, 768–769, 1965.
[4] A.K. Jain, M.N. Murty, P.J. Flynn, “Data clustering: A review” ACM Computing Surveys 31, 264-323, 1999.
[5] S.C. Johnson, “Hierarchical clustering schemes” Psychometrika 32, 241-254, 1967.
[6] L. Faufman, P.J. Rousseeuw, “CLustering by means of Medoids”, in Statistical Data Analysis Based on the L_1–Norm and Related Methods, edited by Y. Dodge, North-Holland, 405–416, 1987.
[7] S.P. Lloyd, “Least square quantization in PCM”, IEEE Transactions on Information Theory 28, 129-137, 1982.
[8] J.B. MacQueen, “Some Methods for Classification and Analysis of Multivariate Observations”, Proceedings of 5th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability 1, 281-297, 1967.
[9] J.H. Ward Jr., “Hierarchical Grouping to Optimize an Objective Function”, Journal of the American Statistical Association, 58, 236–244, 1963.
[10] L.A. Zadeh, “Fuzzy sets”, Information and Control 8, 338–353, 1965.

Cuadro I

Resultados de los intervalos de pertenencia obtenidos por el algoritmo propuesto sobre el conjunto de datos de la Figura 5. En cada fila se muestra la información referente a un dato. Para él se indican los intervalos de pertenencia a los dos grupos existentes, cuando ejecutamos el algoritmo con diferentes valores del parámetro $1/a$: $1/0{,}0001$, $1/10000$ y $1/1$.

Dato	$1/a = 1/0{,}0001$		$1/a = 1/10000$		$1/a = 1/1$	
	Grupo 1	**Grupo 2**	**Grupo 1**	**Grupo 2**	**Grupo 1**	**Grupo 2**
(-1, -2)	[0.0000, 1.0000]	[0.0000, 1.0000]	[0.9725, 0.9725]	[0.0275, 0.0275]	[0.7882, 0.9967]	[0.0033, 0.2118]
(0, -1)	[0.0000, 1.0000]	[0.0000, 1.0000]	[0.9897, 0.9897]	[0.0103, 0.0103]	[0.8775, 0.9930]	[0.0070, 0.1225]
(0, -2)	[0.0000, 1.0000]	[0.0000, 1.0000]	[0.9988, 0.9988]	[0.0012, 0.0012]	[0.9999, 1.0000]	[0.0000, 0.0001]
(0, -3)	[0.0000, 1.0000]	[0.0000, 1.0000]	[0.9899, 0.9899]	[0.0101, 0.0101]	[0.6956, 0.9978]	[0.0022, 0.3044]
(1, -2)	[0.0000, 1.0000]	[0.0000, 1.0000]	[0.9995, 0.9995]	[0.0005, 0.0005]	[0.7925, 0.9967]	[0.0033, 0.2075]
(-1, 2)	[0.0000, 1.0000]	[0.0000, 1.0000]	[0.0275, 0.0275]	[0.9725, 0.9725]	[0.0033, 0.2118]	[0.7882, 0.9967]
(0, 1)	[0.0000, 1.0000]	[0.0000, 1.0000]	[0.0103, 0.0103]	[0.9897, 0.9897]	[0.0070, 0.1225]	[0.8775, 0.9930]
(0, 2)	[1.0000, 1.0000]	[0.0000, 0.0000]	[0.0012, 0.0012]	[0.9988, 0.9988]	[0.0000, 0.0001]	[0.9999, 1.0000]
(0, 3)	[0.0000, 1.0000]	[0.0000, 1.0000]	[0.0101, 0.0101]	[0.9899, 0.9899]	[0.0022, 0.3044]	[0.6956, 0.9978]
(1, 2)	[0.0000, 1.0000]	[0.0000, 1.0000]	[0.0005, 0.0005]	[0.9995, 0.9995]	[0.0033, 0.2075]	[0.7925, 0.9967]
(0, 0)	[0.0000, 0.0000]	[1.0000, 1.0000]	[0.5000, 0.5000]	[0.5000, 0.5000]	[0.2024, 0.7976]	[0.2024, 0.7976]
(7, 0)	[0.0000, 1.0000]	[0.0000, 1.0000]	[0.5000, 0.5000]	[0.5000, 0.5000]	[0.0015, 0.9985]	[0.0015, 0.9985]

Assessing the performance of bipolar classifiers in three-class problems

1st Guillermo Villarino
Facultad de Estudios Estadísticos
Universidad Complutense de Madrid
Madrid, Spain
gvillari@ucm.es

2nd Daniel Gómez
Facultad de Estudios Estadísticos
Universidad Complutense de Madrid
Madrid, Spain
dagomez@estad.ucm.es

3rd J. Tinguaro Rodríguez
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
Madrid, Spain
jtrodrig@mat.ucm.es

Abstract

In the context of supervised classification, several aspects already exist which need to be improved regarding the decision making step that any classifier passes through. Before providing the final assignment, many classification algorithms produce a soft score (either a probability, a fuzzy degree, a possibility, a cost, etc.) assessing the strength of the association between each item to be classified and each class. Usually, the final decision or classification step of these algorithms consists on assigning the item to the class with the highest soft score, a method typically known as the *maximum rule*. However, this procedure does not always take advantage of all the information contained in such soft scores. In other words, the final classification step of many algorithms may be improved through alternative procedures more sensible to the available soft information that the mentioned maximum rule.

To this aim, in this paper we propose a general bipolar approach that enables learning how to take advantage of the soft information provided by many classification algorithms in order to enhance the generalization power and accuracy of the classifiers. To show the suitability of the proposed approach, we also present some computational experiences for three-class classification problems, in which its application to some well-known classifiers as random forest and neural networks produce some improvements in performance.

***Index Terms*—Supervised classification models, bipolar models, Machine learning, Soft information**

I. Introduction

One of the most important topics in data science is classification, and particularly supervised classification tasks. In the literature, there exist a huge diversity of supervised classification algorithms, approaches and applications, depending on the specific tasks, type of data, characteristics or efficiency [7], [8]. Typically, in a supervised classification context the main aim is to be able to classify a set of items into classes based on a training sample or dataset that provides examples of association between items and classes, and that is used to train the classifiers in order to adequately generalize the observed associations, that is, to fit the classification models to the observed data.

Following the ideas presented in [12]–[15], in [17] classical supervised algorithms as CART [2], Random Forest (RF) [3] and Neural Networks [11], [16] were modelled as probabilistic classifiers, providing soft probabilistic assessments of the association of items with classes. In a second step, a bipolar probabilistic representation framework was developed by allowing some opposition or dissimilarity relationships between the classes to be introduced. In a third step, the more convenient structure of dissimilarity relationships was learned through an evolutionary algorithm. This more expressive representational model and the associated learning process permitted to improve the classification performance of the original classifiers in a binary classification context. In this paper we extend these results by addressing three-class classification problems instead of binary ones.

Moreover, in [18] we proposed a replication + aggregation scheme to obtain a fuzzy classifier from a probabilistic one as a robustness enhancing pre-process that permits developing a fuzzy bipolar model from any soft classification algorithm. The experimental results were also carried out in a binary classification context.

The remainder of the paper is organized as follows: Section II describes the preliminary concepts we will use along the work, including the differences between crisp and probabilistic classifiers, as well as some specific concepts regarding accuracy measures and Genetic Algorithms (GAs). Then, in Section III, we present the main idea of bipolar knowledge representation and the complete two-stage (learning and aggregating) process for constructing a bipolar classifier from a soft supervised one. Finally, the experimental framework along with the respective analysis of the results are presented in Sections IV and V. We summarize the paper with the main concluding remarks in Section VI.

II. Preliminaries

In this preliminary section, we introduce some concepts for a better understanding of the paper. We firstly introduce the main concepts of crisp and probabilistic classifiers as well as their differences and relationships to motivate one of the principal contribution of this paper: the importance of modelling the soft information of a classifier before making the final decision in a classification task.

A. Crisp and probabilistic classifiers

Let us denote by $\{C_1, \ldots, C_k\}$ the set classes of a classification problem, and by $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ the set of items that

has to be classified.

As we have pointed in the introduction, many classification users only takes into account the final output of the classification task. This is probably because they are only interested in the final solution provided by the classifier. This is the reason why in a general way, the classifiers are usually viewed as functions

$$C : X \longrightarrow \{C_1, \ldots, C_k\}, \tag{1}$$

that is, a procedure to assign one of the available classes to each of the items being classified.

Nevertheless, the classification process goes through many steps before to arrive to the final assignment, and it is in the intermediate steps that soft information usually appear as a natural way to model the information and the evidence being obtained. Particularly, it is very common that classification algorithms manage soft information for each item $x \in X$ about the probability that x belongs to each of the different classes, or in fuzzy classification models about the degree of membership of the item x in the set of classes.

Taking into account these considerations, in [17] we distinguished between crisp (classical) and probabilistic classifiers. A probabilistic classifier can be viewed as a function

$$C_P : X \longrightarrow [0,1]^k, \tag{2}$$

that assigns to each item x its probability of belonging to each of the available classes. Obviously, for any $x \in X$ it has to hold that $\sum_{i=1}^{k} (C_P(x))_i = 1$ because of the additivity of probability. We would like to remark that many classification algorithms (as for example neural networks, random forest or decision trees) could be viewed as probabilistic classifiers if we just look at the soft information provided by the algorithms before making the final decision or crisp assignment.

III. Probabilistic bipolar model

This section is devoted to present the underlying ideas of bipolar knowledge representation. Firstly, it merits to be stressed that the concept of dissimilarity assumes that the available classes are related through a certain opposition or dissimilarity structure informing of which classes provide negative evidence against the others. This dissimilar structure can be modelled through a dissimilarity matrix D, which contains the degree of dissimilarity for any pair of classes. Obviously, the main diagonal has to be composed by zero values.

It is clear that the dissimilarity matrix D plays a crucial role in this classification scheme since it determines how the negative evidence is derived from the initial evidence for each class. As a consequence, the performance of the resulting crisp classifier, as well as the effect of incorporating the bipolar representation framework and the aggregation method, are absolutely dependent on the choice of the matrix D.

Figure 3 shows a flow diagram of the proposed decision making stage, including the genetic search of the dissimilarity structure and its application to the test set.

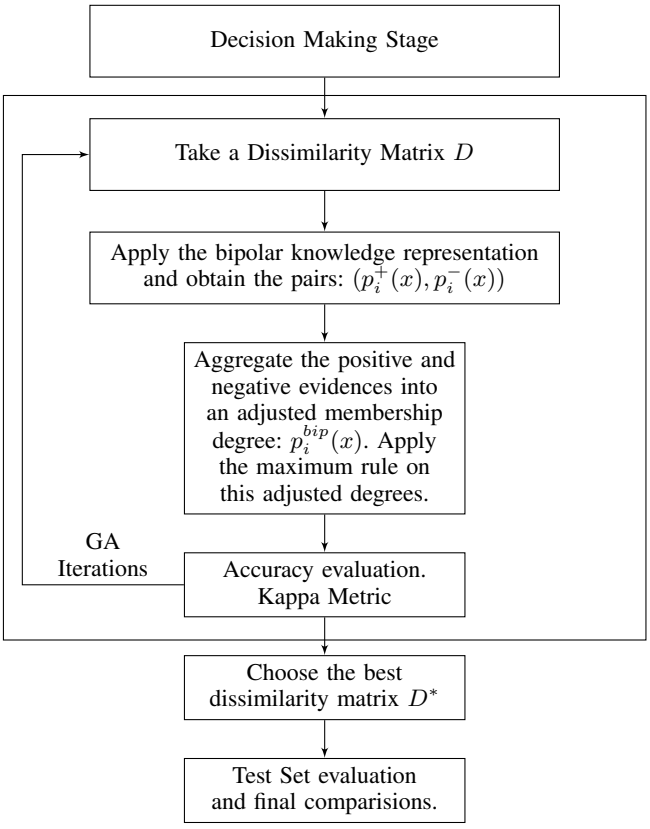


Fig. 1. Flow diagram of the proposed Decision Making Stage.

A. Learning the dissimilarity matrix

Ideally, in real situations the adequate structure of dissimilarity between classes should be proposed by application domain experts based on his knowledge. However, in many cases it may be more practical to obtain the matrix D through a learning process carried out once the base soft classifier has been trained. When this learning process is driven by a measure of performance focused on the generalization accuracy of the adjusted crisp classifier, the resulting matrix tends to fix some of the misassignments committed by the base classifier on the training sample, hopefully also improving its predictive accuracy on new queries or a test sample. Therefore, this learning approach allows that any probabilistic classifier may benefit from introducing a dissimilarity structure in the set of classes, aiding the decision rule of the classifiers to better adapt to the specific features of each dataset or application context.

Here we propose that the learning process of the dissimilarity matrix D is performed by means of a genetic algorithm (GA). The specific parameters of the applied GA are given in Section IV-C.

B. Obtaining the paired structure (p^+, p^-)

In this section we show the application of the dissimilarity matrix already learned by the GA to obtain the paired structure containing the positive and negative evidences.

To do so, we depart from the soft information (estimated probabilities) given by the base algorithm for an item x, $p_i(x) = p_i^+(x)$, treating it as our positive probability of class C_i membership. Then, we apply the bipolar knowledge representation approach to get the negative evidence in the following way:

$$p_i^-(x) = \sum_{j \neq i} d_{ij}\ p_j^+(x) = \sum_{j=1}^{k} d_{ij}\ p_j^+(x) = D_i p^+(x), \quad (3)$$

Once the bipolar paired structure has been obtained, one of the possibilities we have is to aggregate this positive and negative evidences into a bipolar adjusted degree of evidence by applying any kind of aggregation operator.

Let us stress this is only one among the wide spectrum of possibilities for dealing with paired structures.

C. Aggregating bipolar evidence: the additive and logistic cases

Let us now address the question of how to aggregate, for a given class C_i and an item x, the pair of positive and negative evidence degrees $p_i^+(x)$ and $p_i^-(x)$ in order to obtain a single adjusted degree $p_i^{adj}(x)$. Obviously, different aggregation choices will lead to different adjusted classifiers. In this work we have studied two different kinds of aggregation, that are defined below.

Let $p_i^+(x)$, $p_i^-(x)$ be the positive and negative probabilities of item x into class C_i. The additive adjusted degree of x into class C_i is defined as

$$p_i^{add}(x) = \max\{0, p_i^+(x) - p_i^-(x)\}. \quad (4)$$

Notice that the previous definition can be interpreted as the Lukasiewicz t-norm $W(a,b) = \max\{a + b - 1, 0\}$ of the positive and non-negative degrees, that is, $p_i^{add}(x) = W(p_i^+(x), n(p_i^-(x)))$, where n stands for the standard negation $n(a) = 1 - a$. In this way, the positive evidence $p_i^+(x)$ initially provided by the soft classifier is adjusted by subtracting from it the negative evidence $p_i^-(x)$. Particularly, the initial degrees are not modified when no class is dissimilar to C_i, that is, when $D_i = 0$.

Thus, an adjusted degree $p_i^{add}(x) > 0$ represents the existence of a positive gap between the support for class C_i and the support for class dC_i, that is, for the classes considered dissimilar to C_i. In this situation, the strength of the association of item x with class C_i may have been reduced from its initial assessment, but it is still perfectly possible that item x is finally assigned to C_i. On the other hand, a zero value of $p_i^{add}(x)$ represents a situation in which there exist more evidence for the dissimilar class dC_i than for C_i, and thus the adjusted classifier should not assign the item to class C_i.

In the following definition, we propose an alternative way to aggregate the positive and negative information into a single adjusted degree.

Let $p_i^+(x)$, $p_i^-(x)$ be the positive and negative evidence degrees of item x into class C_i. The logistic adjusted membership degree of x into class C_i is defined as

$$p_i^{log}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{p_i^+(x)}{p_i^-(x)}} & if\ p_i^-(x) > 0 \\ 1 & otherwise \end{cases} \quad (5)$$

Unlike the additive logic of the previous aggregation, this logistic aggregation focuses on the ratio between positive and negative information, adjusting it to range in the [0,1] interval through a logistic transformation. This permits a somehow more flexible behaviour of the adjusted degrees, in the sense that the choice of the dissimilarity matrix D may have an even greater influence in the adjustment of the initial positive evidence provided by the base soft classifier, up to the point that class $p_i^{log}(x) = 1$ whenever no evidence is gathered for the dissimilar class dC_i, that is, when $p_i^-(x) = 0$.

As mentioned above, once one of these two aggregation methods has been applied and the adjusted degrees $p_i^{adj}(x)$ has been obtained for each class (either $p_i^{adj}(x) = p_i^{add}(x)$ or $p_i^{adj}(x) = p_i^{log}(x)$), the final decision on the classification of item x is made by applying the maximum rule to such adjusted degrees. Therefore, the item x is finally assigned to the class C_h with a maximum adjusted degree $p_h^{adj}(x)$, that is, $h = arg\max_{i \in \{1,\ldots,k\}} p_i^{adj}(x)$.

IV. Experimental framework

This section is devoted to present a computational experience aimed to assess the performance of our dissimilarity - based bipolar knowledge representation approaches (additive and logistic) when applied on recognized classifiers such as Random Forest [3] and Neural Networks [11], [16].

A. Experimental setting details

As just mentioned, the base classifiers used in this experiment are Random Forest (RF) and Neural Networks (NNet). This experience is designed to compare the benchmark performance of these classifiers with those obtained from the later ones by means of the proposed dissimilarity learning process and the additive and logistic adjustments.

The results for each classifier in each experiment will be obtained following a 5-fold cross validation scheme for each dataset. In each folder, that is, for each training set, the optimal base classifier parametric configuration is approximated using a grid P on the space of parameters of the algorithms considered. In order to evaluate the performance of each specific parametric configuration $p \in P$, 25 bootstrap samples of the training set are generated, in such a way that the base classifiers are fit to each of these bootstrap samples and then tested on a hold-out sample (composed by the non selected instances in the bootstrapping process) using the kappa statistic.

At each folder, the genetic dissimilarity learning process is carried out departing from the vectors of estimated probabilities $p(x)$ of the items x in the training sample in the way shown in III.

The train and test performance measures of each of the 3 classifiers in each dataset considered in each experiment are

Id.	Data-set	#Ex.	#Atts.	(R/I/N)
Aut	Autos	159	25	(15/0/10)
Car	Car	159	25	(15/0/10)
Wnq	Winequality-red	1599	11	(11/0/0)
Pen	Penbased	10992	16	(0/16/0)
Pag	Page-blocks	5472	10	(4/6/0)
Der	Dermathology	366	34	(0/34/0)
Eco	ecoli	336	7	(7/0/0)
Fla	flare	1066	25	(15/0/10)
Gla	Glass	214	9	(9/0/0)
Shu	Shuttle	2175	9	(0/9/10)
Yea	Yeast	1484	8	(8/0/0)
Lin	Lymphography	148	18	(3/0/15)
Bal	Balance	625	4	(4/0/0)
Win	Wine	178	13	(13/0/0)
Nty	Newthyroid	215	5	(4/1/0)
Hay	Hayes-Roth	160	4	(0/4/0)
Con	Contraceptive	1473	9	(6/0/3)
Thy	Thyroid	720	21	(6/0/15)

TABLE I
SUMMARY DESCRIPTION FOR THE EMPLOYED DATASETS.

finally computed by respectively averaging the train and test accuracy rates of the $F = 5$ different folders.

B. Data sets

We have selected a benchmark of 18 datasets from the KEEL dataset repository [1]. Particularly, we have used the 5-folder cross-validation datasets provided by KEEL in the different experiments. Table I summarizes the properties of the selected datasets, showing for each dataset the number of examples (#Ex.), the number of attributes (#Atts.) and type (Real/Integer/Natural) To transform multi-class datasets into trhee-class ones, we have taken as class C_0 and C_1 the originals closest to 20% of instances and as class C_2 the union of the remainder classes.

C. Genetic algorithm details

Finally, regarding the GA used at the evolutionary tuning of the dissimilarity structures, we have used the default GA for real-coded chromosomes implemented in the *genalg* R package. It is a standard GA, with usual crossover and mutation operators, the details of which can be consulted at [20]. The GA has been run with the following configuration, that provided satisfying solutions in a feasible amount of time:

- Population Size: 50 individuals.
- Number of iterations: 20
- Mutation Chance: 0.01.
- Elitism: About 20% of the population size.

Let us note at this point that we have tried a more complex configuration for the GA used in number of iterations, specifically we have used a 40 iterations and 100 individuals with no improvements.

D. Statistical test for performance comparison

In this paper, we use some hypothesis validation techniques in order to give statistical support to the analysis of the results.

Specifically, we employ the Wilcoxon rank test [19] as a non-parametric statistical procedure for making pairwise comparisons between two algorithms. For multiple comparisons, we use the Friedman aligned ranks test, which is recommended in the literature [4], [5] to detect statistical differences among a group of results. Finally, the Holm post-hoc test [6] has been used to find the algorithms that reject the equality hypothesis with respect to a selected control method. A complete description of these tests, with many considerations and recommendations and even the software used to run this analysis can be found on the website http://sci2s.ugr.es/sicidm/.

V. Experimental results

This section is aimed to present the results of the computational experience described above, and carried out in order to study the capacity of enhancement of our bipolar adjusted classifiers with respect to the reference base classifier to which the proposed final decision tuning method is applied.

Results are grouped, for each base algorithm, in pairs for training and test, where the best global result for each considered dataset is stressed in **bold-face**. None is stressed in case of ties.

The experimental study has been obtained using R Software. Specifically, we used the *caret* package [21] for the classifiers training, fitting them through the underlying classical packages *random forest* and *nnet*, and finally the *genalg* package [20] to assess the GA.

For performing all the analysis presented in this paper we have used a computer AMD A10-6700 3.94GHz, 8GB RAM, Windows 8.1.

We can observe from the results of tables II and III the general good behaviour of the bipolar tuning method, at least regarding one of the bipolar adjustment methods, since it allows the improvement in performance of the reference algorithms.

	RF					
	Ref		bipAdd		bipLog	
	Train	Test	Train	Test	Train	Test
Aut	1.000	0.716	1.000	**0.719**	1.000	0.706
Car	0.996	**0.867**	1.000	0.854	1.000	0.857
Wnq	1.000	0.515	1.000	0.489	1.000	**0.525**
Pen	1.000	**0.903**	1.000	0.895	1.000	0.892
Pag	1.000	0.831	1.000	**0.832**	1.000	**0.832**
Der	1.000	**0.995**	1.000	0.993	1.000	0.992
Eco	1.000	0.758	1.000	**0.775**	1.000	0.764
Fla	0.796	0.783	0.805	**0.787**	0.807	0.784
Gla	1.000	0.672	1.000	0.658	1.000	**0.677**
Shu	1.000	**0.996**	1.000	**0.996**	1.000	0.995
Yea	1.000	0.377	1.000	0.366	1.000	**0.378**
Lin	0.981	0.672	0.996	0.675	0.996	**0.710**
Bal	0.612	**0.556**	0.615	0.523	0.617	0.513
Win	1.000	**0.979**	1.000	0.954	1.000	0.973
Nty	1.000	**0.935**	1.000	0.912	1.000	0.895
Hay	0.885	0.703	0.886	**0.715**	0.886	**0.715**
Con	0.788	0.280	0.807	**0.286**	0.807	0.279
Thy	1.000	0.895	1.000	**0.897**	1.000	0.891
Mean	0.948	**0.746**	0.950	0.740	0.951	0.743

TABLE II
RESULTS IN TRAIN AND TEST ACHIEVED BY THE GENETIC BIPOLAR APPROACHES APPLIED TO THE RF ALGORITHM.

Regarding the bipolar method applied to the RF classifier, in Table II we show the results and the following brief description of its behaviour.

- There is no improvement by kappa means when comparing the additive bipolar model against reference.
- The additive bipolar classifier outperforms the classification of the remainder approaches in 8 out of 18 datasets and the logistic one does so in 6 of them.
- Reference wins in 6 out of 18 datasets.
- There is a tie between the additive bipolar approach and the reference in the Shuttle dataset.

Thus we can see that we have reached improvements or ties in 12 out of 18 datasets when comparing. It is important to note the variable behaviour of the additive bipolar method in this case. Despite being the winner method in number of datasets, we can see that its mean is not the best because of the lower kappa value obtained in several of the remainder datasets.

	Nnet					
	Ref		bipAdd		bipLog	
	Train	Test	Train	Test	Train	Test
Aut	0.504	0.382	0.533	**0.385**	0.532	**0.385**
Car	1.000	0.997	1.000	0.997	1.000	0.997
Wnq	0.359	0.341	0.399	**0.356**	0.399	**0.356**
Pen	0.954	0.855	0.964	**0.866**	0.966	0.856
Pag	0.853	0.753	0.874	0.755	0.887	**0.774**
Der	1.000	0.987	1.000	**0.991**	1.000	**0.991**
Eco	0.753	**0.697**	0.779	0.680	0.777	0.688
Fla	0.785	**0.788**	0.794	0.782	0.795	0.777
Gla	0.660	0.507	0.688	**0.517**	0.687	0.513
Shu	0.991	0.976	0.993	**0.977**	0.994	**0.977**
Yea	0.440	0.360	0.473	0.379	0.473	**0.381**
Lin	0.896	0.667	0.922	0.671	0.925	**0.678**
BAl	0.600	0.586	0.603	0.562	0.603	**0.563**
Win	0.945	0.911	0.959	**0.915**	0.960	0.901
Nty	0.986	0.957	0.995	0.957	0.997	0.957
Hay	0.811	**0.615**	0.850	0.600	0.845	0.588
Con	0.356	0.334	0.383	0.336	0.383	**0.338**
Thy	0.859	0.738	0.904	0.770	0.925	**0.803**
Mean	0.764	0.692	0.784	0.694	0.786	**0.696**

TABLE III
RESULTS IN TRAIN AND TEST ACHIEVED BY THE GENETIC BIPOLAR APPROACHES APPLIED TO THE NNET ALGORITHM.

Considering the NNet classifier, the bipolar method reaches the results shown in Table III that could be interpreted as follows:

- There is an improvement by kappa means of 0.004 when comparing the logistic bipolar model against reference, being of 0.002 in case of the additive one.
- Both additive and logistic bipolar classifiers outperform the classification of the remainder approaches in 7 and 10 out of 18 datasets respectively.
- Reference wins in 3 out of 18 datasets.
- There two ties in these results.

On balance we have reached improvements or ties in 14 out of 18 datasets when comparing the bipolar approaches against the reference.

In order to detect significant differences among the results of the different approaches, we carry out the Friedman aligned rank test. This test obtains a low p-value for all the three algorithms, which implies that there are significant differences between the results provided by each method.

For this reason, we can apply a post-hoc test to compare our methodology against the remaining approaches. Specifically, a Holm test is applied using the best approach (the one with lower ranking) as control method and computing the adjusted p-value (APV) for the one with the highest ranking.

Obviously, it would be desirable for the reference to reach the highest or, at least, not the lowest ranking since it is usually associated with worse results.

Algorithm	Rank RF	Rank NNet
"Ref"	22.22	31.5
"BipAdd"	31.83	26.44
"BipLog"	28.44	24.55
p-val	0.00097	0.000913
APV	**0.1336**	**0.371**

TABLE IV
AVERAGE RANKINGS OF THE ALGORITHMS (ALIGNED FRIEDMAN), ASSOCIATED P-VALUES AND HOLM TEST APV FOR EACH ALGORITHM WITH THE MAX AGGREGATION.

Table IV, reflects that there are statistical significant differences between the three classifiers for both RF and NNet algorithms. However, in case of RF this differences and the respective statistical analysis should be carefully interpreted because of the lower ranking value obtained by the reference algorithm. In fact, the reference (RF without applying any bipolar approach) seems to reach the best results regarding the Friedman aligned rank test in spite of not being the best in number of datasets outperformed. Therefore there is no statistical evidence of the superiority of any method compared in case of RF.

Regarding the base Nnet classifier, Table IV shows the superiority of both bipolar approaches in ranking values, however the Holm post-hoc test reflects that there is not enough evidence to ensure that both bipolar approaches outperform the reference.

Comparison	R^+	R^-	p-val
RFbipAdd vs. RFRef	115.0	56.0	0.1913
RFbipLog vs. RFRef	100.0	71.0	0.5135
NNetbipAdd vs. NNetRef	100.0	53.0	0.2559
NNetbipLog vs. NNetRef	95.0	58.0	0.3684

TABLE V
WILCOXON TEST TO COMPARE THE BIPOLAR TUNING APPROACHES (R^+) AGAINST THE BASE CLASSIFIER (R^-).

The statistical analysis of the pairwise comparisons of methods, which is carried out by means of a Wilcoxon test, Table V, reflects the weak superiority of the proposed methodology when it is applied to the RF and Nnet algorithms with not so high p-values in case of additive bipolar model. Again, the application of the methodology on the RF and NNet algorithm does not reach significant improvements.

VI. Discussion and final remarks

In this paper we have studied the extension of probabilistic supervised classifiers into a bipolar knowledge representation framework by means of the introduction of a dissimilarity

structure in the set of classes. These structures enable considering different opposition or dissimilarity relationships between the available classes, that otherwise are by default considered as independent, unrelated objects. These relationships provide further information of the underlying structure of the classification problems being addressed, which can be used at the final decision or classification stage to better exploit the soft scores provided by any classifier to assess the association between each item and each class. Therefore, the introduction of dissimilarity structures may allow to strengthen the adaptation of the classifiers to each specific application context, in which classes acquire a particular semantics, thus also improving the classifier performance.

In this sense, the proposed approach can be understood as a general post processing method to fine tune the maximum decision rule usually applied to make the decision on the class assignment of each item to be classified.

To study the feasibility of the proposed approach, and particularly to remark that it can be applied to any soft classifier despite how it is obtained, we have applied it to two of the most powerful supervised classifiers, random forests and artificial neural networks. A rigorous and extensive computational experience has been conducted to analyse whether the proposed additive and logistic bipolar approaches enabled an statistically significant improvement of the base probabilistic classifiers.

Along this experimental study, we have reached several lessons learned:

- The bipolar framework improved the results of the two base machine learning algorithms considered in this work in number of datasets outperformed.
- Both the additive and logistic adjustment methods did not significantly outperform the results of the base classifier. However, they reached not so high p-values in the Wilcoxon test, specially the additive one.
- Comparing both the additive and the logistic proposed classifiers, we found there is no clear winner. In fact, this question seems to be somehow dependent on the base algorithm considered as well as on the dataset of application.

These results lead us to conclude that the proposed approach provides a suitable solution to confront three-class classification problems and improve the decision rule that manages how the intermediate soft information gathered by many classifiers is exploited.

However, we must improve the results in statistical terms so that we could ensure the superiority of our proposed methodology when applied in three-class classification problems by enlarging the benchmark of datasets, and considering several different parametric configuration for training the base classifier as well as the evolutionary search of the dissimilarity structure among the set of classes.

Regarding future research on this approach, a main line of work will be devoted to study further mechanisms than the additive and logistic aggregations for exploiting the bipolar pairs of positive and negative evidence. A particularly appealing possibility is to use these bipolar pairs as the base information of a multivalued para-consistent logic, as those proposed in [9], [10], [12]. This would allow an even more expressive representational framework to take advantage of all the information contained in the soft scores provided by classifiers.

Acknowledgement

This research has been partially supported by the Government of Spain, grant TIN2015-66471-P and the FPU fellowship grant 2015/06202 from the Ministry of Education of Spain.

References

[1] J. Alcalá-Fdez, A. Fernandez, J. Luengo, J. Derrac, S. García, L. Sánchez, and F. Herrera, (2011) KEEL data-mining software tool: Data set repository, integration of algorithms and experimental analysis framework, *Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing*, vol. 17:2-3, pp. 255-287.

[2] Breiman L. (1984) Classification and Regression Trees. New York, NY: Kluwer Academic Publishers;

[3] Breiman L. (2001) Random Forests. Mach. Learn.vol.40 5-32.

[4] Demsar J., (2006) Statistical comparisons of classifiers over multiple datasets, J. Mach. Learn. Res. 7 1-30.

[5] García S., Fernandez A., Luengo J. and Herrera F., (2010) Advanced nonparametric tests for multiple comparisons in the design of experiments in computational intelligence and data mining: Experimental analysis of power, Inform. Sciences 180(10) 2044-2064.

[6] Holm S., (1979) A simple sequentially rejective multiple test procedure, Scand. J. Stat. 6 65-70.

[7] Kumar, R. and Verma, R. (2012) Classification algorithms for data mining: A survey, International Journal of Innovations in Engineering and Technology, 2 7-14.

[8] Lim, TS., Loh, WY. and Shih, YS. (2000) A Comparison of Prediction Accuracy, Complexity, and Training Time of Thirty-Three Old and New Classification Algorithms, Machine Learning, 40 203-228.

[9] Ozturk,M., Tsoukiàs, A. (2007) Modeling uncertain positive and negative reasons in decision aiding. Decis. Support Syst. 43, 1512-1526

[10] Turunen, E., Ozturk, M., Tsoukiàs, A. (2010) Paraconsistent semantics for Pavelka style fuzzy sentential logic. Fuzzy Sets Syst. 161, 1926-1940

[11] Ripley, B. D. (1996) Pattern Recognition and Neural Networks. Cambridge.

[12] Rodríguez, J.T., Turunen, E.,Ruan,D.,Montero, J. (2014) Another paraconsistent algebraic semantics for Lukasiewicz-Pavelka logic. Fuzzy Sets Syst. 242, 132-147

[13] Rodríguez, J. T., Vitoriano, B., Montero, J. (2011) Rule-based classification by means of bipolar criteria. 2011 IEEE Symposium on Computational Intelligence in Multicriteria Decision-Making (MDCM), 197-204.

[14] Rodríguez, J. T., Vitoriano, B., Montero, J. (2012) A general methodology for data-based rule building and its application to natural disaster management. Computers & Operations Research, 39 (4) 863-873.

[15] Rodríguez JT, Vitoriano B, Gómez D, Montero, J. (2013) Classification of Disasters and Emergencies under Bipolar Knowledge Representation. In: Vitoriano B, Montero J and Ruan D (eds), Decision Aid Models for Disaster Management and Emergencies, vol. 7, Atlantis Computational Intelligence Systems, 209-232.

[16] Venables, W. N. and Ripley, B. D. (2002) Modern Applied Statistics with S. Fourth edition. Springer.

[17] Villarino, G., Gómez, D., Rodríguez, J. T. (2017). Improving Supervised Classification Algorithms by a Bipolar Knowledge Representation. In Advances in Fuzzy Logic and Technology 2017 (pp. 518-529).

[18] Villarino, G., Gómez, D., Rodríguez, J.T. et al. Soft Comput (2018). https://doi.org/10.1007/s00500-018-3320-9

[19] Wilcoxon F., (1945) Individual comparisons by ranking methods, Biometrics 1 80-83.

[20] Willighagen E., (2005) genalg: R Based Genetic Algorithm. http://cran.r-project.org/

[21] Kuhn M., (2008) Building Predictive Models in R Using the caret Package. Journal of Statistical Software, 28(5) 1-26. doi:http://dx.doi.org/10.18637/jss.v028.i05

XIX Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy (XIX ESTYLF)

ESTYLF 6: Sesión Especial: Nuevos Enfoques y Aplicaciones en la Toma de Decisiones en Ambientes de Incertidumbre I

Organizadores:

Rocío de Andrés, Teresa González Arteaga

A universal decision making model for restructuring networks based on Markov Random Fields*

*Note: The full contents of this paper have been published in the volume *Lecture Notes in Artificial Intelligence 11160* (LNAI 11160)

Julia García Cabello
Department of Applied Mathematics
University of Granada
Granada, Spain
cabello@ugr.es

Enrique Herrera-Viedma
Department of Computer Science and Artificial Intelligence
University of Granada
Granada, Spain
viedma@decsai.ugr.es

***Abstract*—The process of re-structuring physical networks is often based on local demographics. However, there are major variations across countries when defining demographics according to "local" parameters, which hinders the export of methodologies based on local specifications. This paper presents a *universal* decision making model for re-structuring networks aimed at working on a global basis since local parameters has been replaced by "internationally accepted" notions thereby allowing cross-border correlations. This a first step towards the globalization of demographic parameters which would also be fruitful in other disciplines where demographics play a role.**

Importantly, the model variables can be replaced/expanded as needed thereby providing a decision making tool that can be applied to a wide range of contexts.

***Index Terms*—Universal Decision Model, Spatial stochastic processes (Markov and Gibss Random Fields)**

Un modelo de consenso para toma de decisiones en grupo a gran escala usando conjuntos difusos dudosos

1st Rosa M. Rodríguez
Dept. de Ciencias de la Computación e I.A.
Universidad de Granada
Granada, España
rosam.rodriguez@decsai.ugr.es

2th Álvaro Labella
Dept. de Informática
Universidad de Jaén
Jaén, España
alabella@ujaen.es

3nd Luis Martínez
Dept. de Informática
Universidad de Jaén
Jaén, España
martin@ujaen.es

***Resumen*—El desarrollo tecnológico y las demandas de la sociedad han provocado que los problemas de toma de decisiones en grupo a gran escala (TDG-GS) sean cada vez más comunes. Muchos de estos problemas requieren soluciones aceptadas por todos los expertos involucrados. Para ello, se aplica un proceso de alcance de consenso. Algunos retos de los procesos de alcance de consenso para problemas de TDG-GS son, la escalabilidad y el proceso de supervisión de las preferencias de los expertos, lo que afecta al coste temporal. Teniendo en cuenta estos retos, esta contribución presenta un nuevo modelo de consenso para problemas de TDG-GS capaz de reducir el coste temporal del proceso de alcance de consenso.**

***Index Terms*—toma de decisiones en grupo a gran escala, proceso de alcance de consenso, clustering, conjunto difuso dudoso**

I. Introducción

Hoy en día existen muchos problemas que afectan a la sociedad y requieren decisiones consensuadas. En estos casos, es necesario aplicar un proceso de alcance de consenso (PAC) [8]. La mayoría de los resultados que se han obtenido en este área se centran en toma de decisiones en grupo (TDG) con pocos expertos, sin embargo el desarrollo tecnológico y la actual demanda de la sociedad (redes sociales, e-group shopping) hacen necesario proponer PAC que sean capaces de manejar problemas con grandes grupos (como se indicó en [2] más de 20 expertos). Esta situación implica la aparición de nuevos retos en los PAC, como ya ha sido mencionado por otros investigadores [3]: i) escalabilidad, ii) coste temporal, iii) supervisión constante de las preferencias, iv) fuerte desacuerdos entre expertos, v) dificultades para entender/visualizar el actual estado de acuerdo entre expertos, etc.

El estudio de TDG a gran escala (TDG-GS), se puede clasificar en 4 temáticas:

- Métodos de clustering en TDG-GS
- PAC en TDG-GS
- Modelos de TDG-GS
- Sistemas de soporte para TDG-GS

Recientemente se han indicado las principales limitaciones que los PAC clásicos presentan cuando éstos son aplicados a problemas de TDG-GS [3], [4] y aunque existen ya algunas propuestas iniciales, aún no son capaces de evitar estas limitaciones.

Por tanto, teniendo en cuenta los retos, y las limitaciones de los PAC clásicos en los problemas de TDG-GS, esta contribución presenta un modelo de consenso para TDG-GS que evita el problema de la escalabilidad y la constante supervisión de las preferencias, ambos relacionados con el coste temporal del PAC. Esta propuesta incluye las siguientes novedades:

- Detecta subgrupos de expertos teniendo en cuenta la similitud de sus preferencias y calcula la relevancia de cada subgrupo considerando su tamaño y cohesión.
- La mayoría de los PAC agregan las preferencias de los expertos al principio del proceso, ésto provoca pérdida de información y por tanto desviación en los resultados. Para evitar esta situación, esta propuesta modela las preferencias de los subgrupos de expertos mediante conjuntos difusos dudosos (CDD) [9].
- Define un nuevo proceso de feedback adaptativo que guía el PAC según el grado de consenso alcanzado en cada momento.

El resto de esta contribución se organiza como sigue: la Sección 2 hace una breve revisión sobre TDG-GS y CDD. La Sección 3 presenta un nuevo modelo de consenso para resolver problemas de TDG-GS que utiliza CDD, y finalmente, la Sección 4 termina con algunas conclusiones.

II. Preliminares

Esta sección revisa algunos conceptos básicos sobre TDG-GS, PAC y CDD que serán utilizados en el modelo de consenso propuesto.

II-A. Toma de decisiones en grupo a gran escala

El concepto de TDG-GS es muy similar al de TDG, con la diferencia de que en el primero el número de expertos que participa en el problema es mucho más grande que en el segundo. Un problema de TDG-GS consiste de i) un conjunto de alternativas $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $(n \geq 2)$ como

posible solución al problema, y un conjunto de expertos $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$, $(m >> n)$, que expresan sus opiniones sobre el conjunto de alternativas X. Una estructura muy utilizada por los expertos para proporcionar sus preferencias en ambos tipos de problemas de TDG es la relación de preferencia difusa, $P = (p_{ij})_{nxn} \subset XxX,\ p_{ij} \in [0, 1]$.

Los problemas de TDG-GS se pueden resolver mediante un proceso de selección, similar al utilizado en TDG. Sin embargo, este proceso no garantiza que la decisión seleccionada sea siempre aceptada por todos los expertos que participan en el problema, ya que algunos de ellos podrían considerar que sus opiniones no se tuvieron en cuenta. Una posible solución para evitar este inconveniente y obtener decisiones aceptadas por todos los expertos involucrados en el problema, es añadir un PAC. Este proceso implica que los expertos modifiquen sus preferencias para que estén más cerca de la opinión colectiva.

Un proceso de alcance de consenso es un proceso de discusión iterativo y dinámico que puede realizarse de diferentes formas, tal y como se indica en [4]. La Figura 1 muestra un esquema general de un PAC.

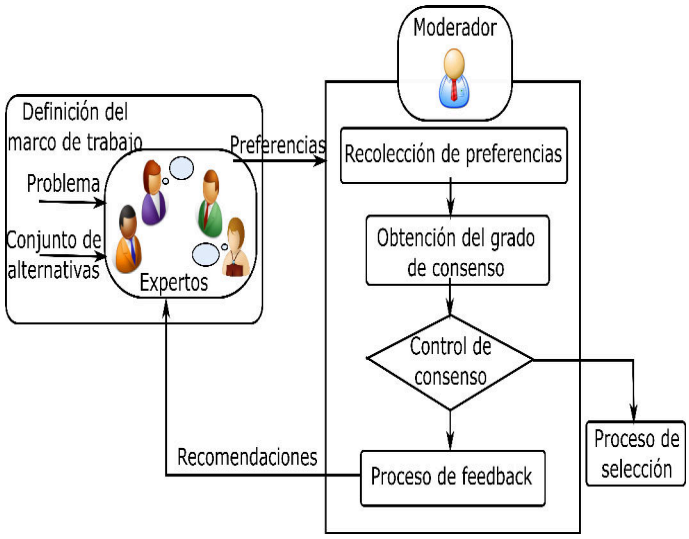


Figura 1. Esquema general de un PAC

En TDG-GS también es necesario aplicar un PAC para obtener soluciones aceptadas por todos los expertos involucrados. Varias propuestas han sido ya introducidas en [5], [6], [10], sin embargo, estas propuestas agregan las preferencias de los expertos al inicio del proceso de decisión, lo que implica pérdida de información y no tienen en cuenta el nivel de acuerdo alcanzado a lo largo del PAC, lo que puede provocar un alto coste temporal, ya que require una mayor supervisión de las preferencias durante el proceso de discusión y feedback.

Para evitar estas limitaciones, nuestro modelo incluye un proceso para detectar y ponderar subgrupos, mantener la información inicial fusionando las preferencias mediante CDD en lugar de usar técnicas de agregación, y definir un nuevo proceso de feeback adaptativo.

II-B. Uso de información dudosa

El concepto de CDD introducido en [9], modela la incertidumbre obtenida de la duda que puede tener un experto cuando quiere asignar el grado de pertenencia de un elemento a un conjunto.

Definición 1: [9] Sea X un conjunto de referencia, un conjunto difuso dudoso sobre X es una función $\hbar$ que devuelve un subconjunto de valores en el intervalo [0,1]:

$$\hbar : X \to \wp([0, 1]). \tag{1}$$

Esta definición fue completada con la siguiente representación matemática, $A = \{\langle x, h_A(x)\rangle : x \in X\}$, donde $h_A(x)$ es un elemento difuso dudoso (EDD) y es un conjunto de valores en [0,1].

También se definió el concepto de relación de preferencia difusa dudosa para problemas de TDG.

Definición 2: [11] Sea X un conjunto de referencia, una relación de preferencia difusa dudosa (RPDD) sobre X se representa mediante la matriz $H = (h_{ij})_{n\times n} \subset X \times X$, donde $h_{ij} = \{\gamma_{ij}^s | s = 1, 2, \ldots, \#h_{ij}\}(\#h_{ij}$ es el número de elementos en $h_{ij})$ es un EDD que indica el grado de pertenecia para el cual x_i es preferido a x_j. Además,

$\gamma_{ij}^{\sigma(s)} + \gamma_{ji}^{\sigma'(s)} = 1, \quad h_{ii} = \{0{,}5\}, \quad \#h_{ij} = \#h_{ji}, \quad i, j = \{1, 2, \ldots, n\}$

$\gamma_{ij}^{\sigma(s)} < \gamma_{ij}^{\sigma(s+1)}, \quad \gamma_{ji}^{\sigma'(s+1)} < \gamma_{ji}^{\sigma'(s)},$

donde $\{\sigma(1), \ldots, \sigma(\#h_{ij})\}$ es una permutación de $\{1, \ldots, \#h_{ij}\}$, tal que, $\gamma_{ij}^{\sigma(s)}$ es el s^{th} elemento más pequeño en h_{ij}.

En algunas ocasiones para realizar operaciones con CDD es necesario que el número de elementos contenidos en el EDD sea el mismo para poder realizar los cálculos de forma adecuada. Para ello es necesario aplicar un proceso de normalización.

Definición 3: Sea h_i el EDD con menor cardinalidad y $h_i^- = min\{\gamma | \gamma \in h_i\}$ y $h_i^+ = max\{\gamma | \gamma \in h_i\}$, entonces el valor γ' que se añade en el EDD, h_i, es calculado como sigue:

$$\gamma' = \eta h_j^+ + (1 - \eta)h_j^-, \tag{2}$$

donde $\eta(0 \leq \eta \leq 1)$, es un parámetro de optimización que refleja la actitud que tiene el experto respecto al riesgo. Si $\eta = 1$, el valor añadido es $\gamma' = h_i^+$, que indica un punto de vista optimista; si $\eta = 0$, el valor añadido es $\gamma' = h_i^-$, que indica un punto de vista pesimista; y si $\eta = 1/2$, entonces $\gamma' = 1/2(h_i^+ + h_i^-)$, lo que significa que el experto es neutro.

III. Modelo de consenso adaptativo para TDG-GS

Esta sección presenta un nuevo modelo de consenso para TDG-GS capaz de tratar con el problema de escalabilidad y la constante supervisión de las preferencias de los expertos en el proceso de feedback.

- Para lograr el primer objetivo, el modelo incluye un proceso de clustering para detectar subgrupos de expertos basado en la similitud de sus preferencias. Las preferencias de cada subgrupo son modeladas mediante CDD que

representan la duda del grupo. Además los subgrupos son ponderados según su tamaño y cohesión.
- El segundo objetivo es alcanzado mediante un proceso adaptativo que modifica el proceso de feedback en el PAC atendiendo al grado de consenso alcanzado en cada ronda.

El modelo extiende el esquema general mostrado en la Figura 1 añadiendo dos nuevas fases: i) gestión de subgrupos, ii) proceso de feedback adaptativo, y modifica otras dos: i) definición del marco de trabajo, ii) obtención del grado de consenso. El modelo se divide por tanto en 6 fases (ver Fig. 2).

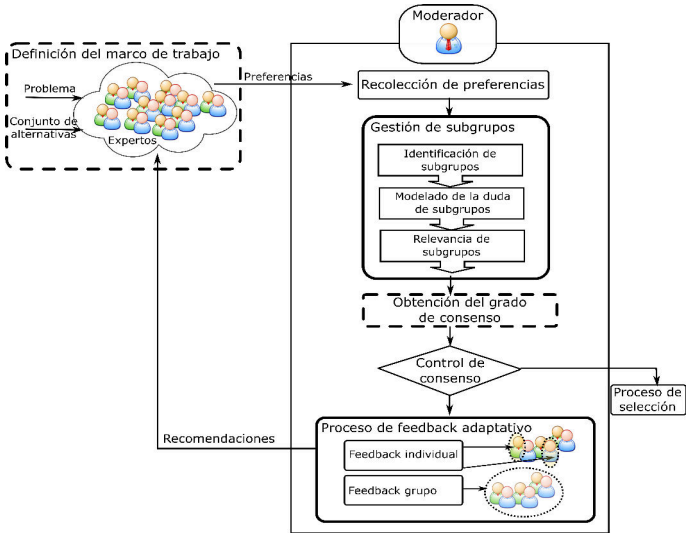


Figura 2. Esquema del modelo de consenso propuesto

III-A. *Definición del marco de trabajo*

En un problema de TDG-GS hay un conjunto de posibles alternativas $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ y un gran número de expertos $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$ implicados en el problema, siendo $m >> n$. Normalmente se definen dos parámetros, el umbral de consenso y el número máximo de rondas de discusión. Sin embargo, en este modelo es necesario introducir un nuevo parámetro que pueda controlar el proceso adaptativo a lo largo del PAC. Por tanto, en nuestro modelo se definen 3 parámetros:

- $\vartheta \in [0, 1]$: es el umbral de consenso establecido para alcanzar el consenso.
- $\delta \in [0, 1]$, $\delta < \vartheta$: es un parámetro que se utiliza en el proceso de feedback adaptativo para determinar el nivel de consenso alcanzado (alto o bajo).
- Max_rondas: este parámetro controla el número máximo de rondas permitidas en el problema de TDG-GS.

III-B. *Recolección de preferencias*

Cada experto $e_r \in E$, proporciona sus preferencias sobre X mediante una relación de preferencia difusa (RPD), $P^r = (p^r_{ij})_{n\times n}$, la cual es recíproca $p^r_{ij} + p^r_{ji} = 1$, $i, j \in 1, \ldots, n$.

III-C. *Gestión de subgrupos*

Como hemos comentado anteriormente, el primer objetivo que nos planteamos alcanzar es evitar el problema de escalabilidad en TDG-GS y para ello consideramos que de todos los expertos involucrados en el problema, algunos de ellos tienen preferencias similares. Por tanto, la idea principal en esta fase es reducir el número de preferencias. Esta fase se divide en 3 procesos.

1) Identificación de subgrupos

Para identificar grupos de expertos con preferencias similares aplicamos un algoritmo basado en el fuzzy c-means, pero adaptado a nuestro problema.

1. Inicialmente hay un cluster para cada alternativa, $C = \{C^1, \ldots, C^n\}$.
2. Se obtiene un centroide c^l para cada cluster. Existen distintas formas de inicializar los centroides, en esta propuesta como el problema es conocido, cada centroide es inicializado con una RPD que representa la preferencia de una alternativa sobre el resto:
$$c^1 = \begin{pmatrix} - & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & - & 0{,}5 & \cdots & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}5 & - & \cdots & 0{,}5 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & \cdots & - \end{pmatrix}, \cdots, c^n = \begin{pmatrix} - & 0{,}5 & 0{,}5 & \cdots & 0 \\ 0{,}5 & - & 0{,}5 & \cdots & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & - & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & - \end{pmatrix}$$
3. Se calcula el grado de pertenencia de cada RPD, P^r, a cada centroide $c^{l,t}$, $\mu_{c^{l,t}}(P^r) \in [0, 1]$,
$$\mu_{c^{l,t}}(P^r) = \frac{(1/d(P^r, c^{l,t}))^{1/(b-1)}}{\sum_{u=1}^{n}(1/d(P^r, c^{u,t}))^{1/(b-1)}} \quad (3)$$
donde $d(P^r, c^{l,t})$ es la distancia de Minkowski, t es la iteración actual, y b indica el grado de difusicidad de los clusters. Cuanto mayor sea el valor de b, más difuso es el cluster [1]. Normalmente este parámetro se fija con el valor 2.
4. Se calculan los nuevos centroides según las RPD de los expertos incluidas en cada cluster.
$$c^{l,t+1}_{ij} = \frac{1}{|C^{l,t}|} \sum_{P^r \in C^{l,t}} p^r_{ij}, i, j \in \{1, \ldots, n\}, \quad (4)$$
donde $|C^{l,t}|$ es el número de relaciones de preferencia que pertenecen al cluster C^l en la iteración t.
5. El algoritmo termina cuando todos los clusters se estabilizan, es decir, cuando la variación de los grados de preferencia entre dos iteraciones consecutivas se acercan a 0.
$$\frac{\sum_{r=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}|\mu_{c^{l,t}}(P^r) - \mu_{c^{l,t-1}}(P^r)|}{m \cdot n} \leq \epsilon \quad (5)$$
donde ϵ es un umbral que debería ser cercano a 0.

2) Modelado de la duda de subgrupos

Para evitar la pérdida de información en las etapas iniciales del PAC, en lugar de simplificar el modelado de preferencias aplicando técnicas de agregación, en esta propuesta consideramos que aunque las preferencias de los expertos en el subgrupo sean similares, reflejan la duda del grupo. Por tanto,

sea $G^l = \{e_1^l, \ldots, e_r^l\}$ un subgrupo de expertos que pertenece al cluster, C^l, con RPD, $P^{l1} = (p_{ij}^{l1})_{n\times n}, \ldots, P^{lr} = (p_{ij}^{lr})_{n\times n}$, construimos una RPDD, $HP^l = (h_{ij}^l)_{n\times n}$, $l \in \{1, \ldots, n\}$, fusionando las preferencias de todos los expertos del subgrupo G^l, tal que, $h_{ij}^l = \{p_{ij}^{lk} | k = 1, 2, \ldots, |G^l|\}$ siendo $|G^l|$ la cardinalidad de G^l.

3) Relevancia de subgrupos

La relevancia de cada subgrupo se obtiene mediante dos características:

- Tamaño: es el número de expertos del subgrupo.
- Cohesión: indica cómo de cerca están los expertos unos de otros dentro del grupo.

El tamaño se puede obtener directamente del proceso de *identificación de subgrupos*, sin embargo, para obtener la cohesión es necesario definir un nuevo enfoque. Esta fase se divide en 3 pasos que se detallan a continuación.

a) Cálculo de la cohesión de un subgrupo

Para obtener la cohesión de las preferencias de los expertos $HP^l = (h_{ij}^l)_{n\times n}$, que pertenecen al subgrupo G^l, hemos definido un método geométrico que consiste en calcular el área dada por las valoraciones máximas y mínimas de h_{ij}^l, sobre el conjunto de alternativas X. Como se puede observar en la Figura 3, el eje de abscisas X representa el conjunto Z formado por todos los pares de alternativas, donde cada par $z_t = (x_i, x_j) i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j)$ es colocado equidistantemente sobre el eje de abscisas X. El área se obtiene mediante los valores máximo, p_{ij}^+, y mínimo, p_{ij}^-, de cada par de alternativas. Para ello es necesario establecer el orden en el que los pares de alternativas son colocados en el eje de abscisas X. En esta propuesta, hemos considerado las valoraciones mínimas en orden creciente.

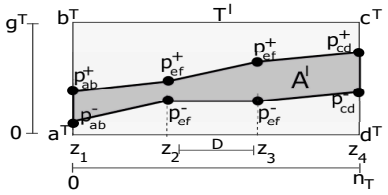


Figura 3. Representación gráfica de la cohesión de un subgrupo.

Formalmente el método geométrico se define como sigue:

1. Sea T^l el área total del rectángulo definido por los puntos a^T, b^T, c^T y d^T (ver Fig. 3), i.e., $T^l = g^T \times n^T$.
2. Sea $I = \bigcup_{i,j\in n, i\neq j}\{(i,j)\}$ un conjunto con todas los posibles combinaciones sobre el conjutno de alternativas $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Los valores máximos y mínimos para cada par de alternativas se obtienen de la siguiente forma:
   $\gamma_{ij}^- = min\{\gamma_{ij}^1, \gamma_{ij}^2, \ldots, \gamma_{ij}^s\},\ \forall (i,j) \in I$
   $\gamma_{ij}^+ = max\{\gamma_{ij}^1, \gamma_{ij}^2, \ldots, \gamma_{ij}^s\},\ \forall (i,j) \in I$
   El primer y último par de alternativas considerado en el eje de la X son:
   $\gamma_{ab}^- = min_{i,j\in I}\{\gamma_{ij}^-\},\ (a,b) \in I$
   $\gamma_{cd}^+ = max_{i,j\in I}\{\gamma_{ij}^-\},\ (c,d) \in I$
   Definimos una función f para obtener los indices de los pares de alternativas, $f : \{z_1, z_2, \ldots, z_{n(n-1)}\} \rightarrow I$.
   El área A^l, comprendida entre los valores máximo y mínimo ordenados en el eje de la X se calcula como sigue:

$$A^l = \left[\sum_{i,j\in I}(\gamma_{ij}^+ - \gamma_{ij}^-) - \frac{(\gamma_{ab}^+ - \gamma_{ab}^-) + (\gamma_{cd}^+ - \gamma_{cd}^-)}{2}\right] \cdot D \tag{6}$$

   donde D es la distancia entre z_i y z_{i+1}, que en este caso es 1.
3. Finalmente se obtiene la cohesión,

$$cohesion(G^l) = 1 - \frac{A^l}{T^l} \tag{7}$$

b) Cálculo del tamaño de un subgrupo

El valor del tamaño de un subgrupo G^l, se puede obtener directamente de la fase de *identificación de subgrupos*, pero su representación debe ser ajustada y adaptada al número de expertos que participan en el problema de TDG-GS. Para ello, proponemos un proceso basado en computación con palabras en el que el tamaño es modelado mediante una función de pertenencia difusa $\mu_{tamanio}$ como la mostrada en la Figura 4, en la que el universo de discurso es el número de expertos en el subgrupo. Los puntos a y b de la función dependen del número de alternativas y expertos en el problema de TDG-GS.

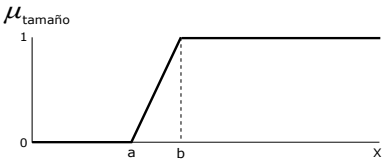


Figura 4. Función de pertenencia

c) Cálculo de la relevancia de un subgrupo

Para obtener el peso de cada subgrupo, agregamos los valores que hemos obtenido para el tamaño y cohesión con la siguiente función.

Definición 4: Sea $Y_{G^l} = \{y_1, y_2\}$ los valores obtenidos para el tamaño y cohesión, $y_1, y_2 \in [0, 1]$, del subgrupo G^l, los cuales son agregados mediante la siguiente ecuación,

$$\varphi(Y_{G^l}) = (1 + y_2)^{y_1\beta} \tag{8}$$

siendo $\beta > 0$ un parámetro para incrementar/decrementar la influencia de la cohesión en el cálculo del peso.

Finalmente, estos valores son normalizados.

$$w_l = \frac{\varphi(Y_{G^l})}{\sum_{z=1}^{n}\varphi(Y_{G^z})}, \forall l \in \{1, \ldots, n\}. \tag{9}$$

III-D. Obtención del grado de consenso

El grado de consenso entre expertos se calcula mediante un proceso de 3 pasos.

1. Para cada par de subgrupos G^l y G^k, se calcula una matriz de similitud $MS^{lk} = (ms_{ij}^{lk})_{n\times n}$, $ms_{ij}^{lk} = 1 -$

$d(h_{ij}^l, h_{ij}^k)$, donde d es una medida de distancia para EDD [7].

En este paso hay que tener en cuenta que si el número de valores en el EDD de cada RPDD es diferente, es necesario aplicar un proceso de normalización (ver Def. 3. Por tanto, todas las RPDD $HP^l(h_{ij}^l)_{n\times n}$, son normalizadas, $\overline{HP}^l = (\bar{h}_{ij}^l)_{n\times n}$ antes de calcular las matrices de similitud.

2. Las matrices de similitud son agregadas para obtener una matriz de consenso, $MC = (mc_{ij})_{n\times n}$. Aunque diferentes operadores de agregación pueden ser utilizados, sin pérdida de generalidad en esta propuesta usamos la media aritmética,

$$mc_{ij} = \frac{\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{k=l+1}^{n} ms_{ij}^{lk}}{n(n-1)/2} \tag{10}$$

3. El grado de consenso se calcula a dos niveles utilizando la matriz de consenso MC:
   - Nivel de alternativas: el grado de consenso para cada alternativa se calcula como,

$$ca_i = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1, i\neq j}^{n} mc_{ij} \tag{11}$$

   - Nivel de relación de preferencia: el grado de consenso entre todos los expertos que participan en el problema de TDG-GS se calcula como,

$$gc = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ca_i \tag{12}$$

III-E. Control de consenso

En esta fase se compara el grado de consenso gc obtenido en la fase anterior, con el umbral de consenso establecido $\vartheta \in [0,1]$. Si $gc \geq \vartheta$, el proceso de consenso termina, en caso contrario, es necesario realizar otra ronda de discusión. El número máximo de rondas viene dado por el parámetro Max_rondas.

III-F. Proceso de feedback adaptativo

Cuando el grado de consenso alcanzado gc no es suficiente, es necesario realizar otra ronda de discusión para incrementar el grado de consenso entre los expertos que participan en el problema. Esta ronda de discusión está guiada por un proceso de feedback. Los modelos de consenso existentes para TDG-GS no tienen en cuenta el grado de consenso alcanzado en cada ronda para adaptar el proceso de feedback, esto implica un proceso de supervisión más complejo y largo. Dado que el segundo objetivo de esta propuesta es reducir la constante supervisión de las preferencias de los expertos, en este modelo se define un proceso de feedback adaptativo que adapta la generación de recomendaciones según el grado de consenso alcanzado en cada ronda. Para distinguir entre los dos procesos de feedback, se introduce un nuevo parámetro δ. El proceso de feedback se divide en 3 pasos.

- Obtener una matriz colectiva, HP^C, agregando las preferencias representadas mediante RPDD normalizadas $\{\overline{HP}^1, \ldots, \overline{HP}^n\}$ utilizando un operador de agregación para CDD [7].
- Calcular la proximidad entre cada subgrupo $\{\overline{HP}^1, \ldots, \overline{HP}^n\}$, y la matriz colectiva HP^C, utilizando una medida de similitud para CDD [7]:

$$pr^l = sim(HP^C, \overline{HP}^l) = 1 - d(HP^C, \overline{HP}^l) \tag{13}$$

  Los valores de proximidad obtenidos pr, son utilizados para identificar a los subgrupos más alejados de la opinión colectiva.
- Dependiendo del nivel de consenso alcanzado, el proceso de feedback puede ir dirigido a todos los expertos de un subgrupo o sólo a aquellos expertos más alejados. A continuación definimos ambos procesos.

Proceso de feedback en grupo

Cuando el grado de consenso $gc < \delta$, significa que el consenso es *bajo* y es necesario realizar muchos cambios para incrementar el grado de consenso. En este caso, se recomienda a todos los expertos de los subgrupos más alejados que modifiquen sus preferencias. Para ello, es necesario identificar los subgrupos más alejados y seleccionar los pares de alternativas a cambiar.

- Si $pr^l \leq \overline{pr}$, entonces seleccionamos el subgrupo G^l, donde $\overline{pr}$ es el valor medio de los valores de proximidad obtenidos, $\overline{pr} = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} pr^l$.
- Si $ca_i \leq \vartheta$, entonces seleccionamos la alternativa x_i y buscamos los pares de alternativas,
  - Si $pr_{ij}^l \leq \overline{pr}_i$, entonces seleccionamos el par de alternativas (x_i, x_j), siendo $\overline{pr}_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} pr_{ij}^l$ y $pr_{ij}^l = 1 - d(h_{ij}^C, h_{ij}^l)$.

Una vez se hayan identificado los subgrupos y pares de alternativas, es necesario establecer la dirección del cambio, es decir, si hay que incrementar o decrementar los valores de las preferencias. Las reglas de dirección son las siguientes:

- Si $\nu(h_{ij}^l) < \nu(h_{ij}^C)$, entonces todos los expertos que pertenecen al subgrupo G^l deberían incrementar sus preferencias para el par de alternativas (x_i, x_j).
- Si $\nu(h_{ij}^l) > \nu(h_{ij}^C)$, entonces todos los expertos que pertenecen al subgrupo G^l deberían decrementar sus preferencias para el par de alternativas (x_i, x_j).

Donde los valores $\nu(h_{ij}^l)$ y $\nu(h_{ij}^C)$ son obtenidos mediante la función de score para EDD definida mediante la siguiente ecuación:

$$\nu(h) = \frac{1}{\#h}\sum_{s=1}^{\#h} \gamma^s \tag{14}$$

Proceso de feedback individual

En este caso $\delta \leq gc < \vartheta$, lo que significa que el nivel de consenso es *alto*, pero no lo suficiente para alcanzar el consenso, por tanto, el número de cambios es mucho menor que con el anterior proceso de feedback, y sólo aquellos expertos cuya opinión esté más alejada de la opinión colectiva tienen que cambiar sus preferencias. Para ello, hay que identificar el

subgrupo G^l, el par de alternativas (x_i, x_j) y los expertos e_r que están en desacuerdo.

- Si $pr^l \leq \overline{pr}$, entonces seleccionamos el subgrupo G^l.
- Si $ca_i \leq \vartheta$, entonces seleccionamos la alternativa x_i y
  - Si $pr^l_{ij} \leq \overline{pr}_i$, entonces seleccionamos el par de alternativas (x_i, x_j).
- Si $1 - d(\nu(h^C_{ij}), p^{lr}_{ij}) \leq \overline{pr}_i\}$, entonces seleccionamos el experto e_r.

Los expertos seleccionados deberían cambiar sus preferencias según las siguientes reglas de dirección.

- Si $p^{lr}_{ij} < \nu(h^C_{ij})$, entonces el experto $e_r \in G^l$ debería incrementar su preferencia sobre el par de alternativas (x_i, x_j).
- Si $p^{lr}_{ij} > \nu(h^C_{ij})$, entonces el experto $e_r \in G^l$ debería decrementar su preferencia para el par de alternativas (x_i, x_j).
- Si $p^{lr}_{ij} = \nu(h^C_{ij})$, no es necesario realizar cambios.

IV. Conclusiones

Los problemas de TDG-GS son cada vez más comunes y las decisiones son más apreciadas y aceptadas por los expertos involucrados cuando éstas son consensuadas. Para ello, es necesario aplicar PAC. Los modelos de consenso existentes, consumen mucho tiempo, debido a la supervisión de las preferencias de los expertos y en problemas de TDG-GS este tiempo se incrementa. Por tanto, esta contribución se centra en reducir el coste temporal relacionado con la escalabilidad y el proceso de supervisión de las preferencias de los expertos definiendo un nuevo modelo de consenso para TDG-GS.

Agradecimientos

Este trabajo está parcialmente financiado por el proyecto de investigación TIN2015-66524-P, el Ministerio de Economía y Competitividad Juan de la Cierva Incorporación (FPDI-2013-18193) y fondos FEDER.

Referencias

[1] J. Bezdek. *Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms*. Springer, 1981.

[2] X.H. Chen and Rong Liu. Improved clustering algorithm and its application in complex huge group decision-making. *Systems Engineering and Electronics*, 28(11):1695–1699, 2006.

[3] Á. Labella, Y. Liu, R. M. Rodríguez, and L. Martínez. Analyzing the performance of classical consensus models in large scale group decision making: A comparative study. *Applied Soft Computing*, 67:677–690, 2018.

[4] I. Palomares, F.J. Estrella, L. Martínez, and F. Herrera. Consensus under a fuzzy context: Taxonomy, analysis framework afryca and experimental case of study. *Information Fusion*, 20:252–271, 2014.

[5] I. Palomares, L. Martínez, and F. Herrera. A consensus model to detect and manage noncooperative behaviors in large-scale group decision making. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 22(3):516–530, 2014.

[6] F.J. Quesada, I. Palomares, and L. Martínez. Managing experts behavior in large-scale consensus reaching processes with uninorm aggregation operators. *Applied Soft Computing*, 35:873 – 887, 2015.

[7] R.M. Rodríguez, L. Martínez, V. Torra, Z.S. Xu, and F. Herrera. Hesitant fuzzy sets: state of the art and future directions. *International Journal of Intelligent Systems*, 29(6):495–524, 2014.

[8] S. Saint and J. R. Lawson. *Rules for Reaching Consensus. A Modern Approach to Decision Making*. Jossey-Bass, 1994.

[9] V. Torra. Hesitant fuzzy sets. *International Journal of Intelligent Systems*, 25(6):529–539, 2010.

[10] X.H. Xu, Z.J. Du, and X.H. Chen. Consensus model for multi-criteria large-group emergency decision making considering non-cooperative behaviors and minority opinions. *Decision Support Systems*, 79:150 – 160, 2015.

[11] B. Zhu and Z.S. Xu. Regression methods for hesitant fuzzy preference relations. *Technological and Economic Development of Economy*, 19:S214–S227, 2013.

Free Double Hierarchy Hesitant Fuzzy Linguistic Term Sets in Group Decision-Making

1st Jordi Montserrat-Adell
UPC - BarcelonaTech
ESADE - Ramon Llull University
Barcelona, Spain
jordi.montserrat-adell@upc.edu

2nd Zeshui Xu
Sichuan University
Chengdu, China
xuzeshui@263.net

3rd Xunjie Gou
Sichuan University
Chengdu, China
University of Granada
Granada, Spain
gouxunjie@qq.com

4th Núria Agell
ESADE - Ramon Llull University
Barcelona, Spain
nuria.agell@esade.edu

***Abstract*—Hesitant fuzzy linguistic term sets have been an active field of research in recent times. Notwithstanding its usefulness to capture the human way of reasoning using linguistic expressions involving different levels of precision, in some situations they do not depict enough details. In this paper, we present a new kind of linguistic term sets, called free double hierarchy linguistic term sets, and their corresponding free double hierarchy hesitant fuzzy linguistic elements, in order to describe the complexity of linguistic expressions used by the decision makers in a more accurate and precise way. Furthermore, an order and a distance between free double hierarchy hesitant fuzzy linguistic elements are introduced to present an approach based on the TOPSIS method to rank alternatives with free double hierarchy hesitant fuzzy linguistic information by taking into consideration the opinions of a group of decision makers.**

***Index Terms*—Linguistic modeling, Group decision-making, Free double hierarchy linguistic term sets, Free double hierarchy hesitant fuzzy linguistic term sets, TOPSIS**

I. Introduction

This work summarizes the contribution presented by Montserrat-Adell et al. of a new methodology for Group Decision-Making (GDM) under linguistic assessments [4]. In this paper, an extension of the Double Hierarchy Hesitant Fuzzy Linguistic Term Sets (DHHFLTSs) is proposed. Different approaches involving linguistic assessments have been presented in the decision-making literature to deal with the uncertainty connate with human preferences [2], [3]. Furthermore, different levels of precision can be used to give more realistic assessments when uncertainty increases [5]. To model this kind of situations, HFLTS were introduced in [6].

With the aim of allowing the decision makers (DMs) to express themselves in a more natural way while being more precise on their assessments, Gou et al. introduced the DHS-FLTSs [1] by adding a second hierarchy to each linguistic term of the first scale. This allows expressions such as *very good* or *slightly bad* to arise.

This new extension, called the Free Double Hierarchy Hesitant Fuzzy Linguistic Term Sets (FDHHFLTSs), overcomes the main issues presented by the DHHFLTSs. The introduction of this new structure, allows each DM involved in a GDM situation to choose the second hierarchy LTS that he or she thinks that suits it better, with as many terms as desired. These terms can be different for each term of the first hierarchy and for each DM.

Furthermore, an order and a distance between FDHHFLEs are also presented in this paper in order to compare and quantify distances between linguistic assessments provided by the decision makers by means of the aforementioned structure. These order and distance are used to introduce a free double hierarchy approach based on the well-known multi-criteria decision-making TOPSIS ranking method, enabling us to rank alternatives that have been assessed by means of free double hierarchy hesitant fuzzy linguistic information.

The rest of this paper is structured as follows: Section II summarizes the main contributions of the original paper and Section III presents the most remarkable conclusions and lines of futures research of the topic.

II. Free Double Hierarchy

DHLTSs are a useful tool to describe, in a mathematical way, possible linguistic assessments provided by the decision makers in a group decision-making problem. Yet they present some shortcomings such as the fact that the second hierarchy scale is the same for all the linguistic terms of the first hierarchy. However, whilst "*extremely*" applies well for some linguistic terms such as "*good*" (resulting in "*extremely good*"), it does not apply that well for some other linguistic terms, leading to confusing, or even meaningless, linguistic terms such as "*extremely regular*". Same thing happens with "*almost perfect*", which is a clear and common linguistic expression, and "*almost regular*", which is not clear. In order to fix this issue, we propose the following extension of the DHLTSs:

Definition 1: Let $\mathcal{S} = \{s_t \mid t = -\tau, \dots, -1, 0, 1, \dots, \tau\}$ and $\mathcal{O}^t = \{o_k^t \mid k = -\zeta_t, \dots, -1, 0, 1, \dots, \zeta_t\}$ for all $t \in \{-\tau, \dots, -1, 0, 1, \dots, \tau\}$ be the first and second hierarchies of LTSs respectively. Then, a *Free Double Hierarchy Linguistic Term Set (FDHLTS),* $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}^{\mathcal{F}}$, can be expressed in a mathematical form as:

$$\mathcal{S}_{\mathcal{O}}^{\mathcal{F}} = \{s_{t<o_k^t>} \mid \begin{array}{l} t = -\tau, \dots, -1, 0, 1, \dots, \tau; \\ k = -\zeta_t, \dots, -1, 0, 1, \dots, \zeta_t\}. \end{array}$$

Each $s_{t<o_k^t>}$ is called a *Free Double Hierarchy Linguistic Term (FDHLT),* where o_k^t expresses the second hierarchy linguistic term when the first hierarchy linguistic term is s_t.

Remark 1: For symmetry reasons, as it can be seen in Figure 1, the FDHLTs contained in $\mathcal{O}_-^{-\tau} = \{s_{-\tau<o^{-\tau}_{-\zeta_{-\tau}}>}, s_{-\tau<o^{-\tau}_{-\zeta_{-\tau}+1}>}, \ldots, s_{-\tau<o^{-\tau}_{-1}>}\}$ as well as in $\mathcal{O}_+^{\tau} = \{s_{\tau<o_1^{\tau}>}, s_{\tau<o_2^{\tau}>}, \ldots, s_{\tau<o_{\zeta_\tau}^{\tau}>}\}$ should be dismissed. Therefore, from now on, $\mathcal{O}^{-\tau}$, $\mathcal{O}^{\tau}$ and $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}^{\mathcal{F}}$ are used throughout this paper, without loss of generality, for $(\mathcal{O}^{-\tau} \setminus \mathcal{O}_-^{-\tau})$, $(\mathcal{O}^{\tau} \setminus \mathcal{O}_+^{\tau})$ and $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}^{\mathcal{F}} \setminus (\mathcal{O}_-^{-\tau} \cup \mathcal{O}_+^{\tau})$ respectively to simplify the notation.

Example 1: Let $\mathcal{S} = \{s_{-2} = \text{“}null\text{”},\ s_{-1} = \text{“}bad\text{”},\ s_0 = \text{“}regular\text{”},\ s_1 = \text{“}good\text{”},\ s_2 = \text{“}perfect\text{”}\}$ be the first hierarchy LTS with $\tau = 2$ and let

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}^{-2} &= \{o_0^{-2} = \text{“}completely\text{”}, o_1^{-2} = \text{“}almost\text{”},\\
&\quad o_2^{-2} = \text{“}close\ to\text{”}\},\\
\mathcal{O}^{-1} &= \{o_{-3}^{-1} = \text{“}extremely\text{”}, o_{-2}^{-1} = \text{“}unusually\text{”},\\
&\quad o_{-1}^{-1} = \text{“}very\text{”}, o_0^{-1} = \text{“}simply\text{”}, o_1^{-1} = \text{“}pretty\text{”},\\
&\quad o_2^{-1} = \text{“}slightly\text{”}, o_3^{-1} = \text{“}hardly\text{”}\},\\
\mathcal{O}^{0} &= \{o_{-2}^{0} = \text{“}very\ low\text{”}, o_{-1}^{0} = \text{“}low\text{”}, o_0^{0} = \text{“}medium\text{”},\\
&\quad o_1^{0} = \text{“}high\text{”}, o_2^{0} = \text{“}very\ high\text{”}\},\\
\mathcal{O}^{1} &= \{o_{-3}^{1} = \text{“}hardly\text{”}, o_{-2}^{1} = \text{“}slightly\text{”},\\
&\quad o_{-1}^{1} = \text{“}pretty\text{”}, o_0^{1} = \text{“}simply\text{”}, o_1^{1} = \text{“}very\text{”},\\
&\quad o_2^{1} = \text{“}unusually\text{”}, o_3^{1} = \text{“}extremely\text{”}\},\\
\mathcal{O}^{2} &= \{o_{-2}^{2} = \text{“}close\ to\text{”}, o_{-1}^{2} = \text{“}almost\text{”},\\
&\quad o_0^{2} = \text{“}completely\text{”}\}
\end{aligned}$$

be the respective second hierarchy LTSs for each s_t, for $t = -2, \ldots, 2$ (with $\zeta_{-2} = \zeta_0 = \zeta_2 = 2$ and $\zeta_{-1} = \zeta_1 = 3$), defining the associated FDHLTS $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}^{\mathcal{F}}$ represented in Figure 1. Thus, the possible linguistic assessments such as “*slightly bad*” or “*almost perfect*” can be expressed by means of FDHLTs of $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}^{\mathcal{F}}$ as $s_{-1<o_2^{-1}>}$ and $s_{2<o^2_{-1}>}$.

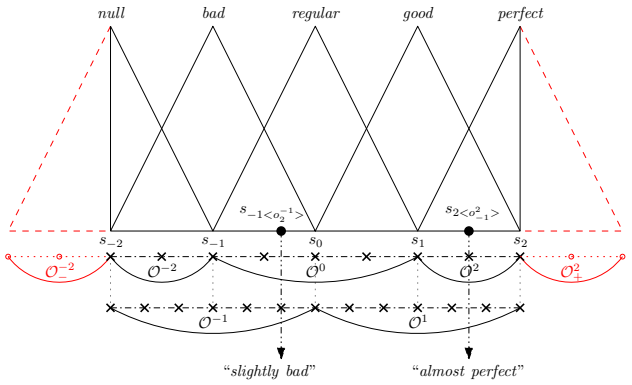


Fig. 1. FDHLTS $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}^{\mathcal{F}}$ from Example 1.

III. Conclusions

Based on the weak points that HFLTSs and DHHFLTSs have in the GDM problems, a new structure is presented in this paper to capture linguistic assessments with more details. This structure enables the decision makers to be more accurate when evaluating an alternative by means of linguistic terms.

On the one hand, Free Double Hierarchy Linguistic Term Sets are introduced as a double hierarchy LTS in which the second hierarchy LTS can be different for each term of the first hierarchy LTS. Thus, each decision maker can choose the second hierarchy LTS that better suits each linguistic term of the first hierarchy according to his/her criterion.

On the other hand, Free Double Hierarchy Hesitant Fuzzy Linguistic Elements(FDHHFLEs) and Free Double Hierarchy Hesitant Fuzzy Linguistic Term Sets (FDHHFLTSs) are defined as a useful tool to depict the hesitancy inherent in human reasoning.

Lastly, an order and a distance between FDHHFLEs are defined to enable us to present a free double hierarchy approach based on the TOPSIS method, called the FDHHFL-TOPSIS. This method is useful to sort alternatives in a GDM situation when the decision makers provide their assessments by means of free double hierarchy linguistic information in order to be more precise.

Future research is focused on two main directions: on the one hand, other methods to aggregate free double hierarchy hesitant fuzzy linguistic information will be studied as well as new measures within the set of FDHHFLTSs such as distance definitions, similarity measures or preference relations.

On the other hand, the structure of FDHHFLTSs will also be applied on the field of recommender systems among end-users that express their opinions by means of this kind of linguistic information.

Acknowledgment

This research has been partially supported by the INVITE Research Project (TIN2016-80049-C2-1-R and TIN2016-80049-C2-2-R (AEI/FEDER, UE)), funded by the Spanish Ministry of Science and Information Technology and in part by the National Natural Science Foundation of China (No. 71571123, 71771155).

References

[1] X. J. Gou, H. C. Liao, Z. S. Xu, F. Herrera, “Double hierarchy hesitant fuzzy linguistic term set and MULTIMOORA method: A case of study to evaluate the implementation status of haze controlling measures,” Information Fusion 38, pp. 22–34, 2017.

[2] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, L. Martínez, “A fuzzy linguistic methodology to deal with unbalanced linguistic term sets,” IEEE Transactions on Fuzzy Systems 16 (2), pp. 354–370, 2008.

[3] E. Herrera-Viedma, F. Herrera, F. Chiclana, “A consensus model for multiperson decision making with different preference structures,” IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part A: Systems and Humans 32, pp. 394–402, 2002.

[4] J. Montserrat-Adell, Z. S. Xu, X. J. Gou, N. Agell, “Free Double Hierarchy Hesitant Fuzzy Linguistic Term Sets: An application on ranking alternatives in GDM,” Information Fusion 47, pp.45–59, 2019.

[5] F. Prats, L. Roselló, M. Sánchez, N. Agell, “Using L-fuzzy sets to introduce information theory into qualitative reasoning,” Fuzzy Sets and Systems 236 (1), pp. 73–90, 2014.

[6] R. M. Rodríguez, L. Martínez, and F.Herrera, “Hesitant fuzzy linguistic terms sets for decision making,” IEEE Transactions on Fuzzy Systems 20 (1), pp. 109–119, 2012.

Análisis de dependencias entre las variables de Arquitectura Empresarial empleando ecuaciones de relaciones difusas y su aplicación a la mejora de la toma de decisiones en las organizaciones

Annette Malleuve-Martínez,
Daniel Alfonso-Robaina
Facultad de Ingeniería Industrial
U. Tecnológica de la Habana CUJAE
Cuba
{amalleuve,dalfonso}@ind.cujae.edu.cu

Juan Carlos Díaz-Moreno
Jesús Medina Moreno
Dept. de Matemáticas
U. de Cádiz
España
{juancarlos.diaz,jesus.medina}@uca.es

Clemente Rubio-Manzano
Dept. de Matemáticas
U. de Cádiz, España
clemente.rubio@uca.es
Dept. Sistemas de Información
U. del Bío-Bío, Chile
clrubio@ubiobio.cl

***Resumen*—Actualmente la Arquitectura Empresarial es una práctica que contribuye a incrementar el desempeño de la organización a través de las Tecnologías de la Información. Los constantes cambios y la complejidad a los que se enfrentan las empresas en el mundo real constituyen desafíos para los directivos que son difíciles de manejar en el entorno empresarial.**

La necesidad de disponer de una empresa saludable basada en la integración y la mejora continua del desempeño, demanda de instrumentos más eficientes que permitan evaluar la Arquitectura Empresarial a través de todas las dimensiones.

En este trabajo se propone un instrumento formal de análisis de las principales variables que soportan la Arquitectura Empresarial de una organización. Se establece y cuantifica la relación causa-efecto existente entre ellas a partir de un conjunto de reglas de dependencia difusas generadas a partir del conocimiento entregado por un conjunto de expertos de diferentes empresas. A partir de las reglas difusas obtenidas se puede, por un lado, evaluar su correcta definición desde un punto de vista teórico; y por otro, establecer prioridades de mejora teniendo en cuenta el grado de dependencia de las variables en el sistema. Para conseguir esto empleamos las ecuaciones de relaciones difusas que, además de ayudar a tratar la incertidumbre, sirven de herramienta de apoyo para la toma decisiones y la gestión exitosa de la Arquitectura Empresarial.

***Index Terms*—Toma de decisiones, Análisis formal de reglas, Arquitectura Empresarial, Ecuaciones de Relaciones Difusas, Lógica Difusa**

I. Introducción

La Arquitectura Empresarial (AE) [20] es una práctica fundamental dentro del ámbito empresarial que responde a dos desafíos permanentes, en primer lugar, los constantes cambios a los que se enfrentan las empresas y , en segundo lugar, la complejidad de enfrentarlos a corto y largo plazo [15], [17]. La AE se ha definido por muchos autores desde diferentes enfoques: el enfoque de alineación, dirigido a conectar las estrategias de la organización con las Tecnologías de la Información para lograr un mayor rendimiento en el alcance de los planes estratégicos [8] [10] [11];el enfoque de sistema, representación holística y distribución coherente por niveles organizativos de los procesos, los sistemas de información y la infraestructura tecnológica [4], [18]; el enfoque estratégico, describe un estado presente de la organización a través del nivel de interconexión de los procesos, las TI y las estrategias, y la conduce hacia un estado futuro o nivel superior de madurez utilizando como medios: marcos de trabajo, modelos y herramientas adaptadas a los distintos contextos empresariales [5], [14], [19].

Un aspecto fundamental dentro de la AE son los métodos, herramientas y marcos generados para la gestión de directrices, procedimientos y formas de identificarlo y la transformación en una estructura que agrega continuamente valor al negocio, es flexible y holística [1]–[3], [15]. Un desafío dentro de este ámbito es conseguir instrumentos más flexibles que permitan dar apoyo en la toma de decisiones a directivos y especialistas sobre el presente y el futuro de la empresa ante la incertidumbre y la ambigüedad generada por el gran número de elementos multifactoriales que intervienen en tales procesos.

En este trabajo proponemos un instrumento basado en lógica difusa para analizar, a través de un conjunto ecuaciones de relaciones difusas, un total de 22 variables de AE junto a sus relaciones de dependencia generadas a partir de los datos primarios obtenidos de una lista de chequeo aplicada a un conjunto de expertos (directivos y especialistas) de la empresa. Un resultado importante de nuestro estudio es la obtención de los aspectos más relevantes que permitan mejorar el proceso de toma de decisiones en la empresa desde el enfoque de AE [13] y la posibilidad de realizar una evaluación formal sobre la corrección en la definición de las reglas de dependencia realizadas por los expertos.

La estructura del artículo es como sigue, la sección II

Partially supported by the State Research Agency (AEI) and the European Regional Development Fund (FEDER) project TIN2016-76653-P. This work has been done in collaboration with the research group SOMOS (SOftware-MOdelling-Science) funded by the Research Agency and the Graduate School of Management of the Bío-Bío University.

presenta las variables que soportan la AE así como la relación causa-efecto entre ellas a través de un conjunto de reglas de dependencia definidas para cada etapa. En la sección III se presenta un método de evaluación de las reglas de implicación obtenidas mediante un sistema de ecuaciones de relaciones difusas. Las conclusiones y el trabajo futuro se entregan en la sección IV.

II. Variables que soportan la Arquitectura Empresarial y la relación causa-efecto entre ellas

En esta sección se presentan las principales variables que soportan la AE, se establece y cuantifica la relación causa-efecto existente entre ellas a partir del conocimiento entregado por un conjunto de expertos. El resultado es un conjunto de reglas de dependencia que modelan el problema dado.

Las variables de AE se miden a través de tres etapas definidas, teniendo en cuenta las fases por las que transita el proceso de Dirección Estratégica en una organización,dicha relación conceptual(AE y Dirección Estratégica), ha sido discutida en trabajos anteriores [12]. Para cada una de las etapas se realiza dos pasos: i) definición de variables y relación causa-efecto entre ellas; ii) cuantificación de las mismas y definición de las reglas.

A. Etapa 1. Diseño Estratégico basado en Procesos

Las variables involucradas en esta de esta fase son: Equipo Estratégico (EE), la Comunicación entre actores de la organización(CEA), el Rumbo estratégico(RE), el Diagnóstico, Diseño y Rediseño de los Procesos Clave (DDRPC) y el Diagnóstico, Diseño y Rediseño de los Procesos Funcionales (DDRPF).

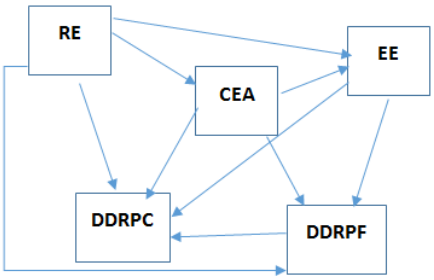


Figura 1. Diagrama de Relaciones e Inograf

A partir de estas variables se establece las relaciones causa-efecto entre las mismas (ver Figura 1) y se cuantifica dicha relación empleando la media geométrica de la puntuación otorgada(1-10) por cada experto a cada variable en la lista de chequeo [13] que se le aplicó en este caso a 9 en total por cada empresa entre directivos y especialistas principales.

Para simplificar la nomenclatura y la visualización de tablas y reglas a cada una de ellas se le ha asignado un código $a_1, \ldots, a_n$: EE (a_1), CEA (a_2), RE (a_3), DDRPC (a_4) and DDRPF(a_5) obteniéndose las siguientes reglas de implicación.

1) $a_2, a_3 \rightarrow a_1$

	EE	CEA	RE	DDRPC	DDRPF	TOTAL
EE				X	X	2
CEA	X			X	X	3
RE	X	X		X	X	4
DDRPC						0
DDRPF				X		1
TOTAL	2	1	0	4	3	10

Figura 2. Relación establecida entre las variables involucradas en el Diseño Estratégico basado en Procesos

2) $a_3 \rightarrow a_2$
3) $a_1, a_2, a_3, a_5 \rightarrow a_4$
4) $a_1, a_2, a_3 \rightarrow a_5$

A partir de las cuales se obtuvo las dependencias mostradas en la Figura 1. Las reglas se deben leer de la siguiente forma: a_2 y a_3 tiene un efecto directo sobre a_1, en este caso, diríamos que la Comunicación entre Actores Internos y Externos junto al Rumbo Estratégico de la empresa afectará al Equipo Estratégico.

B. Etapa 2. Diseño Estratégico basado en el Enfoque de la Arquitectura Empresarial

Las variables involucradas en la etapa de Diseño Estratégico basado en el enfoque de Arquitectura Empresarial son:

- Gestión de Vigilancia en los procesos (GV).
- Gestión y automatización de los procesos(GAP).
- Capacidad de respuesta ante los cambios (CR).
- Gestión de la Información Relevante en los Procesos(GRP).
- Seguridad de la información (SI).
- Integración de la Información para la toma de decisiones estratégicas (II).
- Estructura de las aplicaciones (EA).
- Nivel de Interoperabilidad (NI).
- Aprovechamiento de las aplicaciones informáticas en los procesos (AAP).
- Inversiones en Infraestructura Tecnológica(IIT).
- Aprovechamiento de la Infraestructura Tecnológica (AIT).
- Integración entre plataformas de infraestructura tecnológica y aplicaciones informáticas (IPA).

Se realiza la misma operación que en la sección anterior, a partir de estas variables se establece las relaciones causa-efecto entre las mismas (ver Figura 3) y se cuantifica empleando la media geométrica de la puntuación otorgada(1-10) por cada experto a cada variable en la lista de chequeo [13] que se le aplicó en este caso a 9 en total por cada empresa entre directivos y especialistas principales.

Se obtuvieron las siguientes reglas y donde para simplificar la nomenclatura y la visualización de tablas y reglas a cada una de ellas se le ha asignado un código ($b_1, \ldots, b_12$): GV(b_1), GAP (b_2), CR (b_3), GRP (b_4), SI (b_5), II (b_6), EA (b_7), NI (b_8), AAP (b_9), IIT (b_10), AIT (b_11) y IPA (b_12)

1) $b_1 \rightarrow b_2$
2) $b_1, b_2, b_4, b_5, b_6, b_7, b_6, b_{12} \rightarrow b_3$
3) $b_1, b_2, b_6, b_7, b_9, b_{11}, b_{12} \rightarrow b_4$

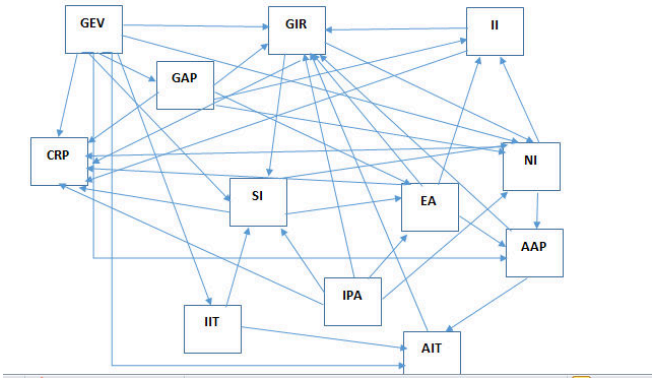


Figura 3. Relación entre las variables de la etapa2

4) $b_1, b_4, b_10, b_{12} \rightarrow b_5$
5) $b_2, b_7, b_8 \rightarrow b_6$
6) $b_2, b_5, b_{12} \rightarrow b_7$
7) $b_1, b_2, b_4, b_5, b_{12} \rightarrow b_8$
8) $b_1, b_7, b_8 \rightarrow b_9$
9) $b_1 \rightarrow b_{10}$
10) $b_1, b_9, b_{10} \rightarrow b_{11}$

C. Etapa 3. Implementación y Supervisión

Las variables involucradas en la etapa de Diseño Estratégico en la Implementación y Supervisión son:

- Liderazgo de la dirección(LD).
- Asimilación de los Cambios por los Trabajadores (ACT).
- Gestión de indicadores de eficiencia y eficacia(GIN).
- Integración de las TIC - procesos- objetivos estratégicos (IPO).
- Generación de Valor(GV).

Se realiza la misma operación que en las secciones anteriores, a partir de estas variables se establece una relación causa-efecto entre las mismas (ver Figura 5) y se cuantifica dicha relación empleando la media geométrica de la puntuación otorgada(1-10) por cada uno de los expertos en la lista de chequeo [13] que se le aplicó en este caso a 9 en total por cada empresa entre directivos y especialistas principales.

Para simplificar la nomenclatura y la visualización de tablas y reglas a cada una de ellas se le ha asignado un código $(c_1, \ldots, c_n)$: LD (c_1), ACT(c_2), GIN(c_3), IPO(c_4), GV(c_5)

1) $c_1, c_4 \rightarrow c_2$
2) $c_1, c_2, c_4 \rightarrow c_3$
3) $c_1 \rightarrow c_4$
4) $c_1, c_2, c_3, c_4 \rightarrow c_5$

III. Análisis de dependencias entre variables basado en Ecuaciones de Relaciones Difusas

Para poder evaluar el conjunto de reglas definidas e interrelacionadas en la sección anterior desde un punto de vista formal se empleará un sistema de ecuaciones relacionales difusas con el objetivo de establecer una relación difusa entre las causas y los efectos y determinar si la relación está bien definida desde el prisma teórico además de obtener un grado de prioridad de cada una de ellas en el modelo de decisión.

A. Ecuaciones de Relaciones Difusas

Las ecuaciones de relaciones difusas fueron introducidas por E. Sanchez. [16] y se asocian con el concepto de composición de relaciones difusas empleándose habitualmente para investigar aspectos teóricos y prácticos de las teoría de conjuntos difusos, como razonamiento aproximado, control automático o toma de decisiones.

En este trabajo se considera, como estructura algebraica en la que se toman los valores de las variables y de las reglas de dependencia entre ellas, el retículo completo $([0,1], \wedge, \vee, \odot, \rightarrow)$, donde $x \wedge y = \text{mín}\{x, y\}, x \vee y = \text{máx}\{x, y\}$ y los operadores $\odot\colon [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ y $\rightarrow\colon [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ forman un par adjunto, es decir, verifican la propiedad de adjunción:

$$x \odot y \leq z \quad \text{si y solo si} \quad y \leq x \rightarrow z, \qquad \text{para todo } x, y, z \in [0,1].$$

Dado un conjunto V, el orden en $[0,1]$ induce un orden parcial en $[0,1]^V$, definido componente a componente, que dota a $[0,1]^V$ de una estructura de retículo completo.

Dado un par adjunto $(\odot, \rightarrow)$, una ecuación de relaciones difusas viene dada por

$$R \circ X = T$$

donde $R\colon U \times V \rightarrow [0,1]$, $T\colon U \times W \rightarrow [0,1]$ son relaciones difusas sobre $[0,1]$ dadas, $X\colon V \times W \rightarrow [0,1]$ es la relación difusa incógnita, y $R \circ X$ está definida por

$$(R \circ X)(u, w) = \bigvee \{R(u, v) \odot X(v, w) \mid v \in V\}$$

para cada $u \in U, w \in W$.

Una ecuación de relaciones difusa tiene solución si y solo si

$$(R \Rightarrow T)(v, w) = \bigwedge \{R(u, v) \rightarrow T(u, w) \mid u \in u\}$$

es una solución y, en este caso, es la mayor de todas. En caso contrario, $R \Rightarrow T$ es una solución maximal de la inecuación $R \circ X \leq T$ y, por tanto, puede considerarse como una aproximación inferior de la solución.

Ejemplo 1: Se considera el par adjunto $(\odot, \rightarrow)$ sobre $[0,1]$, siendo $\odot$ el operador de Lukasiewicz, definido por $x \odot y = max\{0, x + y - 1\}$ y su implicación residuada, dada por $y \rightarrow z = min\{1, 1 - y + z\}$ para todo $x, y, z \in [0,1]$. Dados los conjuntos $U = \{u_1, u_2, u_3\}, V = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $W = \{w_1\}$ y la ecuación $R \circ X = T_1$, donde R y T_1 vienen expresadas por las matrices

R	v_1	v_2	v_3
u_1	0.9	0.5	0.9
u_2	0.2	0.9	0.7
u_3	0.8	0.6	0.9

y

T_1	w_1
u_1	0.8
u_2	0.6
u_3	0.8

se calcula $R \Rightarrow T_1$, que viene dada por

$R \Rightarrow T_1$	w_1
v_1	0.9
v_2	0.7
v_3	0.9

	GEV	GAP	CRP	GIR	SI	II	EA	NI	AAP	IIT	AIT	IPA	TOTAL
GEV		X	X	X	X			X	X	X	X		8
GAP			X	X		X	X	X					5
CRP													0
GIR			X		X			X					3
SI			X				X	X					3
II			X	X									2
EA			X	X		X			X				4
NI			X			X			X				3
AAP				X							X		2
IIT					X						X		2
AIT				X									1
IPA			X	X	X		X	X					5
TOTAL	0	1	8	7	4	3	3	5	3	1	3	0	38

Figura 4. Relación establecida entre las variables involucradas en el Diseño Estratégico basado en el Enfoque de la Arquitectura Empresarial

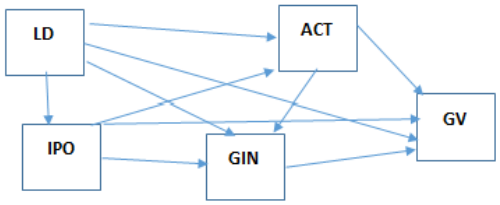


Figura 5. Relación entre las variables de la etapa3

	LD	ACT	GIN	IPO	GV	TOTAL
LD		X	X	X	X	4
ACT			X		X	2
GIN					X	1
IPO		X	X		X	3
GV						0
TOTAL	0	2	3	1	4	10

Figura 6. Relación establecida entre las variables involucradas en la Implementación y Supervisión

y se comprueba que es solución de la ecuación y, por tanto, la solución máxima.

Por el contrario, para T_2 dada por

T_2	w_1
u_1	0.9
u_2	0.5
u_3	0.9

se obtiene que $R \Rightarrow T_2$ y $R \circ (R \Rightarrow T_2)$ vienen dadas por

$R \Rightarrow T_2$	w_1
v_1	1.0
v_2	0.4
v_3	0.8

y

$R \circ (R \Rightarrow T_2)$	w_1
u_1	0.9
u_2	0.5
u_3	0.8

y, por tanto, $R \circ (R \Rightarrow T_2) < T_2$, por lo que $R \Rightarrow T_2$ es una solución maximal de la inecuación $R \circ X \leq T$.

B. Análisis de reglas de dependencia aplicando Ecuaciones de Relaciones Difusas

Las reglas (crisp) de dependencia definidas anteriormente (ver Figuras 1, 3, 5) en el marco teórico serán reescritas para el marco difuso asignándole un peso (valor de verdad) a cada una ellas que será evaluado mediante los datos observados en las distintas empresas haciendo uso de las ecuaciones de relaciones difusas.

Dado una variable v (efecto) y las variables $v_1, v_2, \ldots, v_n$ (causas) denotaremos las reglas de dependencia difusas de la siguiente forma:

$$(v_1 \to v, x_1)$$
$$(v_1 \to v, x_1)$$
$$\ldots$$
$$(v_n \to v, x_n)$$

donde x_i es el valor de verdad de la regla $(v_i \to v)$.

Como se mostró en [6], [7] dichos pesos pueden obtenerse resolviendo la ecuación de relaciones difusas

$v_1(E_i) \odot x_1 \vee v_2(E_2) \odot x_2 \vee \ldots \vee v_n(E_i) \odot x_n = x(E_i)$ para $i \in \{1, \ldots, m\}$

en la que los datos son los valores observados de las variables en distintas empresas $E_1, \ldots, E_m$.

C. Caso de estudio

La idea consiste en dada un matriz de empresas con sus respectivos valores para las distintas variables, obtenidos a partir de la evaluación de expertos, y dado el conjunto de reglas causa-efecto establecidas en el marco teórico, evaluar mediante un conjunto de ecuaciones de relaciones difusas, los pesos (valor de verdad) de dichas reglas. Estos pesos pueden servir como indicadores de la validez de dichas reglas y de la veracidad de los datos observados en casos futuros, así como para establecer una prioridad entre las causas de un determinado efecto que quiera mejorarse aumnetando los valores de dichas causas.

Contamos con datos reales sobre seis empresas de diferentes sectores, tamaños y características denotadas $E_1, \ldots, E_6$.[1] Las siguientes tablas muestran los valores observados para las variables correspondientes a cada etapa en las distintas empresas.

Para evaluar los pesos de las reglas $a_2 \to a_1$ y $a_2 \to a_1$, correspondientes al efecto a_1, se considera la matriz de entrada cuyas columnas son los valores de a_2, a_3, a_1, para cada una de las empresas.

[1]Los nombres verdaderos de las empresas han sido omitidos por motivos de privacidad.

Variable	Id	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
EE	a_1	7.56	6.26	2.25	3.17	7.81	6.22
CEA	a_2	6.44	6.26	3.91	4.8	15.64	7.60
RE	a_3	8.78	7.19	4.20	5.23	7.59	7.82
DDRPC	a_4	9.00	6.32	3.10	5.30	7.66	8.02
DDRPF	a_5	8.78	6.16	3.83	3.88	7.70	7.63

Figura 7. Matriz de entrada para el Diseño Estratégico basado en Procesos

Variable	Id	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
GV	b_1	6.89	6.02	3.56	3.20	5.07	7.14
GAP	b_2	6.89	7.08	3.82	3.99	5.21	6.82
CR	b_3	6.56	6.55	2.36	2.70	6.81	7.78
GRP	b_4	8.78	7.21	3.11	3.58	6.23	7.83
SI	b_5	6.89	8.34	5.73	5.50	6.32	8.47
II	b_6	7.22	7.18	3.64	3.79	6.96	7.84
EA	b_7	8.33	6.78	4.28	4.92	7.96	7.95
NI	b_8	5.67	5.96	1.97	4.33	6.68	4.84
AAP	b_9	7.11	6.54	3.56	4.03	5.64	6.64
IIT	b_10	8.11	7.20	3.70	4.55	6.26	4.13
AIT	b_11	7.78	7.50	3.04	4.20	6.68	6.40
IPA	b_12	7.22	7.69	2.42	4.55	5.82	5.38

Figura 8. Matriz de entrada para el Diseño Estratégico basado en el Enfoque de la Arquitectura Empresarial

$$M = \begin{bmatrix} a_2 & a_3 & a_1 \\ 0.644 & 0.878 & 0.756 \\ 0.626 & 0.719 & 0.626 \\ 0.391 & 0.42 & 0.225 \\ 0.481 & 0.523 & 0.317 \\ 0.564 & 0.759 & 0.781 \\ 0.76 & 0.782 & 0.622 \end{bmatrix}$$

A continuación extraemos de M las matrices R (matriz de causas) y T (matriz de efecto)

$$R = \begin{bmatrix} 0.644 & 0.878 \\ 0.626 & 0.719 \\ 0.391 & 0.42 \\ 0.481 & 0.523 \\ 0.564 & 0.759 \\ 0.76 & 0.782 \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} 0.756 \\ 0.626 \\ 0.225 \\ 0.317 \\ 0.781 \\ 0.622 \end{bmatrix}$$

Se calcula entonces

$$R => T = \begin{bmatrix} 0.834 \\ 0.794 \end{bmatrix}$$

Dado que $R \circ (R \Rightarrow T) = \begin{bmatrix} 0.672 \\ 0.513 \\ 0.225 \\ 0.317 \\ 0.553 \\ 0.594 \end{bmatrix} < T$

$R \Rightarrow T$ es una solución maximal de la inecuación $R \circ X \leq T$. Así, se le puede asignar a la regla $a_2 \rightarrow a_1$ el valor de verdad 0.834 y a la regla $a_3 \rightarrow a_1$, el valor de verdad 0.794. Estos resultados ponen de manifiesto que los valores de verdad obtenidos a partir de los datos suministrados por los expertos son muy cercanos a los establecidos desde el punto de vista teórico. Estos resultados además pueden usarse para establecer la prioridad de mejora entre las variables cuyos valores sean bajos para incrementar el desempeño de la AE. Por ejemplo, si se quiere mejorar el valor de la variable efecto) a_1, se puede priorizar la mejora del valor de la variable (causa) a_2, cuyo peso en la relación causa-efecto es mayor, frente a la variable (causa) a_3.

Variable	Id	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
LD	c1	8.00	6.22	4.29	3.01	7.83	7.12
ACT	c2	7.22	7.43	4.14	4.94	6.93	4.95
GIN	c3	7.56	5.11	3.24	3.36	6.46	5.87
IPO	c4	7.00	5.18	2.98	3.56	6.80	5.02
GV	c5	7.89	5.74	3.23	4.74	8.25	8.12

Para automatizar tal proceso se ha creado una aplicación software que permite cargar las matrices de empresas y aplicar diferentes implicaciones. Así el usuario puede determinar si las relaciones entre las variables y pesos establecidos entre ellas está modelado correctamente desde el punto de vista matemático. La herramienta junto a un manual de usuario se encuentra públicamente disponible en la siguiente dirección web:

`https://dsi.face.ubiobio.cl/somos/AE_data_analysis/`

La herramienta cuenta con una ventana de visualización de empresas y sus efectos (ver Figura 9-1). Al pulsar sobre la empresa aparecerán los datos asociados a la empresa y al pulsar sobre un efecto se aplicará dicho efecto a la lista de empresas cargadas (ver Figura 9-2). Por ejemplo a partir de los datos mostrados en la Figura 8 se crea una ventana con los datos de la matriz M (definida previamente). El sistema automáticamente crea R y T y computa X (ver Figura 9-3), obteniendo la aproximación T' que se visualiza junto a T original con el objetivo de comprobar la diferencia entre ambas (ver Figura 9-4) y comprobar si el modelado realizado por los expertos es correcto desde un punto de vista teórico.

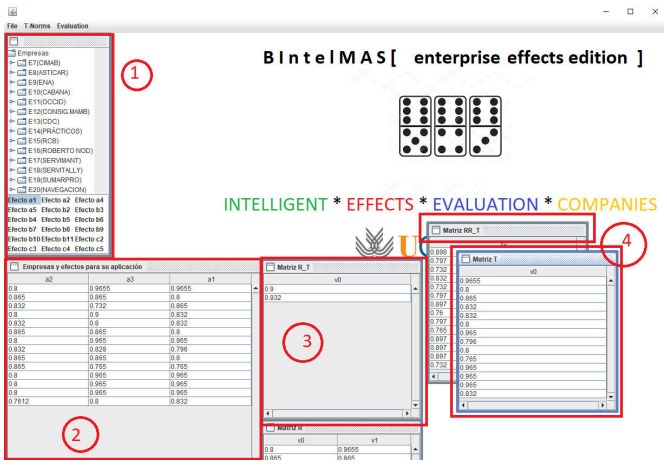


Figura 9. Ventana principal de la aplicación de análisis de dependencias de variables AE

IV. Conclusiones y trabajo futuro

En este trabajo se ha introducido la importancia de disponer de una buena Arquitectura Empresarial para garantizar desempeño de la organización a través de las Tecnologías de la Información. Se han definido las principales variables que las sustentan así como las relaciones de dependencia establecidas por un conjunto de expertos. Con el objetivo de analizar dicho modelo se ha propuesto las ecuaciones de relaciones difusas como un instrumento para medir la calidad de las reglas de dependencia fijadas. El resultado ha sido una herramienta que permite apoyar la toma de decisiones a partir de los datos actuales de un conjunto de empresas.

Como trabajo futuro se pretende obtener la prioridad de mejora que cada una de las variables tienen en la Arquitectura Empresarial con el objetivo de trazar un posible plan de actualización si así lo requiere la empresa.

Referencias

[1] F.Ahlemann, E. Stettiner, M. Messerschmidt, C. Legner. Strategic enterprise architecture management: challenges, best practices, and future developments?. pp.85-110, Springer Science & Business Media, 2012.

[2] S.Aier, S. Kurpjuweit, J. Saat, R. Winter. Enterprise architecture design as an engineering discipline. AIS Transactions on Enterprise Systems, vol. 1, pp. 36?43,2009.

[3] S. Buckl, A. M. Ernst, M. F. Lankes, C. M. Schweda. Enterprise architecture management patterns?exemplifying the approach. Enterprise Distributed Object Computing Conference, 2008. EDOC08. 12th International IEEE, pp. 393-402. IEEE. 2008.

[4] M. Berrada y B. Bounabat. Business Modeling of Enterprise Architecture Based on Multi-Agent System International Journal of e-Education, e-Business, e-Management and e-Learning, vol. 14, pp. 472, 2013.

[5] C.Braun and R. Winter. Integration of IT service management into enterprise architecture? En Proceedings of the 2007 ACM symposium on Applied computing, pp. 1215?1219. ACM 2007.

[6] M. E. Cornejo, J.C. Díaz-Moreno, J. Medina. Multi-adjoint Relation Equations: A Decision Support System for Fuzzy Logic. International Journal of Intelligent Systems, 32(8), 778-800, 2017.

[7] J.C. Díaz, J. Medina. Multi-adjoint relation equations: Definition, properties and solutions using concept lattices. Information Sciences, 253, 100-109,2013.

[8] K.Hinkelmann, A. Gerber, D. Karagiannis, B. Thoensse, A. Van der Merwe, R. Woitsch A new paradigm for the continuous alignment of business and IT: Combining enterprise architecture modelling and enterprise ontology Computers in Industry, vol. 79, pp. 77-86,2016.

[9] W. Bandler, L. Kohout. Semantics of implication operators and fuzzy relational products. Int. J. Man-Machine Studies, 12:89–116, 1980.

[10] J. Lapalme Three schools of thought on enterprise architecture IT professional, vol. 14, pp.37-43,2012.

[11] M. Lankhorst. Enterprise architecture at work: Modelling, communication and analysis. Springer, 2009.

[12] A.Malleuve, D.Alfonso,J. Lavandero. Estudio del comportamiento de variables para la integración del sistema de dirección de la empresa con enfoque de Arquitectura Empresarial. Dyna Colombia, 84(203):349-355.2017.

[13] A.Malleuve Integration of Management System with Enterprise Architecture approach in a communications enterprise unpublished.

[14] P. Johnson, M. Ekstedt, E. Silva, L. Plazaola. Using enterprise architecture for cio decision-making: On the importance of theory. Second Annual Conference on Systems Engineering Research. 2004.

[15] J. Schekkerman. How to survive in the jungle of enterprise architecture frameworks: Creating or choosing an enterprise architecture framework? pp.2-33, Trafford Publishing, 2004

[16] E. Sanchez. Resolution of composite fuzzy relation equations. Information and Control, 30(1):38-48, 1976.

[17] L.Urbaczewski, S. Mrdalj A comparison of enterprise architecture frameworks Issues in Information Systems, vol. 7,pp. 18-23, 2006.

[18] F. B. Vernadat. Interoperable enterprise systems: Principles, concepts, and methods Annual reviews in Control, vol. 31, pp. 137?145, 2007.

[19] R. Winter, R. Fischer. Essential layers, artifacts, and dependencies of enterprise architecture Enterprise. Distributed Object Computing Conference Workshops, 2006. EDOCW 06. 10th IEEE International pp. 30-30. IEEE, 2006

[20] J. A Zachman. A framework for information systems architecture. IBM Systems Journal, vol. 26, pp. 276-292, 1987.

Supporting university career services by means of a multi-criteria decision-aiding system

J. Nguyen, G. Sánchez-Hernández, A. Armisen, N. Agell, X. Rovira, and C. Angulo

Universitat Politècnica de Catalunya (BacelonaTech), Spain
University of Vic, Central University of Catalonia, Spain
ESADE Business School, Ramon Llull University, Spain

***Abstract*—This paper is a reduced version of the one published in [1]. We introduce a linguistic multi-criteria decision-aiding model to match college students with internships. It considers a fuzzy ordered weighted averaging (FOWA) operator to capture the inherent uncertainty and vague nature of personnel selection processes. A software tool is implemented to assess the match between internship requirements and student's preferences by means of linguistic descriptions, and propose positions according to student preferences. A reduced list of internships is presented to help students to decide where to focus their attention.**

***Index Terms*—Decision support systems, Multi-criteria decision-aiding, Hesitant fuzzy linguistic terms, Fuzzy OWA operator, Personnel selection problem**

I. Introduction

Organizations are challenged daily to make complex decisions. These decisions can be subjective, uncertain, and imprecise [2]. For global organizations, human resources personnel selection can be challenging as candidates are disperse and vary in level of knowledge of a topic. Their knowledge is difficult to qualify and changes frequently [3]. Personnel selection is subjective in nature with regards to assigning crisp values to the job requirements and evaluating candidate qualifications. Previous studies have extended MCDA methods to this problem to address its fuzziness [4], [5].

The aim of this paper is to introduce a practical decision support system to assist students with identifying internships related to their interests when searching for a position for the first time. A real case example is implemented with student and job information provided by a university's career services office. In terms of feature representation, the novelty of the application is two-fold. First, the requirements of a position are extracted in an implicit manner and represented via linguistic terms. Second, linguistic terms are also considered to represent students' interests. The model considered for linguistic descriptions is the hesitant fuzzy linguistic model. This model was introduced by Rodriguez et al. in [6] and further developed in [7].

The rest of the paper is structured as follows. First, we discuss tools used in the design of a linguistic MCDA system which include linguistic descriptors, and fuzzy matching and aggregation. Next, we describe the proposed decision support system, provide a real case example, discuss conclusions future research directions.

II. Methodology

Internships may be a student's first experience searching for a position, therefore, it may be difficult for him to express his preferences as a single label. Given this uncertainty, we propose the application of Hesitant Fuzzy Linguistic Term Set (HFLTS) [7] to manage the need for several labels to define preferences.The approach proposed in this paper relies on the use of linguistic terms based on a qualitative absolute order-of-magnitude model [8] that allows us to deal with the imprecision and hesitance involved in decision processes. We will express this model by means of HFLTS introduced by Rodriguez et al. [7].

Let $\mathbb{S}_n$ be a finite set of totally ordered basic terms, $\mathbb{S}_n = \{B_0, \ldots, B_n\}$, with $B_0 < \ldots < B_n$ and the hesitant fuzzy linguistic terms set, $H_{\mathbb{S}_n}$, be the set of all consecutive linguistic basic terms of $\mathbb{S}_n$, i.e. $B_{ij} = \{x \in \mathbb{S}_n \,|\, B_i \leq x \leq B_j\}\ \forall i, j \in \{0, \ldots, n\}$, with $i \leq j$. In general, each term corresponds to a linguistic label, with B_0 being the term "$None$". For simplicity, we will denote the singleton $B_{ii} = B_i$. The total order in the set of basic terms, $\mathbb{S}_n$, allows us to define a total order in $H_{\mathbb{S}_n}$ based on the lexicographic order such that: given two linguistic terms, B_{ij}, $B_{i'j'} \in H_{\mathbb{S}_n}$, $B_{ij} \leq_L B_{i'j'}$, iff $i < i'$ or $i = i'$ and $j \leq j'$. From this point forward, we consider $H_{\mathbb{S}_n^*}$, a subset of $H_{\mathbb{S}_n}$, which corresponds to the HFLTS obtained when the set of basic elements is $\mathbb{S}_n^* = \{B_1, \ldots, B_n\}$. In addition, in $H_{\mathbb{S}_n}$ we consider the subset inclusion to define the relation *"to be more precise or equal to"*. We say that B_{ij} *is more precise or equal to* $B_{i'j'}$, $B_{ij} \preceq B_{i'j'}$, if and only if, $B_{ij} \subseteq B_{i'j'}$, i.e, $i' \leq i$ and $j \leq j'$.

HFLTS can be used to compare individual's preferences to object's attributes to capture imprecision in decision processes. To this end, we will define an operator matching two basic terms and extend it to the entire set of HFLTS catching all possible combinations of hesitancy in both descriptions.

Definition 2.1: The fuzzy matching operator is the map $* : H_{\mathbb{S}_n} \times H_{\mathbb{S}_n^*} \to H_{\mathbb{S}_n}$ such that:

1) $\forall B_i \in \mathbb{S}_n$ and $\forall B_j \in \mathbb{S}_n^*$, $B_i * B_j = B_{\min(n, n-(j-i))}$,
2) $\forall B_{ij} \in H_{\mathbb{S}_n}$ and $\forall B_{i'j'} \in H_{\mathbb{S}_n^*}$,
   $B_{ij} * B_{i'j'} = \bigsqcup\{B_k * B_l, i \leq k \leq j \text{ and } i' \leq l \leq j'\}$.

Note that, 2. coincides with 1. $\forall B_i \in \mathbb{S}_n$ and $\forall B_j \in \mathbb{S}_n^*$.

Example 2.1: Let us consider that a candidate's preferences are represented by $H_{\mathbb{S}_n^*}$ and the features of each position are represented by $H_{\mathbb{S}_n}$, then given the previously considered HFLTS, $H_{\mathbb{S}_n^*}$, with $n = 3$, the results of the fuzzy matching operator for the basic terms are shown in Table I.

TABLE I
FUZZY MATCHING OPERATOR *

*	**Low** (B_1)	**Medium** (B_2)	**High** (B_3)
None (B_0)	Medium (B_2)	Low (B_1)	None (B_0)
Low (B_1)	High (B_3)	Medium (B_2)	Low (B_1)
Medium (B_2)	High (B_3)	High (B_3)	Medium (B_2)
High (B_3)	High (B_3)	High (B_3)	High (B_3)

Given two k-dimensional different vectors, $X = (X_1, ..., X_k) \in (H_{\mathbb{S}_n})^k$ and $Y = (Y_1, ..., Y_k) \in (H_{\mathbb{S}_n^*})^k$, we analyze the existing matching between these vectors, comparing each component, by means of the fuzzy matching operator $*$, and a FOWA (fuzzy ordered weighted average).

Definition 2.2: Given $X \in (H_{\mathbb{S}_n})^k$ and $Y \in (H_{\mathbb{S}_n^*})^k$, the fuzzy matching between X and Y is defined as:

$$X * Y = (X_1 * Y_1, ..., X_k * Y_k) \in (H_{\mathbb{S}_n})^k$$

For our purpose, we consider the regular increasing monotone (RIM) function, introduced by Yager [9], guided by the linguistic quantifier 'most of'.

The proposed system caters to the interests of students rather than the requirements of a position to help students identify internship offerings which best match their individual interests. To start, profiles are created for each student and position to represent preferences and features of each, respectively. Preferences are student interests elicited from each student and features are requirements determined from each position. To obtain these preferences and features, Latent Dirichlet allocation (LDA) is applied to student curriculum vitaes and intership descriptions. Originally developed by Blei et al. [10], LDA is an unsupervised topic modeling method. Student's preferences are compared with each position's features. The outputs of the decision-making model are internship positions sorted in a manner which represents students preferences.

III. A Real Case Example

In this real case example, the 2016 internship program for the Bachelor of Business Administration at ESADE Business School in Barcelona, Spain, was used to apply the proposed method. The data set was composed of 275 student resumes and 1063 available internships. All resumes and internship descriptions in English were considered. The final data set consisted of 275 students and 549 internships. Student information was limited to the resumes provided for the purposes of the 2016 internship cycle. Internship positions included national and international postings.

To evaluate the advantages and drawbacks of our proposed method, we compare it to: 1) TOPSIS (Technique for Order of Preference by Similarity to Ideal Solution) and 2) a ranking method based on Hellinger distance. In comparison to the TOPSIS method, our method recommended zero positions to at most 40 users while the TOPSIS method recommended zero positions to at most 55 users, demonstrating that more students received recommendations with our method. The results obtained from a comparison with the Hellinger distance show that the Hellinger method recommended 65 or more positions to the majority of the students, while our method provided more reasonable (i.e.140) recommendations to most students.

IV. Conclusion

In this paper, a new method for sorting internship postings according to student interests has been introduced. This methodology improves existing methods in several ways. First, it proposes to perform a matching between students and internships from the perspective of the job candidate rather than the position. This is the reverse of the more popular matching to find the best candidate for a position. Second, the method considers a FOWA operator in the matching to capture the inherent uncertainty of personnel selection. Lastly, the interests and features of the students and positions are represented as HFLTS, reflecting human tendency to opine with imprecision and hesitance in making decisions. Our methodology can be extended to both sides of the general personnel assignment problem making the process more efficient. A position which is closely aligned with the interests of a job candidate may lead to better job loyalty. Therefore, as future research, we propose to adapt our methodology to other personnel selection environments like headhunting firms, online job boards, and industry human resources to uncover the interests of a job candidate prior to the interview process.

References

[1] Jennifer Nguyen, G Sánchez-Hernández, Albert Armisen, Núria Agell, Xari Rovira, and Cecilio Angulo. A linguistic multi-criteria decision-aiding system to support university career services. *Applied Soft Computing*, 67:933–940, 2018.

[2] Rosana Montes, Ana M Sánchez, Pedro Villar, and Francisco Herrera. A web tool to support decision making in the housing market using hesitant fuzzy linguistic term sets. *Applied Soft Computing*, 35:949–957, 2015.

[3] Mark T Maybury. Discovering distributed expertise. *Regarding the Intelligence in Distributed Intelligent SystemsMITRE*, 2007.

[4] Alecos Kelemenis and Dimitrios Askounis. A new topsis-based multi-criteria approach to personnel selection. *Expert systems with applications*, 37(7):4999–5008, 2010.

[5] Alvydas Baležentis, Tomas Baležentis, and Willem KM Brauers. Personnel selection based on computing with words and fuzzy multimoora. *Expert Systems with applications*, 39(9):7961–7967, 2012.

[6] Rosa M Rodríguez, Luis Martínez, and Francisco Herrera. Hesitant fuzzy linguistic term sets. In *Foundations of Intelligent Systems*, pages 287–295. Springer, 2011.

[7] Rosa M Rodriguez, Luis Martinez, and Francisco Herrera. Hesitant fuzzy linguistic term sets for decision making. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 20(1):109–119, 2012.

[8] Louise Travé-Massuyès, Francesc Prats, Mónica Sánchez, and Núria Agell. Relative and absolute order-of-magnitude models unified. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 45(3):323–341, 2005.

[9] Ronald R Yager. Quantifier guided aggregation using owa operators. *International Journal of Intelligent Systems*, 11(1):49–73, 1996.

[10] David M Blei, Andrew Y Ng, and Michael I Jordan. Latent dirichlet allocation. *Journal of machine Learning research*, 3(Jan):993–1022, 2003.

XIX Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy (XIX ESTYLF)

ESTYLF 7:
APLICACIONES II

Estudio empírico sobre el tratamiento de la sinonimia en los razonamientos vagos

Gael Velasco Benito
Dpto. de Filosofía y Antropología
Universidad de Santiago de Compostela
gael.velasco@gmail.com

Alberto Bugarín
Centro Singular de Investigación en Tecnoloxías da Información (CiTIUS)
Universidad de Santiago de Compostela
alberto.bugarin.diz@usc.es

Alejandro Sobrino
Dpto. de Filosofía y Antropología
Universidad de Santiago de Compostela
alejandro.sobrino@usc.es

***Resumen*—Existen dos alternativas relacionadas con la manera en la que se debe formalizar los términos vagos de nuestro lenguaje para su correcta implementación en un lenguaje de programación lógica. Una opción es hacer preciso el contenido semántico (es decir, eliminar la vaguedad de un término lingüístico estableciendo límites claros), y otra opción es mantener las propiedades vagas del lenguaje (a pesar de las muchas complicaciones que surgen a raíz de ello). En este artículo ofrecemos un argumento empírico a favor de esta última postura, y analizamos la posibilidad de desarrollar una aproximación al razonamiento impreciso de naturaleza más bien lingüística que numérica. Los resultados obtenidos apoyan esta posibilidad, y ofrecen evidencias según las cuales algunos de los problemas más básicos que pueden presentarse al implementar un método de resolución vago en computación pueden resolverse haciendo uso de la conocida como "aproximación de grado".**

***Palabras clave*—vaguedad; aproximación de grado; razonamiento natural; computación con palabras.**

I. Introducción

En el campo de la computación con lenguaje natural parece existir un acuerdo general sobre el hecho de que el lenguaje humano es, esencialmente, vago, y que dicha vaguedad influye de manera directa en nuestra manera de razonar. Este comportamiento difiere del procesamiento del lenguaje natural clásico, que usa algoritmos precisos. Tradicionalmente, la vaguedad se ha contrapuesto a la precisión: *"We are able to conceive precision; indeed, if we could not do so, we could not conceive vagueness, which is merely the contrary of precisión"* [19:5]. Esta diferencia es la que ha generado más dificultades a la hora de desarrollar un sistema automático computacional que sea capaz de procesar y manipular de manera correcta los términos vagos.

Frente a este problema, una primera aproximación consiste en tratar la vaguedad como un defecto que debe ser eliminado de nuestro lenguaje [19]. Los límites entre las extensiones positivas y negativas de un término vago (es decir, los parámetros que permiten clasificar un elemento como perteneciente o no a la categoría establecida por una palabra) podrían ser descubiertos y aplicados de manera precisa, obteniendo así un formalismo lógico menos imperfecto que el lenguaje natural y que podría llegar a sustituirlo en cualquier ámbito. Las aproximaciones más comunes a esta postura hacen uso de la lógica bivalente o de dos valores (algo es bello o no lo es, una persona es joven o no lo es, etc.), al considerarla como la lógica más sencilla y que mejor representa la realidad [18]. En esta tradición semántica supervaluacionista de Fine [6] y Dummett [3] se propone la posibilidad de que a cualquier término lingüístico P se le puede (y debe) aplicar una serie de precisiones (*precisifications* en inglés) que permitan señalar qué elementos pertenecen a las extensiones positivas y negativas de P.

Existen varios argumentos en contra de esta aproximación, señalando la obtención de resultados contraintuitivos y poco naturales como su principal argumento, e indicando que existen otras lógicas fuera de la lógica bivalente mejores para el estudio formal de la vaguedad [21]. La lógica multivalorada aporta resultados más próximos a la realidad, utilizando una serie de grados numéricos que permiten una clasificación más fina de los elementos pertenecientes al dominio de una palabra. El problema está en que si estos grados no se utilizan de manera aproximada [4], el modelo que se obtiene es un modelo que también trata con precisión la vaguedad (aunque con varios —o infinitos— límites en lugar de solo uno), arrastrando consigo todos los problemas inherentes a estas aproximaciones. Sería, pues, necesario buscar un formalismo gradual no numérico, capaz de representar el significado de los términos vagos sin, para ello, modificar su forma de uso o su contenido semántico.

Tomando como punto de partida la opinión de que la acción de precisar los términos vagos es una solución que, aunque funciona como aproximación general al problema, en ciertos casos puede llevar a resultados poco intuitivos, en este trabajo estudiamos la posibilidad de una alternativa no precisa basada en las relaciones semánticas ya existentes en nuestro lenguaje.

La organización del artículo es la siguiente. En la Sección II introducimos los fundamentos teóricos del problema, así como la conveniencia práctica de utilizar la aproximación de grado como base. En las Secciones III y IV presentamos el estudio empírico llevado a cabo en el ámbito de los razonamientos vagos. En la Sección V se discuten los resultados obtenidos, los cuales sugieren una posible correlación entre los juicios valorativos humanos en un razonamiento y la distancia entre grados en una escala.

II. Tratamiento gradual no preciso de los razonamientos vagos

Uno de los intentos más importantes y exitosos de tratar la vaguedad desde una perspectiva computacional es la conocida como Computación con Palabras [25], [26], un sistema que pretende simplificar la computación de problemas complejos que involucran lenguaje impreciso o vago y facilitar su implementación. Su principal aportación es la introducción del concepto de variable lingüística, así como la idea de que en computación se puede trabajar directamente con palabras (o percepciones), y no únicamente con valores numéricos o medidas. Siguiendo sus directrices, un problema tratado mediante la Computación con Palabras estará expresado en lenguaje natural, de manera que los resultados obtenidos serán, a su vez, proposiciones o palabras.

El inconveniente reside en que, aunque las bases de la Computación con Palabras son claras, el proceso de resolución no es lingüístico, sino numérico, dado que reduce las proposiciones de entrada a expresiones propias de la Lógica Difusa y las manipula hasta conformar un resultado preciso que, en un paso posterior, es transformado de nuevo a lenguaje natural. Inevitablemente, el contenido semántico de las expresiones vagas se volverá preciso, y por ende modificado. A pesar de las múltiples ventajas propias de esta aproximación, consideramos que en el caso de los razonamientos vagos sería conveniente buscar un método alternativo que nos permitiera conservar el significado de las palabras tal y como lo percibimos los seres humanos durante todos los pasos. Creemos que, de ser esto posible, las conclusiones obtenidas serían más coherentes y naturales, y que el proceso de resolución sería más sencillo de comprender para aquellas personas no versadas en la computación o en la Lógica.

En la bibliografía pueden encontrarse diversos argumentos en contra de la acción de precisar de los términos vagos, todos los cuales coinciden al defender que la vaguedad no es un defecto superficial que pueda corregirse trazando límites precisos, sino una característica semántica de nuestro lenguaje (una primera aproximación al respecto puede encontrarse en [23]). Por solo citar algunos casos, en [24] la acción de volver preciso lo que es vago es criticada al argumentar que, aunque pudiésemos definir reglas explícitas que formalizasen la vaguedad, estas no servirían para explicar el significado de un término vago a alguien que no esté familiarizado con él (es decir, estas reglas no serían "informativas"). De forma similar, en [1] se apoya esta postura al argumentar que las condiciones de verdad de las palabras vagas solo pueden ser gobernadas por reglas igualmente vagas. Y otros autores como Edgington [4], aunque apoyan el uso de la Lógica Difusa en el desarrollo de una teoría formal de la vaguedad, advierte que ésta nunca podría ser utilizada de manera precisa, sino como valores aproximados que permitan construir un modelo aproximado del problema y no den lugar a infinitos estados precisos.

En el presente artículo partiremos de las ideas contenidas en [17], [22], donde se propone como alternativa la utilización de las relaciones lingüísticas ya existentes en nuestro lenguaje, las también conocidas como "relaciones semánticas". Algunos ejemplos serían la sinonimia (igualdad de significado, como por ejemplo "escaso" y "poco"), la antonimia (significado opuesto o contradictorio, como es el caso de "afilado" y "romo") o la hiperonimia (inclusión de significados, como es el caso de "libro", que es un hiperónimo de "novela").

Introducir este tipo de relaciones en un lenguaje de programación lógico sería una ventaja enriquecedora y sustancial, dado que la mayoría de ellos se limita a interpretar relaciones sintácticas, y no semánticas. Utilizando como ejemplo el lenguaje Prolog, supongamos que tenemos un programa con los siguientes hechos y reglas donde $P(x)$ denota "x posee la propiedad P" (es decir, "la pasta está rica", "el sushi está bueno", etc.) y $menu(X)$:- $rico(X)$ representa una norma según la cual "el elemento designado por X estará en el menú si X cumple con un requisito, a saber: que X cumpla la propiedad de estar rico":

rico(pasta).

bueno(sushi).

delicioso(paella).

menu(X) :- *rico*(X).

En este caso, la respuesta a la pregunta "¿Qué hay en el Menú?" es clara: "$X = pasta$".

La solución, aunque válida, se nos antoja incompleta dado que aunque el sushi y la paella, según el programa, no estén "ricos", no es del todo coherente afirmar que no cumplen con el requisito necesario para aparecer en el Menú. Pero tampoco podemos afirmar lo contrario (que el sushi y la paella cumplen el requisito al mismo nivel que la pasta).

Lo que haría falta sería que el programa supiese que estos tres adjetivos están semánticamente relacionados entre sí, y cuál es el nivel o tipo de sinonimia de cada uno con respecto a los otros dos. De esta forma, podría presentar más de una respuesta, aunque matizando que algunas de ellas tienen un grado de validez superior al de las otras.

A este respecto se han realizado varios intentos basados en un tratamiento preciso de la vaguedad ([7], [11], [13], entre otros). Muchos de estos métodos parten de la idea de asignar un valor numérico a cada propiedad definida (por ejemplo, asignando los valores 1 y 0,8 a "pasta" y "sushi", respectivamente, con respecto a la propiedad "estar rico"), y utilizar esa clasificación para ordenar las respuestas de más a menos válida, cada una de ellas señalada con un número entre 0 y 1 que determina cuán válida es con respecto a la pregunta hecha al programa. Estos trabajos logran con éxito aumentar la capacidad expresiva de lenguajes como Prolog, pero como ya hemos mencionado anteriormente, esta manera de tratar la vaguedad tiene sus problemas, siendo el principal de todos que asignan valores numéricos arbitrarios sin una base sólida que los justifique, los cuales forman a su vez una serie de infinitos estados precisos que simulan un comportamiento semántico muy distinto al de las palabras vagas de nuestro lenguaje.

Las relaciones lingüísticas no presentarían estas dificultades, aunque un método así será más difícil de implementar a causa

de las diferencias inherentes entre seres humanos y sistemas computacionales. Las relaciones semánticas más útiles en el caso de los razonamientos vagos son las de sinonimia y antonimia a causa de sus paralelismos directos con los conceptos de igualdad y negación implicados en los procesos resolutivos de lenguajes de programación Prolog; es decir, el emparejamiento o *matching* y la resolución por refutación.

Una posible solución se basa en la aproximación conocida como "aproximación de grado" [8]–[10]. Según esta alternativa, los elementos pertenecientes ciertas categorías gramaticales como la de los adjetivos estarían asociados a una entidad abstracta, el grado d, que representaría el valor o cantidad de la propiedad dada por esos elementos. Estos grados estarían a su vez ordenados en escalas, elementos lingüísticamente relevantes que pueden definirse por medio de tres parámetros: un conjunto de grados, una relación de orden que ordena dicho conjunto, y una "dimensión" (también llamada "medida") que establece cuál es la propiedad real representada por la escala (peso, tamaño, edad, etc.). Así pues, todos los elementos de la escala están relacionados, de forma que dos elementos cualesquiera que pertenezcan a ella podrán compararse entre sí (siendo uno mayor que el otro). No hay que perder de vista que la aproximación de grado, en su forma clásica, impone en sus escalas un determinado grado "estándar de comparación" o "normal" que sirve como límite claro entre aquellos grados que representan de manera positiva la dimensión de la escala y aquellos que no. Dado el tratamiento no vago de este formalismo, en el estudio no adoptaremos dicha medida, centrándonos únicamente en la existencia de los grados y de una relación de orden total que nos permite ordenarlos de mayor a menor dentro de una escala.

III. Hipótesis de trabajo

La principal hipótesis sobre la que trabajamos tiene su apoyo teórico en [15], donde el contenido semántico de un término lingüístico se subdivide en dos categorías: significado "cognitivo" y significado emotivo o "no cognitivo". En términos generales, esta clasificación respondería a dos facultades psicológicas distinguibles en el uso del lenguaje: una intelectual, lógica, y otra intuitiva o emotiva. Sin embargo, muchos de los factores que definen el significado no cognitivo de una palabra no están realmente relacionados con lo que se suele considerar como "significado" o "contenido semántico", sino con otros elementos de carácter pragmático tales como la aceptabilidad estilística o social (por ejemplo, el significado no cognitivo determinaría el carácter formal o coloquial de una palabra, o si existe algún contexto en que dicha palabra no puede o no debe ser usada). Por ese motivo, Lyons determina que el tratamiento formal de la sinonimia, así como su aplicación a cualquier proposición natural, debe restringirse únicamente a su contenido cognitivo.

Volviendo a la aproximación gradual, el significado de una palabra, una vez dejado a un lado cualquier implicación no lógica y centrándonos únicamente en el significado cognitivo, estaría representado por los grados. En el caso de un lenguaje de programación Prolog, estos grados estarían representados por las mismas palabras, las cuales conformarían una escala lingüística (en el sentido dado en [12] de "un conjunto de alternantes lingüísticos, o expresiones contrastivas de la misma categoría gramatical, que pueden ordenarse en un orden lineal por grados de informatividad o fuerza semántica"). De esta manera, si prescindimos del formalismo bivalente, inherente de las aproximaciones de grado clásicas, serían pues estas palabras, y su relación total con el resto de palabras de la misma escala, los únicos elementos necesarios para representar el contenido lógico de los términos y su influencia en las condiciones de verdad de un razonamiento vago.

En consecuencia, si Prolog u otros lenguajes de programación pudiesen interpretar de manera correcta estos grados, y a su vez pudiesen mostrarlos al usuario mediante el uso del lenguaje natural, podrían alcanzarse soluciones no precisas para razonamientos en los que intervienen términos vagos, ya que las escalas son elementos que Prolog y otros lenguajes interpretan y manejan con facilidad.

La pregunta que se pretende estudiar es esta: si tenemos una serie de premisas conectadas entre sí por sinónimos de las cuales se infiere una conclusión, ¿existe una relación directa entre el juicio de valor que, de media, realizaría un ser humano acerca de dicha conclusión, y la separación que existe entre los grados de los sinónimos implicados en el razonamiento?

IV. Análisis empírico del problema

El experimento antes mencionado tiene como finalidad estudiar, a partir de la aproximación gradual al problema de la vaguedad, un método con el cual introducir juicios coherentes no precisos de razonamientos vagos en un sistema automático no supervisado. Más concretamente, el experimento explora la posible correlación existente entre la evaluación lingüística de la conclusión de un razonamiento básico y la separación existente entre los adjetivos valorativos implicados dentro de una escala. El objetivo no es tanto establecer una prueba indiscutible sobre la validez de la aproximación gradual como servir de argumento a favor de una teoría de la vaguedad empírica, la cual podría ser sistematizada sin necesidad de aplicar un método numérico.

IV-A. Metodología

El estudio se ha realizado mediante un formulario sobre el que se ha consultado a estudiantes, profesores e investigadores pertenecientes al ámbito universitario. En total, los resultados aquí mostrados se corresponden a las respuestas dadas por 38 participantes. En una primera parte se les hizo una serie de preguntas básicas, a saber: su edad, nivel de estudios y nivel de conocimiento del castellano. Como resultado, la edad media de los participantes ha sido de 25,2 años, y dado que todos han señalado el castellano como su lengua madre (o, en su defecto, un avanzado conocimiento de dicho idioma), y no se han detectado irregularidades en la totalidad de sus respuestas, no ha sido necesario excluir ninguno de los cuestionarios recibidos.

IV-B. Materiales y procedimiento

Los adjetivos utilizados para este experimento han sido cuatro, dos asociados a un parámetro medible (edad para "anciano", temperatura para "caliente") y dos asociados a uno que no puede ser medido (al menos de manera numérica), siendo "guapo" y "divertido" los elegidos para este último caso[1].

El cuestionario se divide en dos partes bien diferenciadas. En la primera, al participante se le presentaron 12 textos breves ordenados al azar, cada uno de los cuales se correspondía con una serie de premisas, enriquecidas de forma escueta para proveerles de un contexto que facilitara su comprensión. A continuación se les mostraba una conclusión posible para cada fragmento, y finalmente se les pedía que estableciesen su grado de conformidad con dicha conclusión en una escala Likert[2] de siete puntos [14].

Un ejemplo es el siguiente:

TEXTO: "El director de casting de una película pone en varias páginas web el siguiente anuncio: "se necesita actor maduro para una nueva campaña de perfumes". Al día siguiente su asistente llega a su despacho y le dice que hay un candidato esperando en la sala. Cuando el director le pregunta sobre el aspecto de dicho candidato, el ayudante le dice que es un anciano."

PREGUNTA: "¿Estás de acuerdo con la afirmación "el candidato cumple con los requisitos del anuncio"?"

OPCIONES: 1) Totalmente de acuerdo, 2) Bastante de acuerdo, 3) Algo de acuerdo, 4) Ni de acuerdo ni en desacuerdo, 5) Algo en desacuerdo, 6) Bastante en desacuerdo, 7) Totalmente en desacuerdo.

La peculiaridad de las premisas aquí presentes es que el punto de unión entre ellas no viene dado por una misma palabra, sino por dos sinónimos, uno de los cuales es siempre uno de los cuatro adjetivos-base antes mencionados ("anciano", "caliente", etc.) y el otro uno de sus sinónimos.

Fundamentándonos en la clasificación dada por Cruse [2], Palmer [16] y Lyons [15], existirían tres tipos de sinónimos básicos: sinónimos absolutos (palabras con idéntico significado, como son "computadora" y ordenador" donde la definición de ambas viene sustentada por las mismas acepciones), sinónimos cognitivos (palabras que, a pesar de tener un contenido semántico formal o "intelectual" idéntico, se diferencian en la intención, actitud o carga emotiva de cada una, como son "delgado" y "flaco", donde "delgado" tiene una carga neutra mientras "flaco" suele utilizarse en sentido peyorativo) y "plesiónimos" o cuasi-sinónimos (palabras entre las que existe una diferencia semántica tal que si una fuera sustituida por otra en una proposición, las condiciones de verdad de dicha proposición cambiarían, como es el caso de "amplio" y "vasto" donde, aunque ambos sirven para designar un espacio grande, "vasto" hace referencia a un espacio mayor que "amplio").

El cuestionario pretende estudiar la relación de cada uno de los cuatro adjetivos-base con un sinónimo cognitivo y dos cuasi-sinónimos, todos ellos recogidos en WordNet [5] (ver Tabla I)[3].

Tabla I: Clasificación semántica de los adjetivos utilizados

	Sin. Cognitivo	Cuasi-sinónimo 1	Cuasi-sinónimo 2
Anciano	Viejo	Senil	Maduro
Caliente	Cálido	Ardiente	Tibio
Guapo	Bonito	Precioso	Agraciado
Divertido	Entretenido	Alegre	Animado

La segunda y tercera columna de cuasi-sinónimos se corresponden con los adjetivos que hacen referencia a un grado superior e inferior, respectivamente, de la dimensión a la que están asociados (la temperatura a la que hace referencia "ardiente" es superior a la que hace referencia "caliente", mientras que la temperatura a la que hace referencia "tibio" es inferior a la que hace referencia "caliente", etc.). Estos adjetivos han sido elegidos con el fin de que todas las categorías sinonímicas existentes estuviesen representadas en el estudio (cognitivos y cuasi-sinónimos tanto en un grado superior como inferior), así como dos ejemplos claros de adjetivos asociados a medidas (la edad de un "anciano" puede medirse en años, y la temperatura de algo "caliente" en grados centígrados) y otros dos que no pueden ser reducidos a una sola medida (no existe ninguna unidad capaz de indicar de manera explícita el nivel de belleza y/o de diversión).

La segunda parte del cuestionario consiste en darle al participante un conjunto de palabras ordenadas al azar y pedirle que las coloque en una escala de diez posiciones en los lugares que considerase más correctos (el número de posiciones ha sido elegido con el fin de que existiera espacio suficiente para que cada participante situase la distancia que considerase oportuna entre cada par de palabras sin que el tamaño de la escala influyese en su decisión). Cada conjunto se corresponde a uno de los adjetivos-base, sus tres sinónimos utilizados en la primera parte (tal y como aparecen en la Tabla I) y uno o dos sinónimos nuevos más (ver Tabla II).

Por último, a los participantes se les pregunta si alguno de los cuatro conjuntos de palabras les ha resultado especialmente difícil de ordenar.

Tabla II: Grupos de adjetivos

Edad	maduro, envejecido, canoso, senil, viejo, anciano
Temperatura	tibio, ardiente, cálido, templado, caliente
Belleza	guapo, precioso, bonito, cautivador, agraciado, atractivo
Diversión	divertido, alegre, animado, entretenido, ameno

IV-C. Predicciones y resultados

El cuestionario fue desarrollado para comprobar si los razonamientos lingüísticos que realizarán los participantes en

[1]La categoría gramatical de los adjetivos ha sido la elegida para el estudio porque a) en la mayoría de los casos son los adjetivos quienes, junto a los adverbios, introducen la vaguedad en nuestro lenguaje, y b) "la gramática tradicional ha reconocido el grado como uno de los accidentes gramaticales del adjetivo", ya que "expresan propiedades, características o dimensiones que, sin variar de manera cualitativa, puede, en cambio, variar cuantitativamente" [20:6-8].

[2]Una escala Likert es una escala psicométrica utilizada en cuestionarios donde al participante se le presenta una serie de afirmaciones y este debe elegir aquellas opciones que mejor representen su nivel de acuerdo o desacuerdo en cada una. Nos hemos decantado por este tipo de cuestionarios gracias al paralelismo existente entre las escalas Likert (cuyos grados están expresados en lenguaje natural) y las escalas lingüísticas de la segunda parte del experimento.

[3]La ausencia de sinónimos absolutos en el estudio se debe a que su existencia no es del todo clara, y el número de casos en el que puede sugerirse su existencia dentro de la categoría de los adjetivos es mínimo [2].

la primera parte tienen algún tipo de correlación con su ordenamiento en las escalas de la segunda parte. De ser así, los resultados darían una pista sobre cómo debería implementarse un razonador lingüístico que tuviese en cuenta el contenido semántico vago de los términos en un lenguaje de programación lógica (como veremos a continuación).

Los resultados de la primera parte arrojaron luz sobre el primer punto a tener en cuenta: que las respuestas no están uniformemente distribuidas entre los siete puntos de la escala Likert, sino que se agrupaban en torno a un valor central, formando una curva de tipo distribución normal o Campana de Gauss (ver Fig. 1)[4]. Esto parece indicar que el uso de

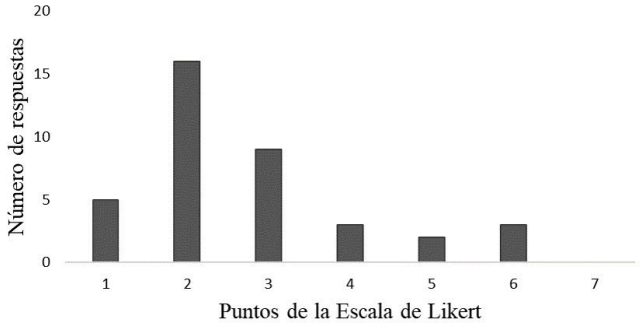


Fig. 1: Distribución de las respuestas para el caso de los sinónimos "anciano" y "senil" en una escala Likert de siete puntos.

sinónimos en un silogismo sí modifica las condiciones de verdad del razonamiento, comportamiento del que no puede dar cuenta un tratamiento de la vaguedad bivalente.

El segundo punto a comentar es que, efectivamente, tal y como se había predicho, las palabras asociadas a una magnitud numérica (edad, temperatura) resultaron más fáciles de ordenar que las asociadas a una magnitud no numérica (belleza, diversión). Esto debe tenerse en cuenta, pues puede ser, a su vez, otra razón que explique por qué las condiciones de verdad de una conclusión se ven modificadas.

Por último, el resultado más relevante de todos puede verse referido en la Fig. 2. El eje de las abscisas está formado por los siete puntos de la escala Likert de la primera parte (igual que en la Fig. 1), y el eje de las ordenadas por un valor numérico entre 0 y 5 que señala la distancia existente entre un par de palabras situadas en la misma escala de la segunda parte (0 = situados en la misma posición, 1 = situados en una posición adyacente, 2 = situados en la escala con una posición de diferencia, etc.). A su vez, cada uno de los doce puntos se corresponde a los doce pares de palabras estudiados en el cuestionario, cuyas coordenadas x-y han sido obtenida mediante los valores medios de los resultados obtenidos en la primera y segunda parte, respectivamente. Las barras de error están representadas a partir de los valores de la segunda y cuarta columna de la Tabla III y representan sus intervalos de confianza (para un valor de confianza del 95 %). Teniendo

[4]El eje de las abscisas va de 1 a 7, valores numéricos que se corresponden a los siete puntos Likert de la escala:

1 = "Totalmente de acuerdo"
2 = "Bastante de acuerdo"
3 = "Algo de acuerdo"
4 = "Ni de acuerdo ni en desacuerdo"
5 = "Algo en desacuerdo"
6 = "Bastante en desacuerdo"
7 = "Totalmente en desacuerdo"

Tabla III: Valores representados en la Fig. 2

Par de palabras	Valor_P1	Conf_P1	Valor_P2	Conf_P2
Anciano-Senil	2.74	0.46	1.58	0.42
Anciano-Viejo	18.7	0.40	1.05	0.30
Anciano-Maduro	5.76	0.44	4.45	0.55
Caliente-Tibio	6.34	0.18	4.21	0.51
Caliente-Cálido	2.82	0.60	1.32	0.28
Caliente-Ardiente	6.05	0.52	2.24	0.34
Guapo-Bonito	2.37	0.47	1.47	0.36
Guapo-Agraciado	3.34	0.49	2.34	0.47
Guapo-Precioso	4.42	0.65	2.26	0.39
Divertido-Entretenido	4.55	0.57	2.79	0.59
Divertido-Animado	3.13	0.50	2.34	0.45
Divertido-Alegre	3.68	0.47	2.08	0.45

todos estos valores en consideración, la recta representada en la gráfica es una estimación obtenida mediante la técnica de mínimos cuadrados con un coeficiente de determinación o R^2 de 0,70, valor que refleja la muy buena calidad de este ajuste.

V. Conclusión y discusión general

Los resultados antes expuestos nos permiten concluir dos hechos relevantes, siendo el primero que la sustitución de una palabra A por un sinónimo $SinA$ en un razonamiento natural casi siempre se percibe como una pérdida de las condiciones de verdad de la conclusión (de no ser así, todas o casi todas las respuestas se corresponderían al primer punto de la escala Likert). En segundo lugar, nos ha permitido comprobar que, si la palabra sustituida A dentro del razonamiento es un sinónimo valorativo graduable, la modificación de las condiciones de verdad percibida por un ser humano se relaciona directamente con la separación existente entre los grados representados por A y $SinA$ dentro de una escala lingüística obtenida de manera empírica.

Si las implicaciones de nuestro experimento resultan correctas, en estos casos ya no sería necesario reducir el contenido semántico de una palabra a valores numéricos mediante la

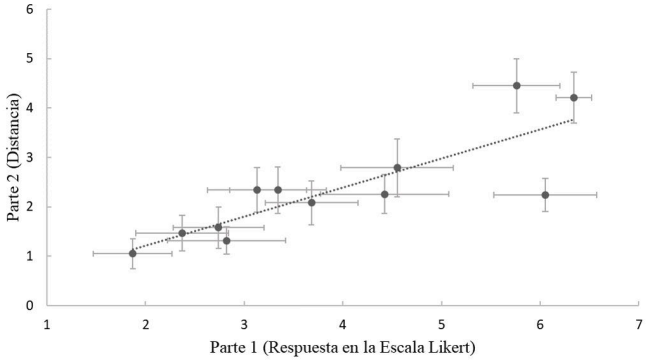


Fig. 2: Representación de los datos del estudio (Tabla III) y su ajuste por mínimos cuadrados.

lógica difusa para su tratamiento no supervisado. Entonces un lenguaje de programación lógica como Prolog podría arrojar más soluciones que las aportadas actualmente, valorando el grado de verdad de cada conclusión de manera lingüística midiendo únicamente la distancia entre los grados asociados a cada término dentro de una escala.

Por supuesto, quedan por resolver algunas cuestiones antes de considerar plausible esta solución, siendo el problema más relevante el de la desambiguación de los términos implicados en un silogismo. Aun limitándonos a tratar únicamente el significado cognitivo (o puramente lógico) de los términos, todavía quedaría determinar la dimensión o magnitud a la que están haciendo referencia en el razonamiento. Y es que, por ejemplo, no es lo mismo utilizar el adjetivo "senil" para hacer referencia a la avanzada edad de un ser humano que a su deterioro cognitivo, ya que en ambos contextos el adjetivo hará referencia a dos grados diferentes, cada uno perteneciente a su propia escala.

Con lo que respecta a los datos tomados, la estimación por mínimos cuadrados nos muestra de manera bastante precisa que cada punto de la escala Likert de la primera parte encuentra una correspondencia directa con una de las distancias establecidas por los participantes en la segunda parte. Si el objetivo es diseñar un método resolutivo que emule la manera de juzgar una conclusión de los seres humanos, de acuerdo a lo aquí expuesto la información podría quedar recogida en escalas ordenadas de manera empírica por el suficiente número de usuarios, lo que simplificaría las inferencias aproximadas o vagas realizadas al estilo Prolog. Por ejemplo, en el caso de un razonamiento tipo Prolog, bastaría con modificar el proceso de unificación con una nueva regla según la cual el emparejamiento entre dos términos se produciría también si los grados asociados a ambos términos en el contexto dado pertenecen a la misma escala, añadiendo en esos casos un determinado "grado de coherencia" al emparejamiento por medio de la distancia existente entre ambos grados.

Para concluir es importante señalar que, aunque es sorprendente la precisión con la que los datos señalan una correlación entre las distancias que existen entre grados y juicios valorativos, los resultados en sí no lo son. Al fin y al cabo, si aceptamos la premisa principal de la aproximación gradual según la cual el contenido semántico cognitivo de los adjetivos se expresa mediante los grados a los que estos hacen referencia, es evidente que cuanto más alejados estén los grados de A y $SinA$ dentro de una misma escala, mayores serán los cambios introducidos en las condiciones de verdad de la conclusión del silogismo al sustituir un término medio por otro.

En todo lo discutido anteriormente, hay que tener en cuenta que para comprobar la validez de estos resultados sería necesario repetir el experimento para un número mayor de participantes y palabras. De igual forma, en futuros estudios cabría la posibilidad de estudiar si este tratamiento de la vaguedad puede extenderse a otras categorías gramaticales sensibles de poseer un contenido semántico vago (tales como los adverbios o, en cierta medida, los sustantivos o incluso los verbos) o si, por el contrario, requieren de un enfoque distinto, no fundamentado en el uso de escalas y grados.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido funanciado por el Ministerio de Economía y Competitividad (proyectos TIN2014-56633-C3-1-R y TIN2017-84796-C2-1-R) y la Consellería de Educación de la Xunta de Galicia (proyectos GRC2014/030 y Acreditación 2016-2019, ED431G/08"). Todos los proyectos fueron cofinanciados por el programa FEDER.

Referencias

[1] L. C. Burns, "Vagueness: an investigation into natural languages and the Sorites paradox", Philosophy and Phenomenological Research 54(2), 1994, pp. 483-486.
[2] D. A. Cruse, Lexical Semantics. Cambridge University Press, 1986.
[3] M. Dummett, "Wang's paradox", Synthese, 30, 1975, pp. 301–24.
[4] D. Edgington, Vagueness by Degrees. In Rosanna Keefe and Peter Smith (eds.), Vagueness: A Reader. MIT Press, 1997.
[5] C. Fellbaum, WordNet. An Electronic Lexical Database. Cambridge, MA: MIT Press, 1998. Disponible en: http://wordnetweb.princeton.edu/perl/webwn. [Consulta: 16 junio 2018].
[6] K. Fine, "Vagueness, truth and logic", Synthese 30(3-4), 1975, pp.265-300.
[7] M. Ishizuka, y N. Kanai," Prolog-ELF incorporating fuzzy logic", New Generation Computing, 3(4),1985, pp.479-486.
[8] C. Kennedy, Projecting the adjective: The syntax and semantics of gradability and comparison. New York: Garland, 1999.
[9] C. Kennedy, "Polar opposition and the ontology od 'degrees' ". Linguistics and Philosophy, 24, 2001, pp. 33-70.
[10] C. Kennedy, y L. McNally, "Scale structure and the semantic typology of gradable predicates". Language, 81(2), 2005, pp. 345-381.
[11] R. C. T. Lee, "Fuzzy logic and the Resolution Principle". Journal of the Association for Computing Machinery, 19(1), 1972, pp. 109-119.
[12] S. C. Levinson, Pragmática. Barcelona: Teide, 1989.
[13] D. Li, and D. Liu, A Fuzzy Prolog Database System. Research Studies Press and John Wiley and Sons, 1990.
[14] R. Likert, "A technique for the measurement of attitudes". Archives of Psychology, 140, 1932, pp. 1–55.
[15] J. Lyons, Introduction to Theoretical Linguistics. Cambridge University Press, 1968.
[16] F. R. Palmer, Semantics: A new outline. Cambridge University Press, 1976.
[17] M. Pereira-Fariña, A. Sobrino, and A. Bugarín, "A proposal of fuzzy chained syllogism based on the concept of synonymy". Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE), 2013, pp. 1-8.
[18] W. V. Quine, "What price bivalence?", Journal of Philosophy 78 (2), 1981, pp. 90-95.
[19] B. Russell, "Vagueness". Australasian Journal of Philosophy 1 (2), 1923, pp. 84-92.
[20] C. Sánchez López, El grado de adjetivos y adverbios. Madrid: Arco/Libros, 2006.
[21] D. H. Sanford, "Competing semantics of vagueness: Many values versus super-truth". Synthese 33 (2-4), 1976, pp. 195-210.
[22] A. Sobrino, "The Role of Synonymy and Antonymy in Natural Fuzzy Prolog". Soft Computing in Humanities and Social Sciences. R. Seising, V. Sanz (eds.), Springer Berlin Heidelberg, 2012, pp. 209-236.
[23] L. Wittgenstein, Philosophical Investigations, trad. Anscombe, G.E.M. Wiley-Blackwell, 1953.
[24] C. Wright, "On the coherence of vague predicates", Synthese 30 (3-4), 1975, pp. 325-65.
[25] L.A. Zadeh, "Fuzzy logic = computing with words". IEEE Transactions of Fuzzy Systems, 4(2), 1996, pp. 103-111.
[26] L.A. Zadeh, "From computing with numbers to computing with words: From manipulation of measurements to manipulation of perceptions". Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE, 46(1), 1999, pp. 105-119.

Uso de Expresiones Lingüísticas Comparativas en AFRYCA 3.0

1º Álvaro Labella
Dpto. de Informática
Universidad de Jaén
Jaén, España
alabella@ujaen.es

2º Rosa M. Rodríguez
Dpto. de CC de la Computación e IA
Universidad de Granada
Granada, España
rosam.rodriguez@decsai.ugr.es

3º Luis Martínez
Dpto. de Informática
Universidad de Jaén
Jaén, España
martin@ujaen.es

***Resumen*—La mayor parte de los problemas de Toma de Decisión en Grupo (TDG) del mundo real se definen en contextos de incertidumbre, en los cuales hay que modelar y operar con información vaga e imprecisa. El uso Enfoque Lingüístico Difuso ha proporcionado excelentes resultados en el tratamiento de dicha incertidumbre. Sin embargo, dicho enfoque presenta limitaciones en la expresión de la información debido al uso de vocabularios limitados y cerrados, lo que demanda expresiones lingüísticas más flexibles y no limitadas a priori. Para ello, se introdujo el concepto de *Conjunto de Términos Lingüísticos Difusos Dudosos* (CTLDD) que permite modelar Expresiones Lingüísticas Comparativas (ELCs). En los problemas de TDG, los Procesos de Alcance de Consenso (PAC) son uno de los principales campos de investigación, dando lugar a numerosas propuestas de PAC. Como consecuencia, la labor de seleccionar y aplicar el PAC más adecuado para un problema de TDG dado puede resultar compleja. Por esta razón se diseñó AFRYCA, un framework para el estudio y análisis de problemas de TDG. Esta contribución presenta nuevas características de la versión 3.0 de AFRYCA para el modelado de incertidumbre mediante información lingüística difusa dudosa y ELCs en PAC.**

***Palabras clave*—AFRYCA, toma de decisión en grupo, consenso, expresiones lingüísticas comparativas**

I. Introducción

La Toma de Decisiones (TD) es habitual en nuestras actividades diarias en las que, a partir de un conjunto de posibles opciones o alternativas, se debe escoger la mejor. En la Toma de Decisión en Grupo (TDG), un grupo de expertos son los encargados de decidir cuál es la mejor solución para un problema de TD [4], [8]. Los problemas de TDG normalmente se definen en contextos bajo incertidumbre donde la información es vaga e imprecisa. Existen diferentes enfoques que manejan este tipo de información [20]–[22], entre ellos, el *Enfoque Lingüístico Difuso* [22] ha proporcionado buenos resultados en la resolución de problemas de TDG definidos bajo incertidumbre. Hasta ahora estos enfoques modelaban la información lingüística utilizando un único termino lingüístico, lo que limita la expresión del conocimiento de los expertos [14]. Varias propuestas se han presentado en la literatura para intentar superar esta limitación y permitir utilizar más de un término lingüístico. En esta contribución se introduce el concepto de *Conjunto de Términos Lingüísticos Difusos Dudosos* (CTLDD) [15]. Un CTLDD permite modelar la información lingüística mediante el uso de varios términos lingüísticos, permitiendo a los expertos expresar la duda entre ellos. Las *Expresiones Lingüísticas Comparativas* (ELCs) hacen uso de los CTLDDs y permiten a los expertos expresar sus opiniones de una forma más cercana a su modelo cognitivo habitual.

Las necesidades en la resolución de los problemas de TDG han evolucionado a lo largo del tiempo. En ocasiones, ya no solo se requiere encontrar la mejor solución, sino que además, esa solución debe de ser satisfactoria para todo el grupo. Tradicionalmente, los problemas de TDG se resolvían aplicando un proceso de selección de alternativas [2], donde se tenían en cuenta las opiniones individuales de los expertos, pero no el acuerdo entre ellos [16]. Por lo tanto, la decisión final podía no ser del agrado de todos los expertos, provocando que parte de ellos se sintieran excluidos del proceso de decisión. Por esta razón surgieron los Procesos de Alcance de Consenso (PAC) como una fase adicional en la resolución de problemas de TDG [17]. En un PAC, los expertos revisan, discuten y modifican sus opiniones con el objetivo de alcanzar una solución que satisfaga al grupo. Los PAC se han convertido en un pilar fundamental dentro del marco de la TDG y, como consecuencia, se pueden encontrar numerosas propuestas de modelos de PAC, también denominados *modelos de consenso* [1], [3], [5]. Debido a esto, identificar y aplicar el modelo de consenso que mejor se adapte a un problema de TDG puede resultar una tarea ardua, compleja y que demanda mucho tiempo.

AFRYCA, *A FR*amework for the anal*Y*sis of *C*onsensus *A*pproaches, es un framework que permite el análisis y estudio de la resolución de problemas de TDG mediante la simulación de PAC [10]. Los principales objetivos de AFRYCA son: identificar ventajas y desventajas de los diferentes modelos de consenso, establecer comparaciones entre modelos de consenso, identificar cuándo un modelo de consenso es más apropiado para un problema de TDG en particular y visualizar la evolución de las preferencias de los expertos a lo largo del PAC. AFRYCA permite llevar a cabo estas tareas mediante la simulación de PAC, lo que conlleva simular los comportamientos de los expertos que participan en el proceso. Desde su inicio, AFRYCA ha evolucionado tanto en tecnologías como en herramientas para PAC [7]. En esta

Esta contribución está parcialmente financiada por el proyecto de investigación TIN2015-66524-P.

contribución se presenta una nueva versión de AFRYCA que incluye nuevas capacidades para el tratamiento de información lingüística difusa dudosa. Estas funcionalidades son: definición de problemas de TDG donde los expertos expresan sus preferencias mediante el uso de ELCs, soporte para la visualización de dichas preferencias e incorporación de un nuevo modelo de consenso para este tipo de información.

Esta contribución se estructura de la siguiente forma: en la Sección II se introducen brevemente algunos conceptos preliminares. En la Sección III se presenta AFRYCA 3.0 y sus nuevas funcionalidades, mientras que en la Sección IV se muestra un ejemplo ilustrativo de dichas funcionalidades. Finalmente, la Sección V expone algunas conclusiones y trabajos futuros.

II. Preliminares

Aquí se revisan distintos conceptos necesarios para entender AFRYCA y el uso de CTLDDs en dicho framework.

II-A. Toma de Decisión en Grupo

Un problema de TDG está compuesto por un conjunto de expertos, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, que opinan sobre un conjunto de alternativas $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ evaluadas en base a un conjunto de criterios $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$, con el objetivo de encontrar la mejor solución [8]. Es habitual que las opiniones de los expertos sobre las alternativas se representen mediante relaciones de preferencia. Una relación de preferencia asociada con el experto e_i se nota como $P_i = (p_i^{lk})_{n\times m}$ y se representa en (1) tal que:

$$P_i = \begin{pmatrix} - & \ldots & p_i^{ln} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_i^{n1} & \ldots & - \end{pmatrix} \quad (1)$$

Existen distintos tipos relaciones de preferencia según la información que utilicen, las más comunes son:

- *Relación de preferencia difusa* [9]: En una Relación de Preferencia Difusa (RPD), cada valoración $p_i^{lj} = \mu_{P_i}(x_l, x_j) \in [0, 1]$ representa el grado de preferencia de e_i sobre x_l con respecto a x_j, $l, k \in \{1, \ldots, n\}, l \neq j$.
- *Relación de preferencia lingüística* [11]: En una Relación de Preferencia Lingüística (RPL), cada valoración $p_i^{lj} \subseteq X \times X$, con un grado de preferencia $\mu_p : X \times X \to S$, donde S es un conjunto de etiquetas predefinido y $\mu_p(x_l, x_j) = p_{lj}$ representa el grado de preferencia lingüístico de la alternativa x_l sobre x_j.
- *Relación de preferencia dudosa* [19]: En una Relación de Preferencia Dudosa (RPDD), cada valoración $p_i^{lj} \subseteq X \times X$, donde $p_{lj} = \{p_{lj}^{\beta}, \beta = 1, 2, \ldots, \#p_{lj}\}$ ($\#p_{lj}$ es el número de valores en p_{lj}), es un elemento difuso dudoso que indica todos los posibles grados de preferencia de la alternativa x_l sobre x_j.
- *Relación de preferencia lingüísitica dudosa* [13], [14]: En una Relación de Preferencia Lingüística Dudosa (RPLD), cada valoración $p_i^{lj} \subseteq X \times X \to S$, donde S es un conjunto de etiquetas predefinido y $p_{lj} = \{p_{lj}^{\beta} \mid \beta = 1, 2, \ldots, \#p_{lj}\}$ ($\#p_{lj}$ es el número de términos lingüísticos en p_{lj}), es un conjunto de términos lingüísticos difusos que indica todos los posibles grados de preferencia de la alternativa x_l sobre x_j.

II-B. Procesos de Alcance de Consenso

Los PAC son procesos iterativos y dinámicos, en los que los expertos modifican sus opiniones iniciales con el objetivo de acercar posturas y alcanzar un alto nivel de acuerdo sobre las preferencias del problema de TDG después de varias rondas de debate [17]. Un PAC es normalmente guiado por un *moderador* que supervisa el proceso. En problemas de TDG bajo incertidumbre, la lógica difusa desempeña un papel importante al proporcionar modelos de representación y procesamiento de información en opiniones vagas e imprecisas.

Los PAC se incluyen como una fase adicional dentro del esquema de resolución de problemas de TDG, con el objetivo de obtener una solución consensuada que satisfaga a los expertos involucrados en la toma de decisiones. El concepto de *consenso* ha sido definido desde diferentes puntos de vista: (i) A veces como la *unanimidad*, aunque esta visión es poco realista y prácticamente imposible de alcanzar en problemas de TDG reales. (ii) Otras veces se han aportado visiones más flexibles, como la de *soft consensus* o *consenso suave*, basada en el concepto de mayoría difusa definida por Kacprzyk [4], más cercana a la percepción que el ser humano tiene del consenso. Según este concepto, el consenso es alcanzado cuando *la mayoría de los individuos están de acuerdo en la mayoría de las cuestiones más relevantes*.

Las fases que componen un PAC son:

1. *Recolección de preferencias*: Se recoge la opinión de cada experto sobre las alternativas.
2. *Cálculo del nivel de consenso*: Se calcula el nivel de consenso alcanzado por el grupo en la ronda de consenso.
3. *Control de consenso*: Se compara el nivel de consenso obtenido con un valor umbral predefinido que representa el mínimo nivel de consenso que debe de ser alcanzado en el PAC. Si el nivel de consenso alcanzado por el grupo es mayor que el umbral, se inicia el proceso de selección de la mejor alternativa, en caso contrario se iniciará una nueva ronda de consenso.
4. *Generación de recomendaciones*: Cuando no se alcanza el umbral de consenso, es necesario iniciar un proceso en el cual las opiniones de los expertos deben modificarse para así acercar posturas entre ellos. Este proceso será llevado a cabo por el moderador [10], que debe proporcionar sugerencias a los expertos involucrados para que modifiquen sus opiniones iniciales.

II-C. Conjuntos de Términos Lingüísticos Difusos Dudosos

El concepto de CTLDD se introdujo para facilitar la labor de los expertos a la hora de dar sus valoraciones empleando expresiones lingüísticas, especialmente en aquellos casos en los que dudan entre varios términos lingüísticos.

Definición 1: [15] Sea $S = \{s_0, \ldots, s_g\}$ un conjunto de términos lingüísticos, un CTLDD, H_S, se define como un subconjunto finito ordenado de términos lingüísticos consecutivos de S.

$$H_S = \{s_i, s_{i+1}, \ldots, s_j\}, \text{tal que}, s_k \in S, k \in \{i, \ldots, j\} \quad (2)$$

El concepto de CTLDD facilita el modelado de las opiniones de los expertos mediante múltiples términos lingüísticos, sin embargo, no es parecida a cómo los seres humanos expresan sus opiniones. Por esta razón, se presentaron las ELCs [15], dichas expresiones se generan mediante una gramática libre de contexto y son próximas, en términos de expresividad, a la forma de expresarse de los seres humanos.

Definición 2: [15] Sea G_H una gramática libre de contexto y $S = \{s_0, \ldots, s_g\}$ un conjunto de términos lingüísticos. Los elementos de $G_H = (V_N, V_T, I, P)$ son definidos como:

$V_N = \{(\text{término primario}), (\text{término compuesto}),$
$(\text{relación unaria}), (\text{relación binaria}),$
$(\text{conjunción})\}$
$V_T = \{\text{menor que}, \text{mayor que}, \text{entre}, \text{y}, s_0, s_1, \ldots, s_g\}$
$I \in V_N$

Las reglas de producción son definidas mediante la forma extendida de Backus Naur, en la que la utilización de paréntesis indica elementos opcionales y el símbolo | indica elementos alternativos.

$P = \{I ::= (\text{término primario})|(\text{término compuesto})$
$(\text{término compuesto}) ::= (\text{relación unaria})$
$(\text{término primario})|(\text{relación binaria})(\text{término primario})$
$(\text{conjunción})(\text{término primario})$
$(\text{término primario}) ::= s_0|s_1|\ldots|s_g$
$(\text{relación unaria}) ::= \text{menor que}|\text{mayor que}$
$(\text{relación binaria}) ::= \text{entre}$
$(\text{conjunción}) ::= \text{y}\}$

Dichas expresiones lingüísticas comparativas pueden ser representadas mediante CTLDD utilizando la función E_{G_H}.

Definición 3: [15] Sea E_{G_H} una función de transformación entre expresiones lingüísticas ll, $ll \in G_H$, y H_s, siendo S el conjunto de términos lingüísticos utilizados por G_H:

$$E_{G_H} : ll \rightarrow H_S$$

Dependiendo del tipo de ELC, su transformación en CTLDD se lleva a cabo de diferentes formas:

- $E_{G_H}(s_i) = \{s_i / s_i \in S\}$
- $E_{G_H}(\text{menor que } s_i) = \{s_j / s_j \in S \text{ y } s_j \leq s_i\}$
- $E_{G_H}(\text{mayor que } s_i) = \{s_i / s_i \in S \text{ y } s_j \geq s_i\}$
- $E_{G_H}(\text{entre } s_i \text{ y } s_j) = \{s_i / s_i \in S \text{ y } s_i \leq s_k \leq s_j\}$

III. Expresiones Lingüísticas Comparativas en AFRYCA 3.0

En esta sección se muestran las nuevas funcionalidades de la versión 3.0 de AFRYCA relacionadas con el modelado de información lingüística difusa dudosa mediante ELCs. Primero se presenta la arquitectura software de AFRYCA 3.0, y después el esquema de resolución del framework. Por último, se analizan las nuevas funcionalidades en detalle.

III-A. Arquitectura de AFRYCA 3.0

AFRYCA es una aplicación software desarrollada bajo la plataforma *Eclipse Rich Client Platform* (RCP), una plataforma para construir y desarrollar aplicaciones multiplataforma ricas de escritorio fáciles de mantener y extender. Estas características vienen determinadas por el tipo de arquitectura software sobre la que se construye el framework. Dicha arquitectura *basada en componentes* está diseñada para resolver los problemas más comunes en el desarrollo software, como son el mantenimiento, reutilización, ampliación y modificación. Los componentes, también denominados *plug-ins*, son pequeñas porciones de software que se conectan entre si formando una aplicación software.
Anteriores versiones de AFRYCA se desarrollaron empleando la rama estable de Eclipse RCP, 3.X. El uso de esta rama proporcionaba ciertas ventajas, como una mayor estabilidad, documentación y compatibilidad con componentes de terceros. Sin embargo, en términos tecnológicos, AFRYCA no presentaba ninguna evolución. Este es el motivo por el que AFRYCA 3.0 ha sido desarrollada bajo la nueva rama 4.X de Eclipse RCP, e4. Esta evolución permite que AFRYCA 3.0 se beneficie de nuevas tecnologías orientadas al desarrollo de aplicaciones bajo una arquitectura basada en componentes como la inyección de dependencias o el uso de servicios declarativos.
AFRYCA 3.0 está compuesta por más de 100 componentes, todos desarrollados bajo la rama 4.X (Fig. 1).

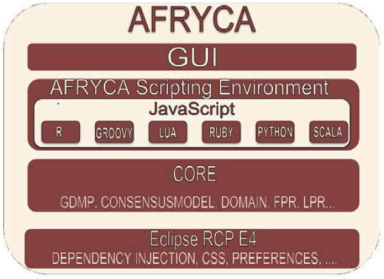


Figura 1. Arquitectura de AFRYCA 3.0

Visitar la web de AFRYCA para más información[1].

III-B. Esquema de Resolución de AFRYCA 3.0

El esquema de resolución de AFRYCA para problemas de TDG se basa en diferentes fases que son descritas a continuación:

[1]http://sinbad2.ujaen.es/afryca/es

1. *Definición del problema de TDG*: Aquí se define el problema de TDG, incluyendo *expertos, alternativas* y *criterios*. Además, también se recogen las opiniones de los expertos, que pueden emplear diferentes tipos de relaciones de preferencia. AFRYCA 3.0 da soporte a RPD, RPL, RPDD y RPLD.
2. *Selección del modelo de consenso*: El siguiente paso es seleccionar el modelo de consenso que se va a emplear en la simulación del PAC. AFRYCA 3.0 tiene incorporados un conjunto de modelos de consenso separados en dos grandes grupos, aquellos que utilizan un proceso de generación de recomendaciones y los que no.
3. *Configuración de los parámetros del modelo de consenso*: Una vez seleccionado el modelo de consenso, es indispensable configurar sus parámetros. Los parámetros de un modelo de consenso influyen directamente en el resultado de la simulación y deben ser ajustados en base al problema de TDG que se esté tratando.
4. *Selección del comportamiento de expertos*: Para llevar a cabo la simulación del PAC, AFRYCA simula el comportamiento de los expertos que participan en el proceso. Actualmente, AFRYCA 3.0 incluye dos tipos de patrones de comportamientos, *estándar* y *estándar con oposición*. En el patrón de comportamiento estándar los expertos pueden *aceptar* o *rechazar* las recomendaciones. En el caso del patrón de comportamiento estándar con oposición; los expertos pueden *aceptar*, *rechazar* o *ir en contra* de las recomendaciones sugeridas.
5. *Configuración de los parámetros del comportamiento*: Al igual que en los modelos de consenso, es posible configurar los parámetros de un patrón de comportamiento. Los patrones de comportamiento se simulan siguiendo una distribución de probabilidad binomial. La configuración de los parámetros de la distribución determinan el comportamiento de los expertos, por ejemplo, definiendo la probabilidad de que un experto acepte una recomendación. Es obvio que la evolución de un PAC será muy distinta si el patrón de comportamiento seleccionado define una probabilidad muy alta de aceptar la recomendación frente a una muy baja.

Nota: En el caso de seleccionarse un modelo de consenso que no aplique un proceso de generación de recomendaciones, no es necesario llevar a cabo los dos últimos pasos para comenzar la simulación.

III-C. Soporte de Información Lingüística Difusa Dudosa en AFRYCA

Posibilitar el modelado de información lingüística dudosa en AFRYCA y el uso de ELCs, ha requerido del desarrollo de nuevos componentes software que han sido incorporados y conectados con el resto de componentes que componen el framework. Estos nuevos componentes han dotado a AFRYCA de nueva funcionalidad que será explicada de forma detallada a continuación.

- *Soporte de conjuntos de términos lingüísticos difusos*: AFRYCA 3.0 permite la creación de conjuntos de términos lingüísticos difusos [21]. Los términos lingüísticos de los que se componen el conjunto, son representados mediante etiquetas lingüísticas representadas por funciones de pertenencia triangulares. AFRYCA 3.0 permite la creación de este tipo de conjuntos con cualquier número de etiquetas lingüísticas. Un ejemplo de creación de un conjunto de este tipo se muestra en la Fig. 2.

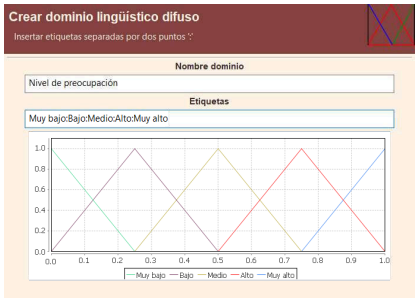


Figura 2. Creación de un conjunto de términos lingüísticos difusos

- *Soporte de relaciones de preferencia lingüísticas dudosas*: AFRYCA modela RPLD cuyos valores están representados por ELCs (ver Fig. 3). Para la generación de las ELCs es indispensable previamente definir un conjunto de términos lingüísticos difusos con el que formar las expresiones. Además, AFRYCA también puede llevar a cabo la transformación de ELCs a CTLDD.

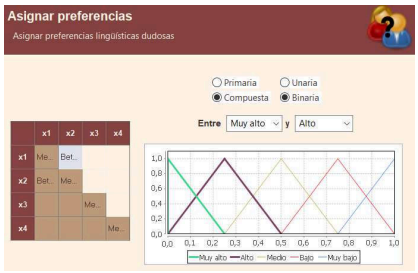


Figura 3. Relación de preferencia lingüística difusa dudosa

- *Modelos difusos de consenso*: La capacidad de tratar información lingüística difusa dudosa en AFRYCA abre un abanico de nuevas posibilidades en cuanto modelos de consenso se refiere. Ahora es posible incluir modelos de consenso que lleven a cabo operaciones con ELCs, lo que permite realizar nuevas comparaciones entre modelos y estudios sobre su funcionamiento. En relación a esto, se ha incorporado un nuevo modelo de consenso [12] que emplea ELCs.
- *Visualización de RPLD*: Una de las principales características de AFRYCA es la visualización de las preferencias de los expertos a los largo del PAC simulado. El incorporar un nuevo tipo de información y por tanto de relación de preferencia, conlleva a incluir nuevas formas de visualización. AFRYCA emplea dos técnicas para visualizar las preferencias de los expertos que son el *escalamiento multidimensional* [6] y la técnica de *análisis*

de componentes principales [18]. Estas dos técnicas han tenido que ser adaptadas para representar la información lingüística difusa dudosa a partir de RPLD.

IV. Ejemplo Ilustrativo

Con el objetivo de mostrar el funcionamiento de las nuevas funcionalidades de AFRYCA 3.0, relacionadas con la representación y computación de ELCs, esta sección presenta un problema de TDG en el cual los expertos expresan sus opiniones a través de ELCs y que empleará un modelo difuso de consenso orientado a trabajar con ELCs [12].

Supongamos el entrenador de la Selección Nacional de Fútbol que debe realizar la convocatoria de aquellos jugadores que participarán en la Copa del Mundo de 2018 que se celebrará en Rusia. Al ser una decisión tan compleja y delicada, el entrenador no la tomará solo y será aconsejado por sus tres asistentes, tomando la decisión final un total de 4 profesionales, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Después de disputar todos los partidos de clasificación a la Copa del Mundo el seleccionador y sus asistentes tienen clara la mayor parte de la convocatoria, únicamente queda una plaza vacante que la disputan 4 jugadores, $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. De los jugadores únicamente será evaluada su técnica con el balón $C = \{c_1\}$. Debido a la complejidad de la decisión y a la duda que genera, el entrenador y sus asistentes proporcionan sus preferencias sobre los jugadores usando RPLD cuyos valoraciones están representadas por ELCs. Los técnicos usarán el conjunto de términos lingüísticos representado en la Fig. 4 para generar las ELCs y valorar la calidad de los futbolistas.

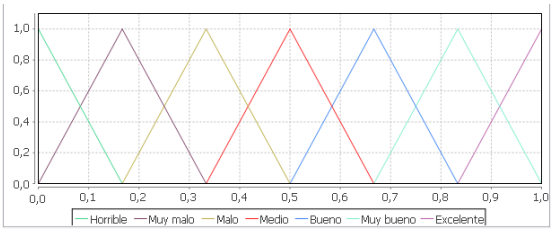


Figura 4. Conjunto de términos lingüísticos

Para resolver de forma consensuada el problema de TDG planteado, seguiremos el esquema de resolución de AFRYCA introducido en la Sección III-B. Se define el problema de TDG junto con todos sus elementos, el conjunto de expertos $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, alternativas $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ y criterios, que en este caso solo es uno que representa la calidad del futbolista $C = \{c_1\}$. También se definen las preferencias de los expertos mediante RPLD. La Fig. 5 ilustra la definición del problema empleando AFRYCA.

- *Definición del problema de TDG*
- *Selección del modelo de consenso* Una vez definido el problema, el siguiente paso es seleccionar el modelo de consenso. Para este problema se selecciona el modelo de consenso difuso presentado por Rodríguez et al. [12] (ver Fig 6), centrado en el tratamiento de CTLDDs donde los expertos expresan sus opiniones a partir de ELCs.

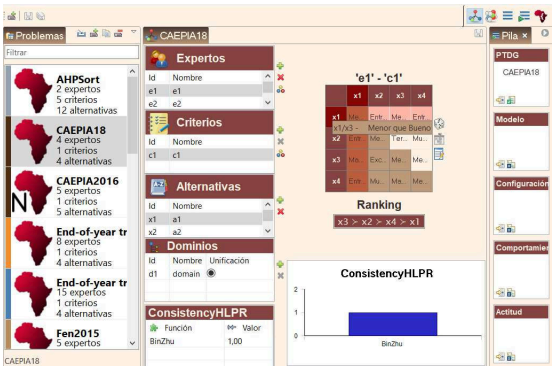


Figura 5. Definición del problema

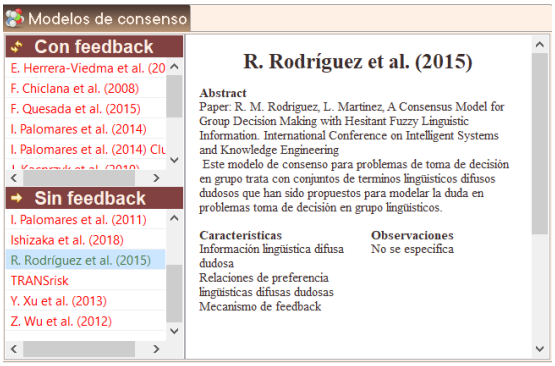


Figura 6. Selección del modelo de consenso

- *Configuración de los parámetros del modelo de consenso* Cuando se selecciona un modelo de consenso, se deben configurar sus parámetros junto con dos adicionales que son incluidos en todos los modelos de consenso, éstos son el umbral de consenso y el máximo número de rondas permitidas en el PAC (mu y h_{max} en Fig. 7). La configuración de los parámetros del modelo seleccionado se representa en la Fig. 7.

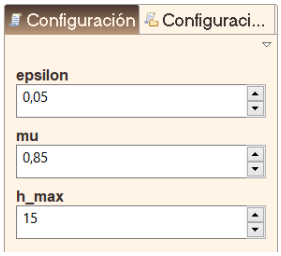


Figura 7. Configuración de parámetros

Ya que el modelo de consenso seleccionado no emplea un mecanismo de generación de recomendaciones, no es necesario llevar a cabo ningún paso más para comenzar con la simulación del PAC y obtener una solución del problema.

Una vez se han completado todos los pasos previamente definidos, se lleva a cabo la simulación del PAC. El resultado

se muestra en la Fig. 8. Además, AFRYCA permite visualizar la evolución de las preferencias de los expertos a lo largo del PAC. Esta visualización, empleando para ello la técnica de escalamiento multidimensional, se muestra en la Fig. 9. Notar que en este tipo de visualización siempre se representa la opinión colectiva del grupo en el centro del eje de coordenadas.

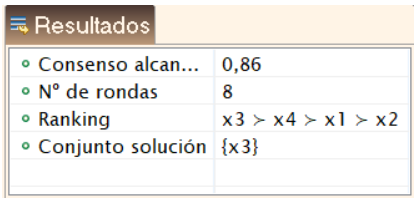


Figura 8. Resultado de la simulación

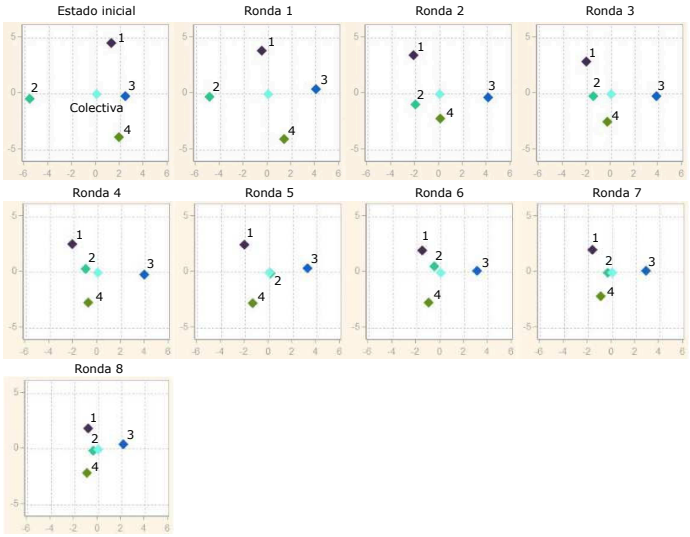


Figura 9. Evolución de las preferencias de los expertos

En la Fig. 8 se muestra que el consenso final alcanzado por los expertos es 0.86, y se han necesitado de un total de 8 rondas para alcanzar el grado de consenso fijado. La Fig. 9 también nos permite ver la evolución de los expertos a lo largo del PAC y como van acercando posturas en las sucesivas rondas de debate. Este acercamiento de posturas puede apreciarse fácilmente, los expertos modifican sus preferencias con el objetivo de llegar a un consenso con el resto del grupo, lo que conlleva a que su opinión esté cada vez más próxima a la opinión colectiva del grupo y su posición en el gráfico tienda hacia el centro. Finalmente, si se aplica un proceso de selección a este consenso, el jugador que debería ser convocado es x_3.

V. Conclusiones

AFRYCA es una herramienta software que permite la resolución de problemas de TDG mediante la simulación de PAC, diseñada bajo una arquitectura basada en componentes cuyas principales ventajas son la reusabilidad y la inclusión de nuevas características. En esta contribución se han presentado nuevas funcionalidades de AFRYCA relacionadas con el manejo de información lingüística difusa dudosa y más concretamente con ELCs. Además se ha descrito tanto la arquitectura como el esquema de resolución del framework. Este conjunto de nuevas funcionalidades abre camino a futuras mejoras en AFRYCA como la inclusión de nuevos modelos difusos de consenso que empleen información lingüística y la incorporación de nuevos tipos de expresiones lingüísticas.

Referencias

[1] S. Alonso, I.J. Pérez, F.J. Cabrerizo, and E. Herrera-Viedma. A linguistic consensus model for web 2.0 communities. *Applied Soft Computing*, 13(1):149–157, 2013.

[2] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, and J.L. Verdegay. A sequential selection process in group decision making with linguistic assessments. *Information Sciences*, 85(4):223–239, 1995.

[3] E. Herrera-Viedma, F.J. Cabrerizo, J. Kacprzyk, and W. Pedrycz. A review of soft consensus models in a fuzzy environment. *Information Fusion*, 17:4–13, 2014.

[4] J. Kacprzyk. Group decision making with a fuzzy linguistic majority. *Fuzzy Sets and Systems*, 18(2):105–118, 1986.

[5] Janusz Kacprzyk and Sławomir Zadrożny. Supporting consensus reaching processes under fuzzy preferences and a fuzzy majority via linguistic summaries. In *Preferences and Decisions*, pages 261–279. Springer, 2010.

[6] J. B. Kruskal and M. Wish. *Multidimensional scaling*, volume 11. Sage, 1978.

[7] Á. Labella, F. J. Estrella, and L. Martínez. Afryca 2.0: an improved analysis framework for consensus reaching processes. *Progress in Artificial Intelligence*, pages 1–14, 2017.

[8] J. Lu, G. Zhang, D. Ruan, and F. Wu. *Multi-Objective Group Decision Making*. Imperial College Press, 2006.

[9] S.A. Orlovsky. Decision-making with a fuzzy preference relation. *Fuzzy Sets and Systems*, 1(3):155–167, July 1978.

[10] I. Palomares, F.J. Estrella, L. Martínez, and F. Herrera. Consensus under a fuzzy context: Taxonomy, analysis framework AFRYCA and experimental case of study. *Information Fusion*, 20:252–271, 2014.

[11] R. M. Rodríguez, M. Espinilla, P. J. Sánchez, and L. Martínez. Using linguistic incomplete preference relations to cold start recommendations. *Internet Research*, 20(3):296–315, 2010.

[12] R. M. Rodríguez and L. Martínez. A consensus model for group decision making with hesitant fuzzy linguistic information. In *Intelligent Systems and Knowledge Engineering (ISKE), 2015 10th International Conference on*, pages 540–545. IEEE, 2015.

[13] R. M. Rodríguez, L. Martínez, and F. Herrera. A group decision making model dealing with comparative linguistic expressions based on hesitant fuzzy linguistic term sets. *Information Sciences*, 241(1):28–42, 2013.

[14] R.M. Rodríguez, A. Labella, and L. Martínez. An overview on fuzzy modelling of complex linguistic preferences in decision making. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 9:81–94, 2016.

[15] R.M. Rodriguez, L. Martinez, and F. Herrera. Hesitant fuzzy linguistic term sets for decision making. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 20(1):109–119, 2012.

[16] M. Roubens. Fuzzy sets and decision analysis. *Fuzzy Sets and Systems*, 90(2):199–206, 1997.

[17] S. Saint and J. R. Lawson. *Rules for Reaching Consensus. A Modern Approach to Decision Making*. Jossey-Bass, 1994.

[18] S. Wold, K. Esbensen, and P. Geladi. Principal component analysis. *Chemometrics and intelligent laboratory systems*, 2(1-3):37–52, 1987.

[19] M. Xia and Z. Xu. Managing hesitant information in GDM problems under fuzzy and multiplicative preference relations. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 21(06):865–897, 2013.

[20] J. Yang, J. Liu, J. Wang, H. Sii, and W. Hong-Wei. Belief rule-base inference methodology using the evidential reasoning approach-rimer. *IEEE Transactions on systems, Man, and Cybernetics-part A: Systems and Humans*, 36(2):266–285, 2006.

[21] L. A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3):338–353, 1965.

[22] L. A. Zadeh. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—i. *Information sciences*, 8(3):199–249, 1975.

Ajuste a una progresión hipotética de aprendizaje

Estudio de 3 casos de estudiantes de Magisterio

Itziar García-Honrado
Statistics, O. R. and Mathematics Didactics,
University of Oviedo,
Oviedo, Spain
garciaitziar@uniovi.es

***Abstract*— Esta comunicación presenta un modelo matemático a través del uso de técnicas borrosas para describir el ajuste de los alumnos a progresiones hipotéticas de aprendizaje, parte fundamental de las conocidas Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje. En concreto, se hace uso del modelo granular lingüístico de un fenómeno. Para su implementación se distinguen distintos niveles de consecución de cada una de las etapas indicadas en la progresión hipotética de aprendizaje.**

Keywords*— *evaluación; resumen lingüístico; trayectoria hipotética de aprendizaje

I. INTRODUCCIÓN

El constructo de Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) pertenece al ámbito de la educación matemática, nace de la mano de Simon en 1995 [4], y permite al profesor de matemáticas modelar las distintas escenarios por los que sus estudiantes hipotéticamente trascurren para la consecución de un objetivo de aprendizaje fijado a priori. Para ello, una vez fijado el objetivo, se diseña unas tareas y se muestran los efectos esperados en los estudiantes hasta conseguir el objetivo. Dichos efectos, divididos en distintas etapas, constituirán una progresión hipotética de aprendizaje.

En posteriores estudios [5], Simon y Tzur experimentan en un aula el ajuste de los alumnos a la progresión hipotética de aprendizaje, mostrando cuando un alumno cumple o no cumple el efecto hipotético esperado en cada una de las etapas.

En la presente comunicación, proponemos realizar un estudio de este ajuste en términos imprecisos. Para ello, mostraremos el diseño de una THA y lo implementaremos en el aula, como se ha hecho en [1]. Por otro lado, diseñaremos unas rúbricas de evaluación que nos permita distinguir distintos niveles de consecución de la progresión hipotética de aprendizaje, así como el diseño de los elementos del modelo granular lingüístico que permitirán obtener una descripción lingüística del ajuste a la progresión hipotética de aprendizaje diseñada a priori de los alumnos. Finalmente, a modo de ejemplo, se mostrará el modelo desarrollado para valorar el ajuste de 3 alumnos a la progresión hipotética de aprendizaje.

II. CONCEPTOS BÁSICOS

A. Progresión hipotética de aprendizaje

En una THA, se distinguen los siguientes componentes: el objetivo de aprendizaje, las tareas de aprendizaje y el proceso de aprendizaje hipotético; es decir, la predicción de cómo el pensamiento y la comprensión de los estudiantes evolucionan en el contexto de las actividades de aprendizaje [4]. Se destaca especialmente la importancia de la tarea, su diseño, los objetivos de aprendizaje, los conocimientos previos de los estudiantes y la progresión hipotética de aprendizaje. Así mismo, se considera relevante reconocer los efectos de la secuencia de tareas en la progresión de aprendizaje de la futura maestra [5].

A través de la THA, se muestran diferentes escenarios por los que los estudiantes pueden pasar transformando sus ideas intuitivas a una comprensión más formal de los conceptos matemáticos. Los niveles cada vez más sofisticados de razonamiento matemático evidencian aspectos de la progresión de la comprensión de un contenido específico. Por todo lo anterior, se considera que las THA constituyen un recurso instructivo muy eficaz para la enseñanza. La THA proporciona al profesorado recursos relevantes para acompañar a cada estudiante en el logro de su aprendizaje. Indican también el estado actual de aprendizaje del alumnado a través de una secuencia de estados de aprendizaje.

B. Modelo granular lingüístico de un fenómeno (GLMP)

Este modelo se sustenta dentro del campo de la lógica fuzzy. En consecuencia, no solo permite determinar si existe o no el ajuste de un alumno a la progresión hipotética existe, sino que permite asignar distintos grados de cumplimiento del ajuste.

Para determinar el ajuste utilizaremos el concepto de variable lingüística [8], entendida como aquella que puede tomar valores lingüísticos como Muy bajo / Bajo / Medio / Alto / Muy alto. Cada uno de ellos se representará, en nuestro caso, por un conjunto borroso continuo triangular,

debido a su simplicidad en la función (lineal definida por trozos) y a la posibilidad de ser definida por sus vértices. Al conjunto de los conjuntos borrosos que representa los valores que puede tomar la variable se le llama partición borrosa (Figura 1).

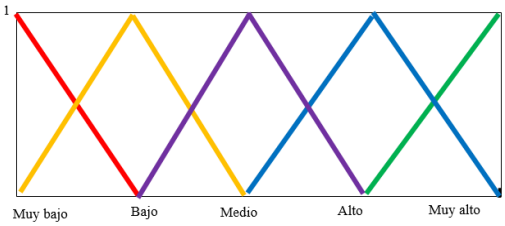


Figura 1: Conjuntos borrosos modelando las etiquetas lingüísticas

Combinando los problemas de control borroso con el actual auge de la conocida computación con palabras [9], surge el paradigma Modelo Granular Lingüítico de un fenómeno, o, en inglés, *Granular Linguistic Model of a Phenomenon* (GLMP) [6], el cual consiste en hacer resúmenes lingüísticos de fenómenos complejos como puede ser el ajuste de un estudiante a la progresión hipotética de aprovechamiento. En la literatura se pueden encontrar otras aplicaciones de este paradigma en la evaluación del aprendizaje de los alumnos [3].

III. Metodología

A. *Diseño de la THA.*

En esta investigación hemos construido la siguiente THA cuyo objetivo de aprendizaje es reconocer la generalización de patrones en la construcción de la secuencia geométrica de las figuras que aparecen en la obra artística "Composición aritmética" de Theo van Doesburg que puede observarse en la Figura 2. La actividad tiene un carácter competencial aunando arte y matemáticas, en concreto se eligió dicha obra, por las regularidades matemáticas que en ella aparecen [2,7] idóneas la búsqueda de patrones gemétrico y su generalización.

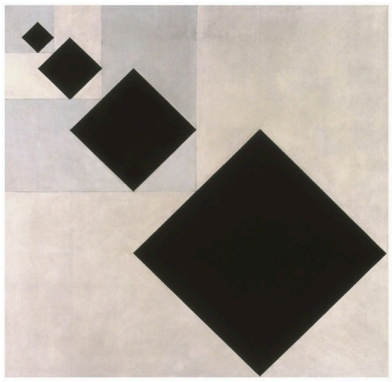


Figura 2. *Arithmetic Composition*. Theo van Doesburg, 1929-1930.

Las tareas y la progresión hipotética de aprendizaje se describen en la Tabla 1 y 2, respectivamente.

Tabla1. Tareas de la THA

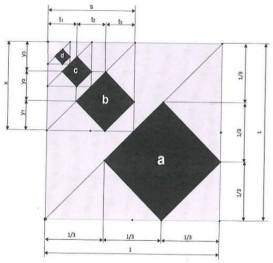
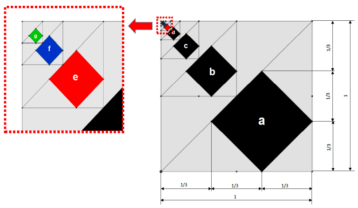
Tarea de aprendizaje	
Tarea 1. (Relacionada con la Etapa 1)	A partir de la obra de arte de la Figura 1, se ha construido la imagen que se muestra a continuación (la información que se incluye puede ayudar a resolver las tareas 5, 6 y 7).  Completa los datos que faltan en la figura, encontrando los valores de x, y1, y2, y3, s, t1, t2, t3. Justifica tu respuesta.
Tarea 2. (Relacionada con la Etapa 2)	(a) En el cuadro gris grande de la Figura 1, ¿cuántas figuras "a" pueden colocarse sin superponerse? (b) Dentro de la figura negra "a", ¿cuántas figuras negras "b" podrías colocar?
Tarea 3. (Relacionada con la Etapa 3)	En la Figura 1, (a) Calcula el área de la figura negra "a". (b) Calcula el área de la figura negra "b". (c) Calcula el área de las figuras negras "c" y "d".
Tarea 4. (Relacionada con la Etapa 4)	Si continuáramos la secuencia de las figuras negras podríamos dibujar otras, tal y como se muestra en la ampliación siguiente.  ¿Sabrías calcular las áreas de las nuevas figuras "e", "f" y "g"? Explica cómo lo has hecho.

Tabla 2. Progresión hipotética de aprendizaje.

Progresión hipotética de aprendizaje	
Etapa 1	Coordinación de la estructura espacial y la estructura numérica (a partir de las cotas) en la identificación de la secuencia de longitudes de los lados de los cuadrados grises involucrados en la obra artística.

Etapa 2	Coordinación de la estructura espacial y la numérica de la secuencia de los cuadrados, estableciendo relaciones entre las áreas de los cuadrados de la Figura 1.
Etapa 3	Cálculo del área de la sucesión de los cuadrados negros, relacionando el valor del área de un cuadrado con el valor del área del anterior, sigue un proceso de generalización cercana [Estadio1 de [10]].
Etapa 4	Abstracción de la coordinación espacial y numérica para el establecimiento de la relación funcional entre el área de los cuadrados negros [Estadio 2 de [10]].

B. Diseño de la rúbrica de evaluación

Distinguiremos distintos niveles en el logro de cada una de las etapas de la progresión hipotética de aprendizaje: no se logra (N0), se logra a nivel bajo (N1), a nivel medio (N2) o a nivel alto (N3).

Para ello se elabora una rúbrica de evaluación en la que se describe cada uno de estos niveles en las distintas etapas.

- Respecto a la Etapa 1:
  - N0: No identifica las longitudes de los lados de los cuadrados grises involucrados en el cuadro.
  - N1: Identifica parcialmente las longitudes de los lados de los cuadrados grises involucrados en el cuadro.
  - N2: Identifica la secuencia de longitudes de los lados de los cuadrados grises, pero no muestra coordinación entre la estructura espacial y la numérica.
  - N3: Identifica la secuencia de longitudes de los lados de los cuadrados grises mostrando coordinación entre la estructura espacial y la numérica.
- Respecto a la Etapa 2:
  - N0: No establece relaciones entre el área de los cuadrados negros del cuadro.
  - N1: Establece relaciones, únicamente, entre las áreas de una pareja de cuadrados del cuadro.
  - N2: Establece relaciones entre las áreas de los cuadrados del cuadro, pero no muestra coordinación entre la estructura espacial y la numérica.
  - N3: Establece relaciones entre las áreas de los cuadrados del cuadro mostrando coordinación entre la estructura espacial y la numérica.
- Respecto a la Etapa 3:
  - N0: No evidencia el cálculo de ningún área ni la relación que le permite obtener el área de uno a partir del área del anterior.
  - N1: Calcula las áreas de algunos de los cuadrados de la sucesión.
  - N2: Calcula las áreas de los cuadrados de la sucesión y muestra la relación que permitirá obtener el proceso de generalización cercana.
  - N3: Calcula las áreas de los cuadrados de la sucesión, consiguiendo el valor del área de un cuadrado con el valor del área del anterior, es decir desarrolla el proceso de generalización cercana.
- Respecto a la Etapa 4:
  - N0: No consigue llegar a una relación entre la posición que ocupan los cuadrados y su área.
  - N1: Llega a una relación recursiva entre la posición que ocupa el cuadro y su área, es decir, basándose exclusivamente en el área del anterior.
  - N2: Consigue una obtener una relación entre la posición que posición que ocupan los cuadrados y su área, aunque no se utilice lenguaje matemático.
  - N3: Establece una relación funcional entre la posición que ocupan los cuadrados y su área.

Es posible que no siempre sepamos con certeza que un alumno está en un determinado nivel en una etapa, podemos permitir que un alumno verifique características de dos o más niveles y demos como resultado final una media ponderada del nivel en el que se encuentra. Los niveles mostrados en la rúbrica se representan por conjuntos fuzzy, en este caso, triangulares. Asimilaremos N0 a la etiqueta lingüística nulo, N1 a bajo, N2 a medio y N3 a alto.

C. Diseño del modelo granular lingüístico

Las rúbricas diseñadas formarán parte de los inputs de los sistemas de reglas fuzzy que se definen con el objetivo de conseguir el resumen lingüístico del ajuste de un alumno a la progresión hipotética de aprendizaje.

A partir de las rúbricas se definirán las percepciones de primer orden que serán las Etapas: 1, 2, 3 y 4.
Las etapas 1 y 2 se agregarán mediante un sistema de reglas, formando la percepción de segundo orden: Ajuste a los conceptos previos para el acercamiento a la relación entre los cuadrados de una sucesión. Dicha variable tomará 5 etiquetas lingüísticas Muy bajo / Bajo / Medio / Alto / Muy alto. Concretamente, el sistema se compondrá de 8 reglas:

1. Si en la Etapa 1 el nivel alcanzado por el alumno es nulo, entonces el ajuste de los conceptos previos a la progresión hipotética de aprendizaje es muy bajo.

2. Si en la Etapa 2 el nivel alcanzado por el alumno es nulo, entonces el ajuste de los conceptos previos a la progresión hipotética de aprendizaje es muy bajo.
3. Si en la Etapa 1 el nivel alcanzado por el alumno es bajo y en la Etapa 2 el nivel alcanzado por el alumno es bajo, entonces el ajuste de los conceptos previos a la progresión hipotética de aprendizaje es bajo.
4. Si en la Etapa 1 el nivel alcanzado por el alumno es bajo y en la Etapa 2 el nivel alcanzado por el alumno es medio, entonces el ajuste de los conceptos previos a la progresión hipotética de aprendizaje es medio.
5. Si en la Etapa 1 el nivel alcanzado por el alumno es medio y en la Etapa 2 el nivel alcanzado por el alumno es bajo, entonces el ajuste de los conceptos previos a la progresión hipotética de aprendizaje es medio.
6. Si en la Etapa 1 el nivel alcanzado por el alumno es medio y en la Etapa 2 el nivel alcanzado por el alumno es medio, el ajuste de los conceptos previos a la progresión hipotética de aprendizaje es alto.
7. Si en la Etapa 1 el nivel alcanzado por el alumno es alto, entonces el ajuste de los conceptos previos a la progresión hipotética de aprendizaje es muy alto.
8. Si en la Etapa 2 el nivel alcanzado por el alumno es alto, entonces el ajuste de los conceptos previos a la progresión hipotética de aprendizaje es muy alto.

El método de resolución del sistema de reglas será el método Mamdani aplicando el producto a las sentencias Si/Entonces. La Figura 3 muestra la superficie de control del sistema de reglas.

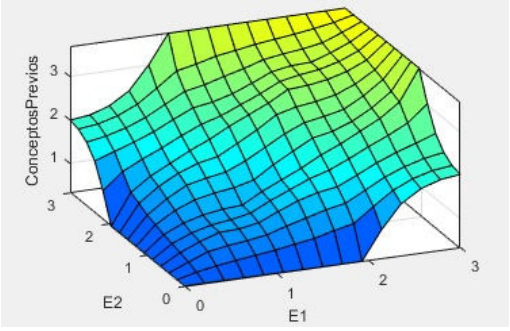


Fig.3. Superficie de control para el sistema de reglas descrito.

Las etapas 3 y 4 se agregan mediante un sistema de 8 reglas, análogo al anterior, para originar la percepción de segundo orden: Ajuste al proceso de generalización según Zapatera y Callejo [10] (cercana y funcional). Dicha variable se define a través de 5 etiquetas lingüísticas del mismo modo que la anterior.

Finalmente, a través de otro sistema de 13 reglas, similar a los anteriores, a partir de las dos percepciones de segundo orden generadas, se definirá la percepción general sobre el ajuste a la progresión hipotética de aprendizaje de la progresión que haya seguido el alumno.

Todos los sistemas de reglas involucrados se han implementado en Matlab. Ese engranaje permite la construcción de una descripción lingüística del ajuste de cada alumno a la progresión hipotética de aprendizaje, del siguiente modo:

El alumno A se ha ajustado a un nivel Muy bajo/Bajo/ Medio/Alto/Muy alto a la progresión hipotética de aprendizaje en las tareas encaminadas a trabajar los conceptos previos para el acercamiento a la relación entre los cuadrados de una sucesión. En el caso del proceso de generalización, el ajuste con la progresión hipotética de aprendizaje ha sido Muy bajo/Bajo/ Medio/Alto/Muy alto. Con todo ello, podemos hablar de un ajuste global a la progresión hipotética de aprendizaje Muy bajo/Bajo/ Medio/Alto/Muy alto.

Además, se asignará un valor numérico al ajuste global en el continuo [0,4] donde 0 representará el menor y 4 el mayor ajuste posible.

IV. Contexto de la experimentación

El experimento de enseñanza se llevó a cabo en una sesión de 2 horas en un aula con estudiantes del Grado de Maestro el pasado curso, 2017-2018, en la Universidad de Oviedo.

Las tareas que se recoge en este trabajo pertenecen a la segunda sesión y parte central de una secuencia de actividades relacionadas con la obra de arte de Theo van Doesburg realizadas a lo largo de tres sesiones.

Participaron 33 alumnos en el experimento de los cuales se seleccionaron tres casos distintos en los que podemos ver distintos niveles de ajuste a la progresión hipotética de aprendizaje. Nos referiremos a los casos de los alumnos con pseudónimo: Ángela, Andrea y José.

V. Casos seleccionados

A. *Ajuste a la progresión hipotética de aprendizaje de Ángela*

Ángela realiza exclusivamente las primeras actividades de la tarea. Dado el alto nivel alcanzado en las mismas, la falta de las demás tareas podría estar motivada por un inadecuado ajuste del tiempo de realización.

En la Etapa 1, Ángela se encuentra en un nivel alto ya que justifica las medidas pedidas a través de la imagen del cuadro.

Respecto a la Etapa 2, Ángela muestra las relaciones pedidas mostrando una coordinación entre la estructura gráfica y numérica pues se apoya en la imagen para calcular las relaciones como se muestra en la Figura 4. Por lo tanto, el nivel alcanzado en esta etapa es alto.

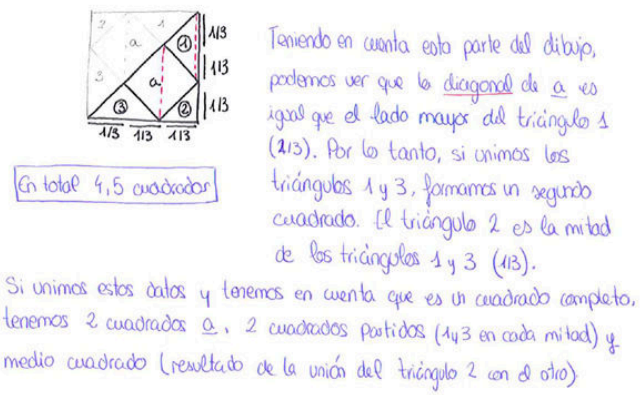


Figura 4. Explicación dada por Ángela justificando la relación entre la figura "a" y el cuadro gris grande.

Sin embrago, en la Etapa 3 se encuentra en un nivel entre bajo y medio, ya que simplemente calcula las áreas de algunos cuadrados negros de la sucesión, no obstante, en este cálculo, muestra la relación que permite obtener el proceso de generalización cercana, ya que relaciona estas respuestas con la relación entre dos cuadrados negros consecutivos. El nivel alcanzado en la Etapa 4, es nulo, pues la alumna no realiza la tarea.

Tras el análisis de la resolución de Ángela, las percepciones de primer nivel en este caso serán: 3 (E1), 3 (E2), 1.5 (E3), y 0(E4). A partir de estos datos, se implementan los sistemas de reglas involucrados. En la Figura 5, se recoge el sistema de reglas que permite obtener la percepción global.

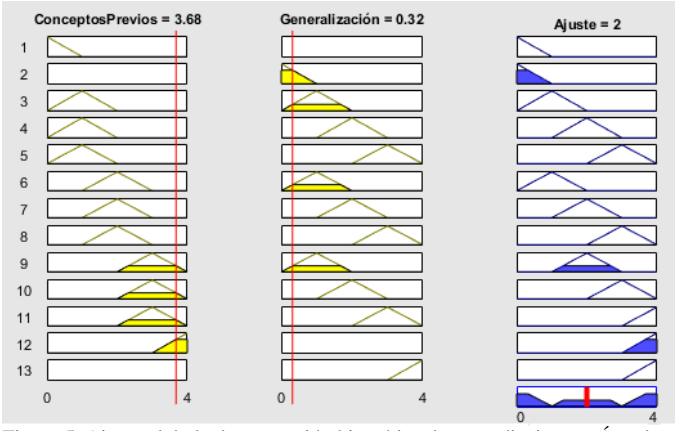


Figura 5. Ajuste global a la progresión hipotética de aprendizaje para Ángela

El resumen lingüístico para el caso de Ángela sería:

Ángela se ha ajustado a un nivel muy alto a la progresión hipotética de aprendizaje en las tareas encaminadas a trabajar los conceptos previos para el acercamiento a la relación entre los cuadrados de una sucesión. En el caso del proceso de generalización, el ajuste con la progresión hipotética de aprendizaje ha sido entre Bajo y Medio. Con todo ello, podemos hablar de un ajuste global a la progresión hipotética de aprendizaje Medio. (2/4)

B. Ajuste a la progresión hipotética de aprendizaje Andrea

Andrea, en la Etapa 1, está en un nivel entre medio y alto, ya que escribe directamente el resultado justificándolo por: "Estos datos los obtengo de observar los datos que ya sabemos". Así que, aunque no hay evidencias de las operaciones que hace para la obtención de los datos, interpretamos que puede existir una coordinación entre la estructura espacial y numérica.

En la Etapa 2, establece la relación que hay entre las áreas del cuadrado "a" y el cuadrado gris grande, a través de operaciones del cálculo de áreas y sumas repetidas del área de "a" hasta aproximarse a 1, obteniendo 4.5. Averigua la relación entre los cuadrados negros a través de razonamientos con la medida de los lados de los mismos. Por lo tanto, establece las relaciones, aunque interpretamos que, a través de la estructura numérica, no de la espacial. Entonces, el nivel es medio.

En la Etapa 3, se asigna un nivel entre Bajo y Medio, ya que calcula las áreas de los cuadrados, pero no muestra la relación que le permite obtener la generalización cercana.

Finalmente, en la Etapa 4, realiza una generalización cercana evidenciando la relación entre cuadrados consecutivos de la sucesión. Por consiguiente, llega a una relación recursiva entre la posición que ocupa el cuadro y su área. Así pues, está en un nivel Bajo.

Con todo esto, las percepciones de primer nivel en este caso serán: 2.5 (E1), 2 (E2), 1.5 (E3), y 1(E4). En la Figura 6, se muestra el último sistema de reglas que permite generar el ajuste global a la progresión hipotética de aprendizaje.

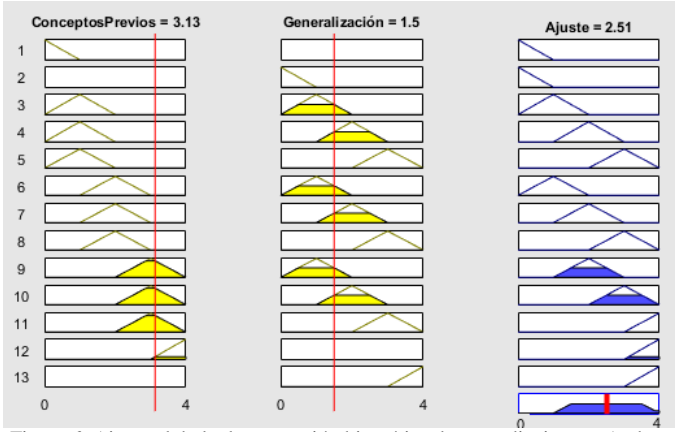


Figura 6. Ajuste global a la progresión hipotética de aprendizaje para Andrea

El resumen lingüístico para el caso de Andrea sería:

Andrea se ha ajustado a un nivel alto a la progresión hipotética de aprendizaje en las tareas previas encaminadas a trabajar los conceptos para el acercamiento a la relación entre los cuadrados de una sucesión. En el caso del proceso

de generalización, el ajuste con la progresión hipotética de aprendizaje ha sido entre Bajo y Medio. Con todo ello, podemos hablar de un ajuste global a la progresión hipotética de aprendizaje entre Medio y Alto. (2.51/4

C. Ajuste a la progresión hipotética de aprendizaje de José

Según la rúbrica de evaluación José alcanza un nivel muy alto en todas las etapas. En la Etapa 1, además de identificar la secuencia de longitudes, coordina las estructuras espacial y numérica justificando gráfica y numéricamente los resultados: "todas son 1/3 de 1/2, por lo tanto 1/6". La forma de proceder en la Etapa 2 es similar a la resolución de Ángela, realiza explicaciones gráficas muy similares a su compañera y las coordina con la estructura numérica, por tanto, se encuentra en un nivel alto.

Respecto a las etapas 2 y 3, José muestra un nivel alto. En la Etapa 3, utiliza la relación entre cuadrados negros para calcular el área del siguiente de la sucesión, por lo tanto desarrolla el proceso de generalización cercana y alcanza un nivel alto. En la Etapa 4, establece la relación funcional entre la posición que ocupan los cuadrados en la sucesión y su área, llegando a la fórmula general que se muestra en la Figura 7.

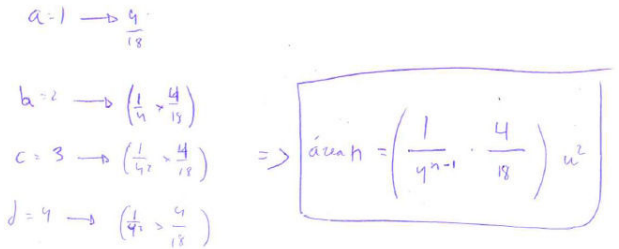


Figura 7. Relación funcional establecida por José.

Así pues, las percepciones de primer nivel en este caso serán: 3 (E1), 3 (E2), 3 (E3), y 3(E4), de las que se infieren las percepciones de segundo nivel (ambas con centroide del nivel: 3.68) y la percepción global con un nivel muy alto (3.65) como puede apreciarse en la Figura 8.

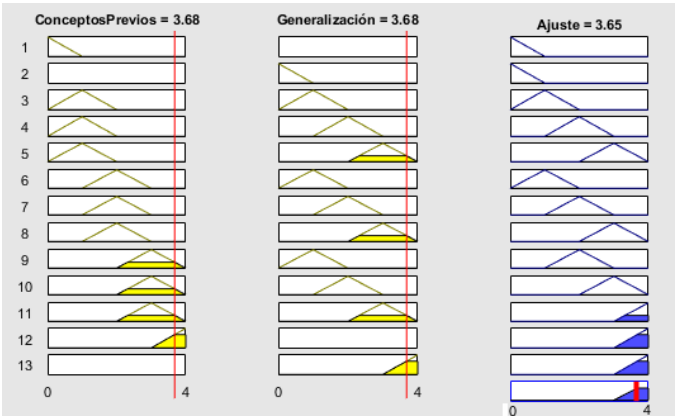


Figura 8. Ajuste global de la progresión hipotética de aprendizaje para José

El resumen lingüístico para este caso es:

José se ha ajustado a un nivel muy alto a la progresión hipotética de aprendizaje en las tareas encaminadas a trabajar los conceptos previos para el acercamiento a la relación entre los cuadrados de una sucesión. En el caso del proceso de generalización, el ajuste con la progresión hipotética de aprendizaje ha sido muy alto. Con todo ello, podemos hablar de un ajuste global a la progresión hipotética de aprendizaje muy alto. (3.65/4)

VI. CONCLUSIONES

En este trabajo, se muestra cómo valorar las resoluciones de alumnos a tareas enmarcadas dentro del marco de las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje y mostrar el ajuste de las mismas a progresiones hipotéticas de aprendizaje diseñadas a priori. El ajuste, se expresa a partir de términos lingüísticos modelando los distintos modos de ajuste a través de etiquetas lingüísticas. Esto resulta beneficioso en comparación con estudios previos en los que sólo se recogía si había o no ajuste simplificando la riqueza de las resoluciones de los alumnos y no valorando los distintos niveles de adquisición.

AGRADECIMIENTOS

El estudio forma parte del Proyecto EDU2015-65378-P, MINECO.

REFERENCIAS

[1] García-Honrado, I., Clemente, F., Vanegas, Y., Badillo, E. y Fortuny, J.M. "Análisis de la progresión de aprendizaje de una futura maestra" Actas del Congreso XXII SEIEM, aceptado para su publicación, Septiembre 2018.

[2] Pim, D. "Some Notes on Theo van Doesburg (1883-1931) and his Arithmetic Composition 1" *For the learning of Mathematics*, 2001, vol. 21(2), pp. 31-36.

[3] Sanchez-Torrubia, M. G., Torres-Blanc, C. y Triviño, G. "Modelo lingüístico del aprendizaje para la evaluación automática basada en criterios" En F. Bobillo, H. Bustince, F. J. Fernández, y E. Herrera-Viedma (Eds.), *Actas del XVII ESTYLF*, pp. 417-422, Zaragoza, 2014.

[4] Simon, M. A. "Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective" *Journal for Research in Mathematics Education*,1995, vol. 26, pp.114-145.

[5] Simon M.A. y Tzur, R. "Explicating the Role of Mathematical Tasks in Conceptual Learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory" *Mathematical thinking and learning*, 2004, vol. 6(2), pp.91–104.

[6] Triviño, G. y Sugeno, M "Towards linguistic descriptions of phenomena" *International Journal of Approximate Reasoning*, 2013, vol. *54*(1), pp.22-34.

[7] Walter, M. "Looking at a Painting with a mathematical Eye" *For the learning of Mathematics*,2001, vol. 21(2), pp.26-30.

[8] Zadeh, L. A. " The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning – III". *Information Sciences,1975, vol. 9*(1), pp. 43-80.

[9] Zadeh, L. A. "Fuzzy logic= computing with words" *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on fuzzy systems*, 1996, vol. *4*(2), 103-111.

[10] Zapatera, A. y Callejo, M.L. "Prospective primary teachers' noticing of students' understanding of pattern generalization" J. Math Teacher Education, Springer, 2017, vol. 20, pp. 309-333.

Caracterizando a los usuarios a través de sus opiniones

Jesus Serrano-Guerrero, Francisco P. Romero, Jose Ruiz-Morilla, Jose A. Olivas

Departamento de Tecnologías y Sistemas de Información
Escuela Superior de Informática (UCLM), Ciudad Real, 13071, España
jesus.serrano@uclm.es, joseangel.olivas@uclm.es, franciscop.romero@uclm.es

***Resumen*—El análisis de sentimientos basados en aspectos permite detectar comportamientos de ciertos usuarios. Estos comportamientos necesitan ser modelado para poder entenderse la opinión final sobre un producto o servicio. Este artículo propone el modelado de cada opinión final en base a la agregación borrosa de las distintas opiniones sobre los distintos aspectos que conforman el producto opinado. Igualmente propone algunas aplicaciones para dicho aplicaciones.**

Palabras clave—análisis de sentimientos basado en aspectos; operadores OWA; perfil de usuario

I. Introduccion

Cada vez es más frecuente el uso de servicios, especialmente en Internet gracias a plataformas como Amazon o Tripadvisor, que permiten expresar opiniones a los usuarios sobres distintos productos. Detrás de estas opiniones se pueden ocultar distintos comportamientos que es necesario que sean caracterizados con el fin de entender los distintos usuarios y las situaciones en las cuales hacen un comentario determinado u otro.

El campo del Análisis de Sentimientos se centra principalmente en detectar posibles expresiones que sean susceptibles de ser interpretadas como opiniones y cuantificar el grado en el que cada opinión sea más o menos positiva, entre otras tareas. La detección de las opiniones se puede realizar a nivel de sentencia, de aspecto o de documento.

Este trabajo está más centrado en la detección a nivel de aspecto, porque permite ver cómo los usuarios pueden expresar sus preferencias acerca de determinadas características de un producto o servicio descartando otros. Por ejemplo, si un usuario que acaba de adquirir un teléfono hace una crítica feroz acerca de su batería, esto puede suponer que adquirió el teléfono pensado que la batería era uno de sus puntos fuertes y a la vez, se podría inferir que una de las preferencias del usuario era dicha batería. Sin embargo, si el usuario a pesar de hacer una queja sobre un aspecto como podría ser la cámara frontal del móvil no es demasiado efusivo, podría interpretarse que el producto no es bueno, pero tampoco era un detalle importante para el usuario a la hora de tomar su decisión final sobre comprar un móvil u otro.

Todos estos detalles hacen que para entender la opinión final de un usuario sobre un producto o servicio, sea necesario tener en cuenta la importancia de cada aspecto y el grado de positividad o negatividad emitido hacia cada uno de ellos. Es por ello, que se propone el modelado de una opinión final como la agregación borrosa de las opiniones parciales emitidas sobre cada aspecto.

La principal contribución de este artículo es una visión acerca de algunos posibles comportamientos de los usuarios cuando expresan opiniones, especialmente, sobre productos y servicios que compran o utilizan, así como una posible aproximación borrosa que permitiría el modelado de dichos comportamientos, y sus posibles aplicaciones.

El artículo está organizado en las siguientes secciones: la sección II se corresponde con el estado del arte, la sección III presenta la principal motivación del artículo, la sección IV presenta cuál sería la metodología para agregar las distintas opiniones y dar una conclusión final al usuario sobre un producto, la sección V presentará algunas aplicaciones de uso y finalmente, algunas conclusiones serán remarcadas.

II. Estado del arte

Según Cambria, el Análisis de Sentimientos puede ser considerado como un problema de Procesamiento de Lenguaje Natural (PLN) muy restringido, en el que sólo es necesario entender los sentimientos positivos o negativos respecto a cada frase y/o las entidades o temas objetivo [1]. Sin embargo, a pesar de ser un problema restringido, todos los trabajos en este campo, así como todos los trabajos en Recuperación de Información, siempre luchan con problemas de PLN no resueltos (manejo de la negación, reconocimiento de entidades con nombre, desambiguación del sentido de la palabra,...) que son esenciales para detectar claves del lenguaje como la ironía o el sarcasmo [2], y en consecuencia, para encontrar y valorar sentimientos.

Uno de los principales aspectos que debe abordar la PLN son los diferentes niveles de análisis. Dependiendo de si el objetivo del estudio es un texto completo o un documento, una o varias frases enlazadas, o una o varias entidades o aspectos de esas entidades, se pueden realizar diferentes tareas de PLN y Análisis de Sentimientos. Por lo tanto, es necesario distinguir

tres niveles de análisis: (i) nivel de documento, (ii) nivel de frase y (iii) nivel de entidad/aspecto.

A nivel de documento se considera que un documento es una opinión sobre una entidad o aspecto de la misma. Este nivel está asociado con la tarea llamada clasificación de sentimientos a nivel de documento [3]–[6]. Sin embargo, si un documento presenta varias frases que tratan de diferentes aspectos o entidades, entonces el nivel de oración es más adecuado. El nivel de la oración está relacionado con la clasificación de la subjetividad de la tarea; considera cada oración como una opinión positiva, negativa o neutral [7]–[10]. Y finalmente, cuando se necesita información más precisa, entonces surge el nivel de entidad/aspecto. Es el nivel de grano más fino, considera un objetivo sobre el que el ponente de opinión expresa una opinión positiva o negativa. Este último nivel es posiblemente el más complejo, ya que es necesario extraer con gran precisión muchas características, como las fechas o el lapso de tiempo, las diferentes características/espectáculos y entidades a tener en cuenta, así como las relaciones entre ellas, los formadores de opinión y sus características, etc. Está estrechamente relacionado con tareas como Opinion Mining y Opinion Summarization [9], [10].

Muchas tareas surgen vinculadas al Análisis de Sentimientos. Algunas de ellas están estrechamente relacionadas y es difícil separarlas claramente porque comparten muchos aspectos. Los más importantes son:

1. Clasificación de sentimientos: también llamada orientación de sentimientos, orientación de opinión, orientación semántica o polaridad de sentimientos [11]. Se basa en la idea de que un documento/texto expresa la opinión de un titular sobre la entidad y trata de medir el sentimiento de ese titular hacia la entidad. Por lo tanto, consiste principalmente en clasificar las opiniones en tres categorías principales: positivas, negativas o neutras. Parece una tarea simple; sin embargo, es una tarea compleja, especialmente cuando las opiniones provienen de múltiples dominios o idiomas [12], [13]. Esta tarea está estrechamente relacionada con la predicción de la valoración de los sentimientos, que consiste en medir la intensidad de cada sentimiento.

2. Clasificación de subjetividad. Consiste principalmente en detectar si una frase dada es subjetiva o no. Una frase objetiva expresa información objetiva, mientras que una frase subjetiva puede expresar otro tipo de información personal como opiniones, evaluaciones, emociones, creencias, etc. Además, las frases subjetivas pueden expresar sentimientos positivos o negativos, pero no todas lo hacen. Esta tarea puede ser vista como un paso previo a la clasificación de los sentimientos. Una buena clasificación de la subjetividad puede asegurar una mejor clasificación de los sentimientos [14]–[17].

3. Resumen de opiniones. Se centra especialmente en extraer las características principales de una entidad compartida dentro de uno o varios documentos y los sentimientos al respecto [18]. Por lo tanto, se pueden distinguir dos perspectivas en esta tarea: la integración de un solo documento y la integración de varios documentos. La integración de un solo documento consiste en analizar hechos internos presentes en el documento analizado, por ejemplo, cambios en la orientación de los sentimientos a lo largo del documento o vínculos entre las diferentes entidades/características encontradas, y principalmente mostrar aquellos textos que mejor los describen. Por otro lado, en la integración multidocumento, una vez detectadas las características y entidades, el sistema debe agrupar y/o ordenar las diferentes frases que expresan sentimientos relacionados con dichas entidades o características. El resumen final puede presentarse en forma de gráfico o texto que muestre las principales características/entidades y cuantifique el sentimiento con respecto a cada una de ellas de alguna manera, por ejemplo, agregando intensidades de sentimientos o contando el número de frases positivas o negativas [19], [20].

4. Recuperación de opiniones. Intenta recuperar documentos que expresan una opinión sobre una consulta determinada. En este tipo de sistemas, se requieren dos puntajes para cada documento, el puntaje de relevancia frente a la consulta y el puntaje de opinión sobre la consulta, y ambos se utilizan generalmente para clasificar los documentos [21], [22].

5. Sarcasmo e ironía. Se centra en detectar afirmaciones con contenido irónico y sarcástico. Esta es una de las tareas más complicadas en este campo, especialmente debido a la falta de acuerdo entre los investigadores sobre cómo se puede definir formalmente la ironía o el sarcasmo [2], [23], [24]

6. Otros. Además de las actividades anteriormente mencionadas, existen otras tareas relacionadas con el Análisis de Sentimientos, como por ejemplo, la detección de género o autoría, que trata de determinar el género o la persona que ha escrito un texto/opinión [25], [26], la detección de spam de opinión, que trata de detectar opiniones o reseñas que contienen contenidos no confiables publicados para distorsionar la opinión pública hacia personas, empresas o productos [27]–[29], o la identificación de temáticas en función de los términos referidos a sentimientos [30].

III. Motivación

Son muchas las aplicaciones y páginas web que permiten al usuario expresar sus opiniones. Analizando detenidamente las distintas opiniones de forma general, se puede observar que los comportamientos de los usuarios pueden ser muy diversos, pudiendo establecerse distintos tipos de usuario dependiendo de las formas en las que emiten sus opiniones.

De igual manera, son muchas las formas en las que un usuario puede expresar su opinión. Por ejemplo, entre las más típicas podemos encontrar el uso de conjuntos de estrellas como puede verse en muchas páginas webs de venta de productos como Amazon[1] o Joom[2]:

Fig. 1. Puntuación mediante estrellas

o mediante una barra que permita establecer el grado de conformidad con respecto a un aspecto concreto:

Fig. 2. Barra de puntuación

entre otros posibles mecanismos. Como puede observarse, estos mecanismos permiten de una manera fácil, rápida e intuitiva expresar una opinión, sin embargo, carecen de cierta expresividad que si provee el lenguaje natural. Por ejemplo, las estrellas vistas anteriormente podrían ir acompañadas de distintas etiquetas lingüísticas {No satisfecho, Poco satisfecho, Medianamente satisfecho, Satisfecho, Muy satisfecho}, que pueden resultar más intuitivas e interpretables que las estrellas o su representación numérica: 1 estrella, 2 estrellas, 3 estrellas, etc.

Esto se puede ilustrar mediante el siguiente ejemplo (Figura 3) sacado de la página web TripAdvisor[3]:

Fig. 3. Opinión con puntuación poco precisa

Si se observan las puntuaciones, la estancia parece haber sido perfecta porque son máximas respecto a todos los aspectos posibles (valor, localización, habitaciones, limpieza, ….). Sin embargo, si se observan los comentarios esto no es así. El tamaño de la habitación era bueno pero no excelente. Lo mismo ocurre con la calidad del sueño, fue buena pero no excelente. Se podría pensar que este usuario utilizaría la etiqueta lingüística "bueno" como símbolo para representar la máxima calidad, sin embargo, si se lee la primera frase, la localización era "excelente", por lo que gradación de las puntuaciones podría llegar hasta ese extremo.

A. *Algunos posibles tipos de usuarios*

Ya hemos visto algún tipo de usuario como puede ser el usuario poco preciso de la imagen anterior, pero podemos ver más posibles usuarios. Por ejemplo, si miramos a la siguiente opinión que expresa de forma fehaciente que el hotel es fantástico:

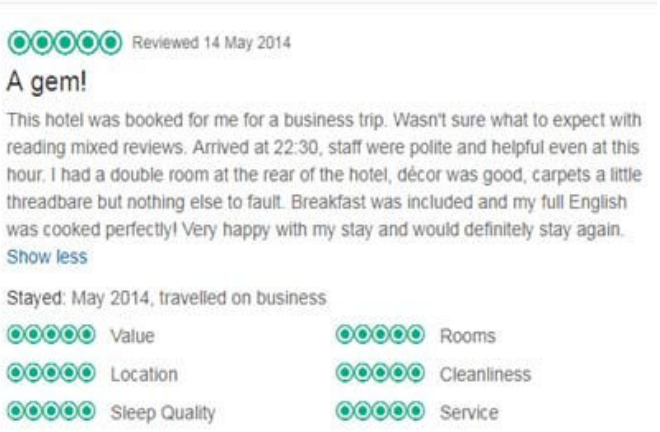


Fig. 4. Opinión excesivamente positiva

contrasta con la siguiente opinión emitida con una semana de diferencia, donde el usuario afirma que el mismo hotel es horrible:

[1] www.amazon.com
[2] www.joom.com
[3] www.tripadvisor.com

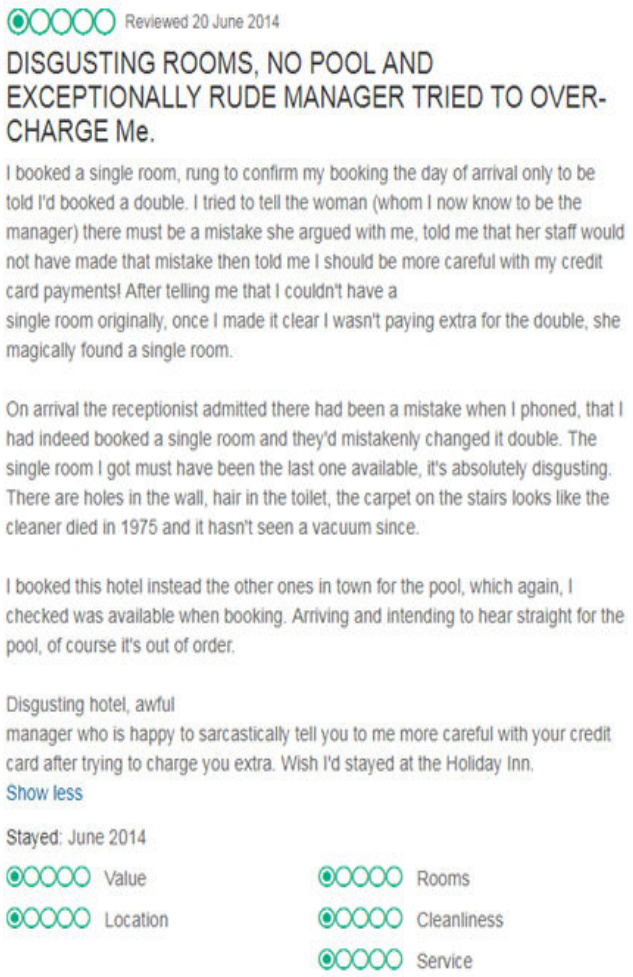


Fig. 5. Opinión excesivamente negativa

Leyendo detenidamente ambos comentarios, puede verse cómo se comparan cosas como el personal o las instalaciones con perspectivas absolutamente distintas. En este caso, podría pensarse que los usuarios pueden ser falsos, es decir, un usuario expresa su opinión simplemente para denigrar la calidad de un hotel, lo que podría conocerse como un "hater", o un usuario podría intentar mejorar la calidad de un hotel bien porque tiene algún interés escondido, en este caso sería un "lover". Igualmente, podría ser, simplemente, que el estado de ánimo con el que se emitieron las opiniones no permite expresar de forma excesivamente realista cuál fue la situación real del hotel, o sí.

IV. PROPUESTA

Como puede observarse, modelar el comportamiento de los usuarios puede ser complejo y hay distintos factores a tener en cuenta. Entre estos factores pueden destacarse:

- la importancia que tiene para cada usuario un aspecto determinado dentro del producto del que se está opinando.
- La opinión que tiene el usuario de cada uno de los aspectos que conforman un objeto.
- La opinión global de un producto o servicio vista como el resultado de la agregación de cada uno de los aspectos en función de la importancia.

A. *Opinión sobre un aspecto*

Así pues, matemáticamente un producto podría definirse como un conjunto A de N aspectos:

$$A = \{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_N\}$$

Sobre cada aspecto es posible emitir una opinión que puede ser representada mediante un conjunto de etiquetas lingüísticas $\{S_1, S_2, S_3 \ldots\}$. Estas etiquetas lingüísticas podrían ser definidas mediante número triangulares borrosos NTB, donde S_i se puede representar por el número $NTB_i = (a_i, b_i, c_i)$. La distribución de los parámetros puede dar lugar a un conjunto de etiquetas balanceado o no. Esto puede permitir tener más capacidad a la hora de filtrar a los usuarios y a los vendedores de los productos.

Véase el siguiente ejemplo. Si la valoración de las opiniones de cada aspecto fuera usando el siguiente conjunto balanceado de 5 etiquetas:

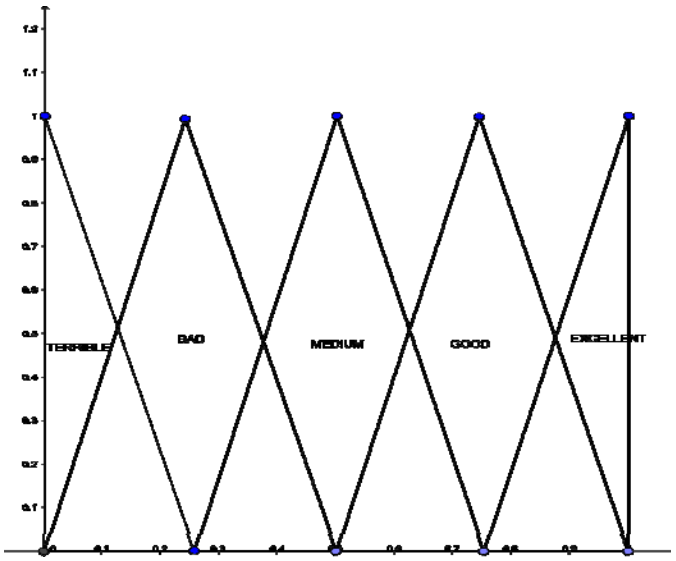


Fig. 6. Distribución de etiquetas balanceada

Podría corresponder intuitivamente con el sistema de estrellas visto en plataformas como Amazon (ver Figura 1), donde una opinión con una única estrella representa la peor valoración, es decir, el primer conjunto de la figura (TERRIBLE), y 5 estrellas representa la mejor valoración, en este caso el último conjunto (EXCELENTE).

Sin embargo, si se utilizara un conjunto de etiquetas como el visto en la siguiente figura, el usuario tendría un mayor poder discriminación, primero porque existen más etiquetas con las que valorar una opinión y segundo porque el soporte de las etiquetas que representan opiniones positivas es mucho menor, por lo que el usuario sería mucho más exigente a la

hora de decir si un producto es BUENO, MUY BUENO o EXCELENTE.

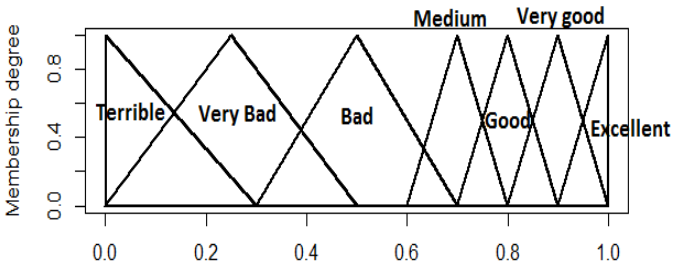


Fig. 7. Distribución de etiquetas no balanceada

B. *Importancia de cada aspecto*

Cada usuario puede considerar cada aspecto según su propio criterio. Suponer un teléfono móvil, ¿cuál es el aspecto más importante a la hora de comprarlo? Cada usuario pensará uno distinto, unos querrán que la cámara sea de alta definición para hacer fotos, a otros la cámara no les importará y preferirán que la batería le dure más tiempo, otros preferirán que tenga mucha memoria para almacenar muchos archivos, o la que conexión sea 5G, etc.

Por tanto, a la hora de emitir la opinión general sobre un producto, cada aspecto no tiene por qué pesar lo mismo. Así, es necesario modelar el peso de cada aspecto según el usuario.

Este peso puede ser calculado de muchas maneras, por ejemplo, a través de un valor numérico dentro de una escala [0,1]. Siguiendo con el ejemplo del teléfono se podría dar las siguientes importancias a estos posibles aspectos:

- Batería: 0.5
- Pantalla: 0.2
- Conectividad 5G: 0.1
- Cámara: 0.2

En este caso, como puede verse, todos los pesos suman 1, y el más importante sería en este caso el aspecto de la batería, mientras que la conectividad 5G no parece ser nada relevante para este usuario.

Siguiendo una aproximación más intuitiva, la importancia podría ser una variable representada mediante un conjunto de etiquetas $\{S_1, S_2, S_3\ldots\}$, las cuales nuevamente podrían ser definidas mediante número triangulares borrosos NTB, donde S_i se puede representar por el número $NTB_i = (a_i, b_i, c_i)$. La distribución puede ser igual balanceada o no, y como ejemplo podría darse el siguiente conjunto, en el cual el usuario podría seleccionar si un aspecto para él es irrelevante, simplemente importante o de vital importancia:

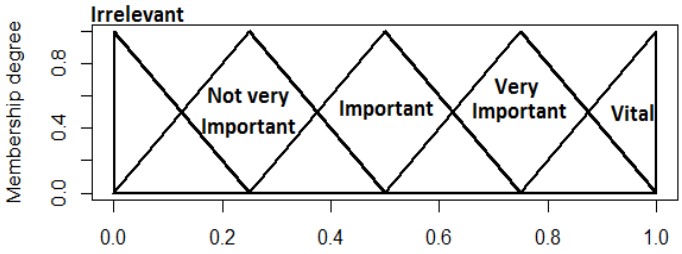


Fig. 8. Ejemplo de etiquetas para medir la importancia de un aspecto

Dependiendo de la forma en la que se mida la importancia, determinará cómo se calcula la opinión general que puede tener un usuario respecto a un producto.

C. *Opinión general: Agregación de aspectos*

Una vez que el usuario ha determinado cuál es la importancia de cada aspecto, y ha opinado sobre cada uno de ellos, es necesario agregar todas las opiniones individuales pero, teniendo en cuenta cuál es más importante que la otra.

Para ello, se puede proponer el uso de los operadores OWA [31]. Dependiendo de cómo se hayan obtenidos los distintos pesos y las valoraciones de cada aspecto, se podrán utilizar distintas familias de operadores OWA.

En el caso, por ejemplo, de medir a través de la calificación mediante estrellas (ver Figura 1) y que los pesos sean introducidos como valores en el rango [0,1] sumando en su conjunto 1, al ser todos los valores de naturaleza crisp, se podría utilizar un operador OWA clásico. Sin embargo, en el caso de que se utilizaran conjuntos borrosos para obtener los parámetros necesarios, serían necesarios acceder a familias como los OWA de Tipo-1 [32].

V. APLICACIONES

A través de la propuesta anterior, es posible modelar de una forma más fehaciente, cuál puede ser la opinión general de un usuario cuando valora un producto. Entre las aplicaciones que podría encontrarse a esta propuesta podrían mencionarse:

- Detección y clasificación de usuarios: Poder clasificar a los usuarios según sus opiniones puede resultar interesante desde distintos puntos vista. Por ejemplo, un usuario que siempre puntúa positivamente los productos de una marca y negativamente los de la competencia, no tiene por qué implicar que sus opiniones no sean válidas, simplemente es su forma de pensar. Así, un sistema de recomendaciones tendría más información para saber qué productos recomendarle y cuáles no.
- Asignación del grado de confianza de un usuario: Como consecuencia de lo anterior, las opiniones de todos los usuarios no parecen ser igualmente fiables, por lo que la descripción de cada usuario a través de un grado de confiabilidad podría permitir descartar las opiniones de ciertos usuarios. Este proceso hoy es imposible en webs como Amazon o Trivago.

VI. Conclusiones

En este artículo se pone de manifiesto la necesidad de representar las opiniones de los usuarios de forma distinta a la utilizada por muchas plataformas web debido a su falta de expresividad en muchas ocasiones. El uso de aproximaciones borrosas puede ayudar a paliar estos defectos como se ha comentado a lo largo del artículo.

Siguiendo el modelo propuesto, sería más fácil descartar opiniones que pueden no tener valor para un usuario, bien porque en sí pudieran ser contradictorias o de poco valor, o porque estuvieran emitidas por usuarios con el propósito de influir en otros usuarios de forma malintencionada.

Agradecimientos

Este artículo ha sido financiado por FEDER y la Agencia Española de Investigaciones del Ministerio de Economía y Competitividad bajo el proyecto TIN2016-76843-C4-2-R (AEI/FEDER, UE).

Bibliografía

[1] E. Cambria, B. Schuller, Y. Xia, and C. Havasi, "New Avenues in Opinion Mining and Sentiment Analysis," IEEE Intell. Syst., vol. 28, no. 2, pp. 15–21, 2013.

[2] A. Reyes, P. Rosso, and D. Buscaldi, "From humor recognition to irony detection: The figurative language of social media," Data Knowl. Eng., vol. 74, pp. 1–12, 2012.

[3] C. Zhang, D. Zeng, J. Li, F.-Y. Wang, and W. Zuo, "Sentiment analysis of Chinese documents: From sentence to document level," J. Am. Soc. Inf. Sci. Technol., vol. 60, no. 12, pp. 2474–2487, 2009.

[4] R. Moraes, F. Valiati, J, and W. P. Gavião Neto, "Document-level sentiment classification: An empirical comparison between SVM and ANN," Expert Syst. Appl., vol. 40, no. 2, pp. 621–633, 2013.

[5] A. Duric and F. Song, "Feature selection for sentiment analysis based on content and syntax models," Decis. Support Syst., vol. 53, no. 4, pp. 704–711, 2012.

[6] Y. He and D. Zhou, "Self-training from labeled features for sentiment analysis," Inf. Process. Manag., vol. 47, no. 4, pp. 606–616, Jul. 2011.

[7] T. Wilson, J. Wiebe, and P. Hoffmann, "Recognizing contextual polarity in phrase-level sentiment analysis," in Proceedings of the conference on Human Language Technology and Empirical Methods in Natural Language Processing (HLT '05), 2005, pp. 347–354.

[8] T. Wilson, J. Wiebe, and P. Hoffmann, "Recognizing Contextual Polarity: An Exploration of Features for Phrase-Level Sentiment Analysis," Comput. Linguist., vol. 35, no. 3, pp. 399–433, 2009.

[9] A. Agarwal, F. Biadsy, and K. R. McKeown, "Contextual phrase-level polarity analysis using lexical affect scoring and syntactic N-grams," in Proceedings of the 12th Conference of the European Chapter of the Association for Computational Linguistics (EACL '09), 2009, pp. 24–32.

[10] R. Remus and C. Hänig, "Towards well-grounded phrase-level polarity analysis," in Proceedings of the 12th international conference on Computational linguistics and intelligent text processing (CICLing'11), 2011, pp. 380–392.

[11] L.-C.- Yu, J.-L. Wu, P.-C. Chang, and H.-S. Chu, "Using a contextual entropy model to expand emotion words and their intensity for the sentiment classification of stock market news," Knowledge-Based Syst., vol. 41, pp. 89–97, 2013.

[12] Y. He, C. Lin, and H. Alani, "Automatically extracting polarity-bearing topics for cross-domain sentiment classification," in Proceedings of the 49th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics: Human Language Technologies (HLT '11), 2011, pp. 123–131.

[13] M. Dragoni and G. Petrucci, "A fuzzy-based strategy for multi-domain sentiment analysis," Int. J. Approx. Reason., vol. 93, pp. 59–73, 2018.

[14] S. Raaijmakers and W. Kraaij, "A Shallow Approach to Subjectivity Classification," in Proceedings of the Second International Conference on Weblogs and Social Media (ICWSM '08), 2008, pp. 216–217.

[15] K. Sarvabhotla, P. Pingali, and V. Varma, "Sentiment classification: a lexical similarity based approach for extracting subjectivity in documents," Inf. Retr. Boston., vol. 14, no. 3, pp. 337–353, 2011.

[16] A. Montoyo, P. Martínez-Barco, and A. Balahur, "Subjectivity and sentiment analysis: An overview of the current state of the area and envisaged developments," Decis. Support Syst., vol. 53, no. 4, pp. 675–679, 2012.

[17] I. Maks and P. Vossen, "A lexicon model for deep sentiment analysis and opinion mining applications," Decis. Support Syst., vol. 53, no. 4, pp. 680–688, 2012.

[18] D. Wang, S. Zhu, and T. Li, "SumView: A Web-based engine for summarizing product reviews and customer opinions," Expert Syst. Appl., vol. 40, no. 1, pp. 27–33, 2013.

[19] K.-M. Park, H. Park, H.-G. Kim, and H. Ko, "Review summarization based on linguistic knowledge," in Proceedings of the 17th international conference on Database Systems for Advanced Applications (DASFAA'12), 2012, vol. 7240, pp. 105–114.

[20] K. Ganesan, C. Zhai, and E. Viegas, "Micropinion generation: An Unsupervised Approach to Generating Ultra-Concise Summaries of Opinions," in Proceedings of the 21st international conference on World Wide Web - WWW '12, 2012, pp. 869–878.

[21] S.-W. Lee, Y.-I. Song, J.-T. Lee, K.-S. Han, and H.-C. Rim, "A new generative opinion retrieval model integrating multiple ranking factors," J. Intell. Inf. Syst., vol. 38, no. 2, pp. 487–505, May 2011.

[22] L. Guo and X. Wan, "Exploiting syntactic and semantic relationships between terms for opinion retrieval," J. Am. Soc. Inf. Sci. Technol., vol. 63, no. 11, pp. 2269–2282, 2012.

[23] E. Filatova, "Irony and Sarcasm: Corpus Generation and Analysis Using Crowdsourcing," in Proceedings of the Eighth International Conference on Language Resources and Evaluation (LREC-2012), 2012, pp. 392–398.

[24] A. Reyes and P. Rosso, "Making objective decisions from subjective data: Detecting irony in customer reviews," Decis. Support Syst., vol. 53, no. 4, pp. 754–760, 2012.

[25] J. Savoy, "Authorship Attribution Based on Specific Vocabulary," ACM Trans. Inf. Syst., vol. 30, no. 2, pp. 1–30, 2012.

[26] M. Montesi and T. Navarrete, "Classifying web genres in context: A case study documenting the web genres used by a software engineer," Inf. Process. Manag., vol. 44, no. 4, pp. 1410–1430, 2008.

[27] A. Mukherjee, B. Liu, and N. Glance, "Spotting fake reviewer groups in consumer reviews," in Proceedings of the 21st international conference on World Wide Web (WWW '12), 2012, pp. 191–200.

[28] S. Xie, G. Wang, S. Lin, and P. S. Yu, "Review spam detection via temporal pattern discovery," in Proceedings of the 18th ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining, 2012, pp. 823–831.

[29] G. Wang, S. Xie, B. Liu, and P. S. Yu, "Identify Online Store Review Spammers via Social Review Graph," ACM Trans. Intell. Syst. Technol., vol. 3, no. 4, pp. 1–21, 2012.

[30] K. Gutiérrez-Batista, J. R. Campaña, M.-A. Vila, and M. J. Martin-Bautista, "Fuzzy Analysis of Sentiment Terms for Topic Detection Process in Social Networks," in International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems, 2018, pp. 3–14.

[31] R. R. Yager, "Families of OWA operators," Fuzzy Sets Syst., vol. 59, no. 2, pp. 125–148, 1993.

[32] S.-M. Zhou, F. Chiclana, R. I. John, and J. M. Garibaldi, "Type-1 OWA operators for aggregating uncertain information with uncertain weights induced by type-2 linguistic quantifiers," Fuzzy Sets Syst., vol. 159, no. 24, pp. 3281–3296, Dec. 2008.

Engine health monitoring with fuzzy data: lessons learned from aircraft industry

Luciano Sánchez
Universidad de Oviedo
Departamento de Informática
Gijón, Asturias, Spain
luciano@uniovi.es

Inés Couso
Universidad de Oviedo
Departamento de Estadística
Gijón, Asturias, Spain
couso@uniovi.es

***Abstract*—The use of data-driven techniques for health monitoring and prognosis of engines is often plagued by the lack of information about failure scenarios. This problem is aggravated when there are missing or partially missing records in the log data. Unluckily, the chance that a sequence of events leading to a failure is not properly stored is higher when the system exhibits an abnormal behaviour. In absence of patterns that can be related to deterioration, failure detection is often guided to find novelties in the records, or uncommon combinations of variables that may indicate an anomalous performance. Finding novelties in sequences of low quality data is a complex problem where numerous ambiguities must be resolved. Aircraft industry is a paradigmatic case in that it involves monitoring and prognosis with less than perfect data, partly because many different control and security subsystems prevent that failure conditions are actually reached. The use of fuzzy technologies for modelling and diagnosing aero-engines is discussed in this paper, along with the most challenging issues and future research lines, according to our own experience in this field.**

***Index Terms*—Fuzzy data, Engine health monitoring, Fault diagnosis, Fuzzy model**

I. Introduction

The main purpose of engine data is to monitor engine parameters in order to avoid running the engine under undesired conditions. Engine instrumentation is configured to trigger alerts related to operator action, maintainance action or, if a significant condition is found, shutting down the engine.

The development over time of the engine data is also monitored in a process that is called Engine Health Monitoring (EHM). EHM management systems have diagnostic and prognostic purposes, as not only individual working conditions but also the trend over time are examined in order to identify rapid levels of deterioration. EHM management systems estimate the Remaining Useful Life (RUL) of an engine, anticipating certain events or findings and therefore reducing the number and degree of engine refurbishments [1]. In the simplest case, EHM management systems compare engine data against those parameters identified to be characteristic of known engine conditions or against design limits [2]. However, predicting the engine parameter deterioration levels over time is complex. There are multiple methods of EHM data assessment developed, whose range of application depends on the type of engine and the amount and quality of the engine data.

This study concerns the application of fuzzy technologies for EHM in aircrafts, where multi-sensor information is used to report failures and predict the RUL of commercial turbofan engines. Aircraft industry has specific requirements for EHM systems, derived from the fact that gas turbines are inherently fail-safe and the reliability of the turbine may be higher than that of its sensors [3]. Sensor degradation cannot be tolerated because deviations in sensor readings can be mistaken for engine degradations and this can cause secondary failures because of wrong control decisions [4]. Hence, aircraft engines tend to be under-sensorized and a substantial uncertainty in the knowledge of the operating point of the engine is accepted. Uncertainty in EHM data is accounted for via mathematical models, statistical or intelligent techniques, and in many cases with the help of fuzzy technologies, which will be reviewed in the forthcoming sections.

The structure of this paper is as follows: Section II reviews the use of fuzzy technologies in aircraft EHM, discusses the strengths are weakness of these techniques, and states some open problems. A new family of fuzzy diagnostic tools is proposed in Section III. An explanatory application of the new tools is developed in Section IV. The conclusions of the paper are presented in Section V.

II. Review of the use of fuzzy technologies in aeroengine health monitoring

Most of the aircraft EHM assessment methods are based around Gas Path Analysis (GPA) [2]. The gas path components are all air-washed parts within the engine gas path: the compressors, the combustor and the turbines. The gas path components are susceptible to distinct different issues, such as worn seals, excessive tip clearances, burning, cracking or missing parts or sections of parts, etc. Changes in the internal working conditions of the engine are detected either by direct observation of EHM parameters or indirectly, through a suitable transform of the EHM data.

This work was supported by the Science and Innovation Spanish Ministry under Projects TIN2014-56967-R and TIN2017-84804-R

A. Direct methods: detection of novelties with pattern recognition

The most common GPA methodology consists in detecting changes or *novelties* [5] in the internal working conditions of the engine as early as possible, by finding specific combination of values or *signatures* of the different defects. Fuzzy expert systems have been used to identify engine trends and step changes [6]. These algorithms rely on an experience database comprising GPA variables sampled at engines with known faults. Recent approaches learn fuzzy models from clean engine data and deteriorations are detected as novelties in the EHM data or in the residuals between the measurements and the model predictions [7], [8].

The diagnosis of an engine is formulated as a supervised pattern recognition problem, often via a case-based reasoning algorithm in which the measurements are compared to the known signatures of defects that have been observed in the past [9]. Thus, pattern recognition techniques are only efficient if the experience database is complete; otherwise, unseen defects will remain undetected. This is a requirement hard to fulfil, as most of times the Full Authority Digital Engine Control (FADEC) and other safety mechanisms will prevent that the engine reaches these abnormal conditions. Also, there are faults that do not have a well defined signature: for instance, a higher than normal turbine temperature may have different causes, such as an incipient deterioration or a higher load of the engine. Pattern recognition cannot tell apart these root causes if temperature, fuel flow, pressures and thurst are treated in isolation.

B. Subspace methods and manifold learning

Since most of the deteriorations alter more than one GPA variable, some authors consider that each of these variables must be regarded as a mix of different factors [10]. In this respect, subspace methods project EHM variables into a low-dimensional factor space and the signatures of the defects are sought in this projection [11], [12]. In other cases, a non-linear transformation is used; for instance, neural-network based autoencoders condense the EHM information into a reduced number of variables [13]. Recently, other manifold learning techniques have been extended to uncertain data and applied to this problem. In [14], Blind Source Separation (BSS) for interval-valued data data has been applied to the EHM problem thus the independence among the factor is maximized. This last reference addresses the presence of epistemic uncertainty in the data. In any case, note that although the dimensionality reduction simplifies the aforementioned pattern recognition problem, the need for an experience database is still present.

C. Multivariate trend analysis of delta signals

One of the major sources of uncertainty in EHM is related to the scarcity of sensors. Measurements are taken under different flying conditions. Hence, certain changes in the monitored variables may be caused by either a deterioration in the engine or a change in the flight conditions. Furthermore, there is a wide variability between GPA related magnitudes for different engines, as the monitored variables of two engines flying in the same conditions might not be concordant from flight to flight. Following [15], this second variability is solved if defects are not sought in GPA variables but in the gradient of the so-called "delta" functions, which are the differences between GPA variables and the theoretical values of a single reference engine. The gradient of these delta functions are used, because useful information about the deterioration speed is conveyed by the slopes of these curves. However, since GPA variables combine measurements taken in different flying conditions, delta signals are very noisy. This poses a complex computational problem, as determining the gradient of a noisy signal is strongly dependent on the properties of the noise filter. A fuzzy-bandwidth filter was used to compute these slopes in [16], where a fuzzy rule-based classifier was subsequently used to monitor the engine on the basis of the multivariate gradient signal, and also in [17] fuzzy estimations of the RULs of compressor and turbine were produced for prognosis purposes. These methods still make use of a sample of engines with a known condition, that is used for learning classifier and RUL models. In contrast, the experience database with the signatures of the known defects are not needed anymore, as the monitoring and prognosis decisions are taken by data-driven fuzzy rule-based systems.

D. Sequence mining

Multivariate trend analysis transforms variable-length series of gradients into fixed-length feature vectors that are the inputs to a fuzzy classifier or model. This feature selection process discards the sequence order of the deteriorations. For example, suppose that two different motors #1 and #2 have bad compressors and turbines: the compressor of #1 failed first and its turbine was subsequently damaged because of the compressor bad state. In contrast, the turbine in #2 failed first and its compressor was damaged later. It may happen that their feature vectors in trend analysis are identical. In reference [18] the fixed-length transform is avoided, and specific sequential pattern mining-based classifiers (that can operate with variable-length fuzzy inputs) were leveraged. Sequence mining discovers conditions that are not to be found with multivariate trend analysis. In any case, other drawbacks exist: a sample of engines with known conditions is needed (although in this case the decision system does not require an experience database). Furthermore, frequent pattern matching techniques are used for identifying the signatures of the deffects. Hence, isolated deteriorations will not be found.

Summarizing, the conclusions of this review in fuzzy EHM for aircrafts are:

- Direct methods operate with experience databases comprising GPA values of engines with known deteriorations. These methods are sensible to uncertainties originated in the variability from engine to engine, the changing flight conditions and the lack of sensors.
- Fuzzy subspace methods alleviate the uncertainty caused by the lack of sensors, as different imprecise signals are

combined to extract independent factors. The experience database is still needed.
- Multivariate trend analysis relax the requisite of an experience database to a list of engines with known RULs, thus not-yet-seen defects can be discovered. These methods cannot detect the precise time when a defect appeared.
- Sequence mining cannot find defects with a low occurrence, because the signatures are obtained via fuzzy frequent pattern matching.

III. Isotonic fuzzy health models

Diagnosis and prognosis methodologies either depend on an experience database, a sample of engines with known RULs or a model of the engine whose residual can be monitored. The main advantage of model-dependent assessments lies in the possibility of finding defects not seen before, but being dependent on an engine model is a stringent requisite. In this section a new isotonic fuzzy health model of an aeroengine is proposed, whose residual can be related to the location of the deteriorations. This method is novel because it makes use of *the lowest possible amount of domain knowledge*, which is (i) certain variables in the engine are comonotonic, and (ii) the state of health of the engine decreases with time.

The input variables of the proposed model are the same "delta" variables introduced in Section II-C. In the particular case of the aeroengines concerned by this study (see Figure 1), these variables are called ΔP30, ΔT30, ΔTGT, ΔFF and ΔN2. The list of points of interest in the engine are:

- Station 3: This is the High Pressure Compressor (HPC) exit and the entry into the combustion system. The conditions at this point are key for the correct functioning of the engine. The main variables measured at this station are P30 (pressure) and T30 (temperature).
- Station 4: This is the combustion chamber exit and High Pressure Turbine (HPT) entry. The temperature at this point is one of the main engine parameters. T4, may also be known as Turbine Gas Temperature (TGT)
- Station 5: This is the Low Pressure Turbine (LPT) exit. The main variable at this station is P50. This pressure is used to define EPR, which is subsequently used to determine the overall engine thrust. EPR is the relation of P50 to P20.

The Low Pressure (LP) system is the combination of the fan and the LPT. The speed at which the LP system turns is defined as N1. The High Pressure (HP) system is the combination of the HPC and the HPT. The speed at which the HP system turns is known as N2. In addition, the amount of fuel consumed is also monitored through Fuel Flow (FF).

EPR is the relation of P50 (pressure at the Low Pressure Turbine exit) to P20 (pressure at the fan inlet). In two shaft high bypass ratio turbo fans, the thrust is performed by the air compressed by the fan blades and pushed through the engine bypass. The air pushed through the core of the engine is solely used to turn the fan. This is, the air is compressed by the high pressure compressor (HPC) so that the optimum conditions are reached within the combustion chamber to subsequently turn the high pressure turbine (HPT) to maintain the high pressure (HP) system and subsequently turn the low pressure turbine (LPT) which moves the fan and produces the engine thrust.

A. Proposed isotonic fuzzy model

Let the thrust of the considered engine be described by the following function:

$$\mathrm{epr}(\Delta\mathrm{P30}, \Delta\mathrm{T30}, \Delta\mathrm{TGT}, \Delta\mathrm{FF}, \Delta\mathrm{N2}, \mathbf{fc}) \tag{1}$$

where $\mathbf{fc} \in \mathrm{FC}$ is a vector defining the flight conditions, ΔP30 is the difference between the gas pressure at the entry of the HPC and that of the reference engine, etc. Note that the thrust of the reference motor is $\mathrm{epr}_0(0,0,0,0,0,\mathbf{fc})$. For engines that are in a good condition,

- $\mathrm{epr}(\cdot)$ is comonotonical with ΔP30, ΔFF, ΔTGT, ΔN2 (the higher the compressor pressure, the consumed fuel, the turbine temperature and the turbine speed, then the higher the thrust is)
- $\mathrm{epr}(\cdot)$ is antimonotonical with ΔT30 (the higher the compressor temperature, the less dense the air is, hence the thrust is lower)

Thus, the following fuzzy-valued model is proposed:

$$\mu_{\widetilde{\mathrm{EPR}}}(\Delta\mathrm{P30}, \Delta\mathrm{T30}, \Delta\mathrm{TGT}, \Delta\mathrm{FF}, \Delta\mathrm{N2})(e) = \sup_{\alpha}\{e \in [\overline{\mathrm{EPR}}]_\alpha(\Delta\mathrm{P30}, \Delta\mathrm{T30}, \Delta\mathrm{TGT}, \Delta\mathrm{FF}, \Delta\mathrm{N2})\} \tag{2}$$

where the set $[\overline{\mathrm{EPR}}]_\alpha$ is a confidence interval of the thrusts of the engine,

$$[\overline{\mathrm{EPR}}]_\alpha = \{\mathrm{epr}_i(\Delta\mathrm{P30}, \Delta\mathrm{T30}, \Delta\mathrm{TGT}, \Delta\mathrm{FF}, \Delta\mathrm{N2}, \mathbf{fc}) : \mathbf{fc} \in \mathrm{FC}_\alpha\} \tag{3}$$

and FC_α is the smallest subset of FC such that $\mathrm{P}(\mathbf{fc} \in \mathrm{FC}) \geq 1-\alpha$ and $\mathrm{FC}_\alpha \subseteq \mathrm{FC}_\beta$ for $\alpha > \beta$. Lastly, let the parametric definition of $\mathrm{epr}(\cdot)$ be

$$\mathrm{epr}(\Delta\mathrm{P30}, \Delta\mathrm{T30}, \Delta\mathrm{TGT}, \Delta\mathrm{FF}, \Delta\mathrm{N2}, \mathbf{fc}) = f(\kappa_1 \cdot \Delta\mathrm{P30} - \kappa_2 \cdot \Delta\mathrm{T30} + \kappa_3 \cdot \Delta\mathrm{TGT} + \kappa_4 \cdot \Delta\mathrm{FF} + \kappa_5 \cdot \Delta\mathrm{N2}) + g(\mathbf{fc}) \tag{4}$$

and

$$[\overline{\mathrm{EPR}}]_\alpha(\Delta\mathrm{P30}, \Delta\mathrm{T30}, \Delta\mathrm{TGT}, \Delta\mathrm{FF}, \Delta\mathrm{N2}) = f(\kappa_1 \cdot \Delta\mathrm{P30} - \kappa_2 \cdot \Delta\mathrm{T30} + \kappa_3 \cdot \Delta\mathrm{TGT} + \kappa_4 \cdot \Delta\mathrm{FF} + \kappa_5 \cdot \Delta\mathrm{N2}) + [\gamma - \mu(1-\alpha), \gamma + \mu(1-\alpha)] \tag{5}$$

with $\kappa_i \geq 0$, $g(\mathbf{fc}) >= 0$ for all $\mathbf{fc} \in \mathrm{FC}$ and $f(x) \geq f(y)$ for $x > y$.

It can be safely assumed that engines are without deffects in the first cycles after a shop visit, and $\kappa_1, \ldots, \kappa_5$ and γ, μ can be found by maximizing the interval-valued extension of Kendall's tau [19] between $[\overline{\mathrm{EPR}}]_\alpha$ and the actual thrust values

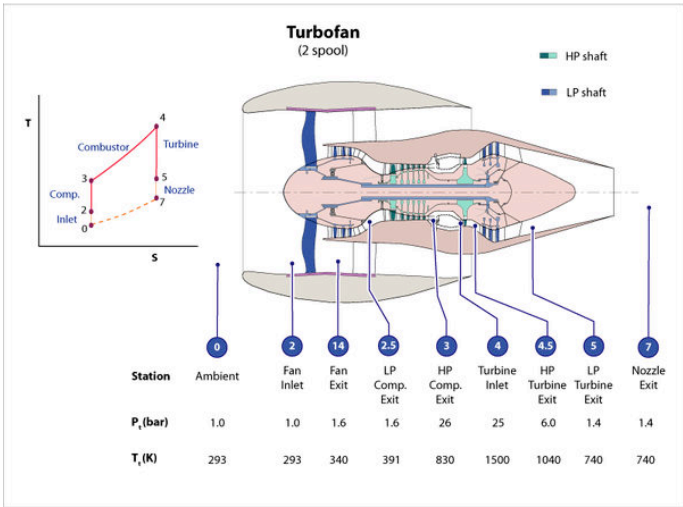


Fig. 1. Outline of a two shaft high bypass ratio turbo fan

EPR^t of the engine at the first $t = 1 \dots N$ cycles, constrained by $\kappa_i \geq 0$, $\gamma > 0$, $\mu > 0$ and

$$\#\{\text{EPR}^t \in [\overline{\text{EPR}}]_\alpha(\Delta\text{P30}^t, \Delta\text{T30}^t, \Delta\text{TGT}^t, \Delta\text{FF}^t, \Delta\text{N2}^t)\} \geq (1-\alpha)\cdot N \quad (6)$$

The expression of the function f is obtained by interpolating the pairs $(\kappa_1 \cdot \Delta\text{P30}^t - \kappa_2 \cdot \Delta\text{T30}^t + \kappa_3 \cdot \Delta\text{TGT}^t + \kappa_4 \cdot \Delta\text{FF}^t + \kappa_5 \cdot \Delta\text{N2}^t + \gamma, \text{EPR}^t)$ with a Piecewise Cubic Hermite Interpolating Polynomial (PCHIP).

Lastly, once the membership function of the fuzzy model is known,

$$\mu_{\widetilde{\text{EPR}^t}}(e) = \mu_{\widetilde{\text{EPR}}}(\Delta\text{P30}^t, \Delta\text{T30}^t, \Delta\text{TGT}^t, \Delta\text{FF}^t, \Delta\text{N2}^t)(e) \quad (7)$$

the residuals of this model can be regarded as a health indicator, as will be shown in an illustrative example in the next Section:

$$\mu_{\widetilde{\text{HEALTH}^t}}(e) = \mu_{\widetilde{\text{EPR}^t}}(e - \text{EPR}^t). \quad (8)$$

In words, the residuals of the proposed model will be centered at zero if the engine is not deteriored, but as soon as a degradation happens (decrease of ΔP30, alone or in combination of an increase of ΔT30, ΔTGT, etc.) the predicted thrust will be lower than that of the non-degraded engine, because of the signs of the coefficients and the monotonicity of the function f. Given that the health of an engine cannot be increased unless it undergones maintainance, isotonic regression techniques are also used to estimate the centerpoints of the aforementioned residuals.

IV. Illustrative example

The new method has been validated on a sample of 330 turbofan engines. A representative case has been chosen that illustrates the properties of this method.

Figure 2 depicts the GPA delta variables of an engine with a light deterioration in the HPT that cannot be found with direct methods, manifold learning, trend analysis neither sequence mining. A sixth variable DN2VIB has been added to the graph; this variable is not being used by the model but serves for validation purposes.

The isotonic fuzzy model has been fitted to the first $N = 1000$ cycles. The whole data spans more than 4000 cycles. Each GPA value is colored according to the EPR (between 1.20 and 1.50). The synthetic HEALTH signal is obtained by fitting a line with isotonic regression to the centerpoints of the residual of the fuzzy model proposed in the preceding section. Observe that the health tends to increase in the first half of the monitored period, but the isotonic regression forces that the signal is monotonically decreasing. Hence, the HEALTH signal is constant in the initial cycles. In the second part of the diagnostic, the residual is decreased and a deterioration in the second half of the figure becomes evident. This signal has been built without supplying the model any kind of information about the signature of a degradation in a similar engine: the only domain knowledge is the monotonicity or antimonotonicity of the GPA delta signals and the thrust. As an additional validation of the method, note that the signal DN2VIB measures the vibrations in the high speed shaft. This information has not been used by the isotonic model, that was nonetheless able to detect a deterioration immediately before the vibrations were measurable.

V. Concluding remarks and future work

Most of times, fault detection are regarded as pattern recognition methods, that can be solved with data-driven techniques with a different amount of domain knowledge. If a large database of engines with different degrees of deterioration is available, direct and subspace methods are the most common fuzzy techniques, however these cannot detect defects that are not in the experience database.

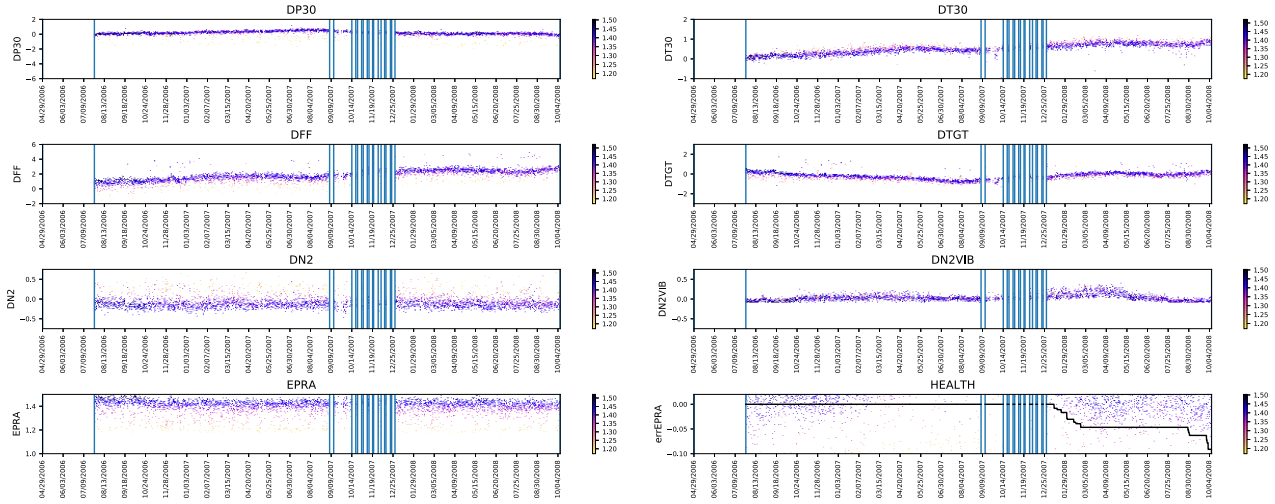


Fig. 2. Example of the application of the isotonic fuzzy model to an actual aeroengine. From left to right, top to bottom: Deltas of P30, T30, FF, TGT, N2, N2VIB (vibrations of the engine, not contemplated in this model) and synthetic HEALTH signal formed by the centerpoints of the isotonic fuzzy model. Observe that the model detects a deterioration of the engine in the last cycles, and this prediction is consistent with the independently measured vibration N2VIB.

The use of delta variables with respect to a reference engine allows applying machine learning algorithms to learn an EHM management system from data, where fuzzy technologies are used for designing the noise filters. The main drawbacks of these methods are the impossibility of detecting the order of the events and the precise cycle when the deterioration initiates. The use of sequence mining solves the first issue, and the isotonic algorithm introduced in this study solves the second problem. Besides its simplicity, the use of a model with a minimal amount of domain knowledge reduces the systematic error of specific models, and at the same time its generalization capabilities improve that of black boxes.

This is a work in progress; there are some aspects of the application of isotonic learning to EHM monitoring that are still unsolved. In particular, it is not yet clear how to attribute the descent in the thrust to the turbine or the compressor. Once this issue is solved, the next step in this research will be to assess the dependence between the RUL of the engine and the jumps in the health signal.

References

[1] Y. Li, "Gas turbine performance and health status estimation using adaptive gas path analysis," *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, vol. 132, no. 4, p. 041701, 2010.

[2] L. A. Urban, "Gas Path Analysis Applied to Turbine Engine Condition Monitoring," *Journal of Aircraft*, vol. 10, no. 7, 2012.

[3] A. R. Behbahani, "Need for robust sensors for inherently fail-safe gas turbine," in *52nd International Instrumentation Symposium: Engine Controls, Monitoring, and Prognostics. Cleveland, OH*, 2006.

[4] ATSB, "Australian transport safety bureau: Power plant failures in turboprop-powered aircraft 2012 to 2016," https://www.atsb.gov.au/publications/2017/ar-2017-017/, accessed: 2018-06-06.

[5] M. A. Pimentel, D. A. Clifton, L. Clifton, and L. Tarassenko, "A review of novelty detection," *Signal Processing*, vol. 99, pp. 215–249, 2014.

[6] S. Demirci, C. Hajiyev, and A. Schwenke, "Fuzzy logic-based automated engine health monitoring for commercial aircraft," *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, vol. 80, no. 5, pp. 516–525, 2008.

[7] A. Benyounes, A. Hafaifa, A. Kouzou, and M. Guemana, "Gas turbine modeling using adaptive fuzzy neural network approach based on measured data classification," *Mathematics-in-Industry Case Studies*, vol. 7, no. 4, 2017.

[8] Z. Li, S.-S. Zhong, and L. Lin, "Novel gas turbine fault diagnosis method based on performance deviation model," *Journal of Propulsion and Power*, pp. 1–10, 2016.

[9] C. H. Fontes and O. Pereira, "Pattern recognition in multivariate time series–a case study applied to fault detection in a gas turbine," *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, vol. 49, pp. 10–18, 2016.

[10] Z. Chen, H. Fang, and Y. Chang, "Weighted data-driven fault detection and isolation: A subspace-based approach and algorithms," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 63, no. 5, pp. 3290–3298, 2016.

[11] R. Baklouti, M. Mansouri, M. Nounou, H. Nounou, and A. B. Hamida, "Iterated robust kernel fuzzy principal component analysis and application to fault detection," *Journal of Computational Science*, vol. 15, pp. 34–49, 2016.

[12] I. Gueddi, O. Nasri, K. Benothman, and P. Dague, "Fault detection and isolation of spacecraft thrusters using an extended principal component analysis to interval data," *International Journal of Control, Automation and Systems*, vol. 15, no. 2, pp. 776–789, 2017.

[13] W. Yan and L. Yu, "On accurate and reliable anomaly detection for gas turbine combustors: A deep learning approach," in *Proceedings of the Annual Conference of the Prognostics and Health Management Society*, 2015.

[14] A. Martinez, L. Sanchez, and I. Couso, "Interval-valued blind source separation applied to ai-based prognostic fault detection of aircraft engines." *Journal of Multiple-Valued Logic & Soft Computing*, vol. 22, 2014.

[15] A. Volponi and B. Wood, "Engine health management for aircraft propulsion systems," in *Proceedings of the Forum on Integrated System Health Engineering and Management (ISHEM) in Aerospace, Napa, CA, November*, 2005, pp. 7–10.

[16] A. Martínez, L. Sánchez, and I. Couso, "Engine health monitoring for engine fleets using fuzzy radviz," in *Fuzzy Systems (FUZZ), 2013 IEEE International Conference on*. IEEE, 2013, pp. 1–8.

[17] A. Martinez, L. Sánchez, and I. Couso, "Aeroengine prognosis through genetic distal learning applied to uncertain engine health monitoring data," in *Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE), 2014 IEEE International Conference on*. IEEE, 2014, pp. 1945–1952.

[18] A. Palacios, A. Martínez, L. Sánchez, and I. Couso, "Sequential pattern mining applied to aeroengine condition monitoring with uncertain health data," *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, vol. 44, pp. 10–24, 2015.

[19] O. Hryniewicz and K. Opara, "Efficient calculation of kendall's tau for interval data," in *Synergies of Soft Computing and Statistics for Intelligent Data Analysis*. Springer, 2013, pp. 203–210.

Análisis de distintas propuestas de sistemas de recomendaciones lingüísticos difusos para personalizar información en bibliotecas digitales

Carlos Porcel
dept. Informática
Universidad de Jaén
Jaén, Spain
cporcel@ujaen.es

Alberto Ching-López
dept. Ciencias de la Computación e I.A.
Universidad de Granada
Granada, Spain
alch@decsai.ugr.es

Álvaro Tejeda-Lorente
dept. Ciencias de la Computación e I.A.
Universidad de Granada
Granada, Spain
atejeda@decsai.ugr.es

Juan Bernabé-Moreno
dept. Ciencias de la Computación e I.A.
Universidad de Granada
Granada, Spain
jbernabemoreno@gmail.com

Enrique Herrera-Viedma
dept. Ciencias de la Computación e I.A.
Universidad de Granada
Granada, Spain
viedma@decsai.ugr.es

Francisco Javier Cabrerizo
dept. Ciencias de la Computación e I.A.
Universidad de Granada
Granada, Spain
cabrerizo@decsai.ugr.es

Sergio Alonso
dept. Ciencias de la Computación e I.A.
Universidad de Granada
Granada, Spain
zerjioi@ugr.es

Los grandes avances que se están produciendo en los últimos años en lo que respecta a las tecnologías de la información y las telecomunicaciones, está cambiando la forma en la que accedemos a la información. Internet es la principal fuente de información y por tanto, está afectando al desarrollo del resto de medios. Tal es el caso de las bibliotecas digitales, que tienen que hacer frente a nuevos problemas provocados por el gran cremiento de contenido digital y aplicaciones basadas en Web [2]. Efectivamente, los usuarios tienen serias dificultades a la hora de acceder a la información deseada de forma sencilla y en el momento oportuno. Es lo que se conoce como problema de sobrecarga de información. El uso de herramientas automáticas ayuda a afrontar y gestionar la gran cantidad de información disponible online en formato digital. También ayuda al personal de la biblioteca en la difusión de información de forma personalizada [1], [2].

Entonces, las herramientas a usar en bibliotecas digitales deben adoptar un papel más activo y ofrecer a los usuarios nuevos servicios que faciliten el acceso y personalización de la información, facilitando además, el que puedan compartir conocimiento. En este sentido, sería muy interesante que las bibliotecas digitales puedan anticipar las necesidades y preferencias de los usuarios, para suministrarles recursos que sean de su interés, incluso aunque no supieran de sus existencia. Pero debido al problema de sobrecarga de información que antes comentábamos, encontramos serias dificultades para conseguir ese objetivo.

Para ello, planteamos el uso de sistemas de recomendaciones, que han demostrado su utilidad en numerosos entornos, para facilitar y personalizar el acceso a la información [1]. Un *sistema de recomendaciones* ayuda a los usuarios a descubrir información de interés y de forma personalizada. Por ello, son especialmente útiles para facilitar a los usuarios el acceso a recursos que antes no conocían. Una de las claves del éxito de estos sistemas es que consiguen una correcta personalización en el sentido en que tratan a cada usuario de forma distinta. Para ello, el sistema debe contar con algún tipo de información sobre los usuarios, como por ejemplo, las valoraciones sobre los recursos que hayan explorado con anterioridad. Con ello, el sistema establece y gestiona sus perfiles, donde quedan representadas las preferencias y necesidades de cada uno. Y hay distintas formas de adquirir ese conocimiento, pudiendo hacerse de forma implícita (es decir, sin intereacción con el usuario) o solicitando que los usuarios expresen sus preferencias de forma explícita.

En este trabajo, versión resumida del trabajo publicado en [3], analizamos distintas propuestas de aplicación de técnicas de recomendación para favorecer la difusión de información en bibliotecas digitales. Pero, dada la gran variedad de formas de representar y evaluar la información cuando los usuarios intervienen (como es el caso que nos ocupa), nos centramos en propuestas basadas en lógica difusa. En concreto, analizamos cuatro propuestas que incorporan el modelado lingüístico difuso multigranular:

1. La primera propone un sistema de recomendaciones

lingüístico difuso que sugiere tanto recursos especializados según el área de interés de cada usuario, como recursos complementarios que podrían ser interesantes para ayudar en la formación de grupos multidisciplinares [6].

2. La segunda presenta un nuevo método para obtener información sobre las preferencias de los usuarios, reduciendo de esta manera el gran esfuerzo que tenían que realizar en propuestas previas y favoreciendo, por tanto, la adquisición de perfiles de usuarios. Los usuarios proporcionan sus preferencias sobre los principales recursos de investigación, usando relaciones de preferencia lingüísticas difusas incompletas. A partir de esta información el sistema construye sus respectivos vectores de preferencias sobre los distintos temas de interés y con ello, genera las recomendaciones [4].
3. En el tercer caso, se plantea una mejora de las propuestas anteriores, basándose en la incorporación de una memoria que ayude a paliar el problema de sobrecarga de información, aún persistente en bibliotecas digitales. La idea consiste en tener en cuenta las preferencias de los usuarios en cuanto al número de recomendaciones de recursos que quieren recibir, y entonces, usar recursos previamente seleccionados aunque no recomendados (por dichas restricciones de cantidad) para formar una nueva selección de recursos en nuevas rondas de recomendación [5].
4. La idea principal desarrollada en la última de las propuestas analizadas, consiste en considerar el proceso de generación de recomendaciones como una tarea con dos elementos distintos. Se trata de encontrar, por un lado, recursos de investigación que sean relevantes para los usuarios, pero por otro lado, encontrar recursos que sean válidos desde el punto de vista de la calidad de los mismos. Entonces, se hace una estimación tanto de la relevancia de los recursos como de su calidad, y ambos valores, se agregan en una nueva métrica que se tiene en cuenta para recomendar o no un recurso [7].

En todo este panorama, vemos que efectivamente en los últimos años se han ido consiguiendo bastantes logros gracias a la aplicación y rápido avance de las tecnologías de la información y las comunicaciones. Se puede destacar la posibilidad de trabajar con enormes cantidades de información, y no sólo con información basada en texto, sino incluyendo imágenes, audio, vídeo y material multimedia. Pero es crucial, no sólo trabajar con esas cantidades y distintos formatos de información, sino hacerlo de forma personalizada. Hasta ahora se han venido aplicando numerosas técnicas pero en determinadas ocasiones son los propios usuarios los que deben gestionar la información de forma explícita [6]. En este contexto, podría ayudar la aplicación de técnicas de aprendizaje automático que posibiliten automatizar la construcción de modelos de usuarios. También se han hecho algunos avances en este sentido [4], [5], [7], pero a pesar de los logros conseguidos, su principal limitación es la necesidad de interaccionar con el personal de la biblioteca para establecer las representaciones internas de los recursos. Por ello, encontramos en este punto un reto significativo al que se deberá hacer frente, así como seguir adaptándose a las nuevas casuísticas de la sociedad actual, como puede ser el auge experimentado en el uso de redes sociales.

Como conclusión, creemos que a pesar de los grances avances llevados a cabo, las oportunidades y retos para las futuras bibliotecas digitales pasan por esta triple perspectiva:

- Dado que la información generada de forma electrónica continúa creciendo y se preveé un crecimiento aún mayor, habrá que hacer frente a ello con nuevas herramientas o técnicas. La idea es que favorezcan la personalización de los servicios y la difusión de información de forma personalizada, por lo que habría que seguir mejorando en el establecimiento automático de los perfiles de usuarios y en el estudio y aplicación de técnicas automáticas que permitan obtener la representación interna de los recursos.
- Considerar el entono social de los usuarios. La idea sería explotar información diversa extraída de los distintos medios sociales en los que participan los usuarios, lo que permitiría ayudar a la construcción automática de perfiles de usuarios.
- Proponer e implantar sistemas reales que faciliten las labores de difusión de información en bibliotecas digitales, y que con su uso lo más extendido posible, permitan obtener datos suficientes que faciliten la evaluación de las distintas propuestas que puedan ir surgiendo.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido desarrollado gracias a la financiación FEDER del Proyecto TIN2016-75850-R.

Referencias

[1] M. Franke, A. Geyer-Schulz, and A. Neumann, “Recommender services in scientific digital libraries”, in Multimedia Services in Intelligent Environments. Heidelberg: Springer, pp. 377-417, 2008.

[2] R. D. Montoya, “Boundary objects/boundary staff: supporting digital scholarship in academic libraries”, Journal of Academic Librarianship, vol. 43(3), pp. 216-223, 2017.

[3] C. Porcel, A. Ching-López, J. Bernabé-Moreno, A. Tejeda-Lorente, and E. Herrera-Viedma, “Fuzzy Linguistic Recommender Systems for the Selective Diffusion of Information in Digital Libraries”, J. Inf. Process Syst, Vol.13(4), pp. 653-667, 2017.

[4] C. Porcel, and E. Herrera-Viedma, “Dealing with Incomplete Information in a Fuzzy Linguistic Recommender System to Disseminate Information in University Digital Libraries”, Knowledge-Based Systems, vol. 23, pp. 32-39, 2010.

[5] C. Porcel, J.M. Morales-del-Castillo, M.J. Cobo, A.A.. Ruíz, and E. Herrera-Viedma, “An Improved Recommender System to Avoid the Persistent Information Overload in a University Digital Library”, Control and Cybernetics-ICAE Journal Special Issue, vol. 39(4), pp. 899-924, 2010.

[6] C. Porcel, J.M. Moreno, and E. Herrera-Viedma, “A Multi-Disciplinar Recommender System to Advice Research Resources in University Digital Libraries”, Expert Systems with Applications, vol. 36(10), pp. 12520-12528, 2009.

[7] A. Tejeda-Lorente, C. Porcel, E. Peis, R. Sanz, and E. Herrera-Viedma, “A quality based recommender system to disseminate information in a University Digital Library”, Information Science, vol. 261, pp.52-69, 2014.

XIX Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy (XIX ESTYLF)

ESTYLF 8:
FUNDAMENTOS DE
LÓGICA FUZZY

Equivalence relations on fuzzy subgroups*

*Note: The full contents of this paper have been published in the volume *Lecture Notes in Artificial Intelligence 11160* (LNAI 11160)

C. Bejines, M.J. Chasco, J. Elorza
Universidad de Navarra
Pamplona, Spain
cbejines@alumni.unav.es,{mjchasco,jelorza}@unav.es

S. Montes
Universidad de Oviedo
Oviedo, Spain
montes@uniovi.es

***Abstract*—We compare four equivalence relations defined in fuzzy subgroups: Isomorphism, fuzzy isomorphism and two equivalence relations defined using level subset notion. We study if the image of two equivalent fuzzy subgroups through aggregation functions is a fuzzy subgroup, when it belongs to the same class of equivalence and if the supreme property is preserved in the class of equivalence and through aggregation functions.**

***Index Terms*—Aggregation function, fuzzy subgroup, level subgroup, isomorphism, fuzzy isomorphism, sup property**

An alternative axiomatization for a fuzzy modal logic of preferences

Amanda Vidal
ICS - Czech Academy of Sciences
Prague, Czech Republic
amanda@cs.cas.cz

Francesc Esteva
IIIA - CSIC
Bellaterra, Spain
esteva@iiia.csic.es

Lluis Godo
IIIA - CSIC
Bellaterra, Spain
godo@iiia.csic.es

***Abstract*—In a recent paper, the authors have proposed an axiomatic system for a modal logic of gradual preference on fuzzy propositions that was claimed to be complete with respect to the intended semantics. Unfortunately, the completeness proof has a flaw, that leaves still open the question of whether the proposed system is actually complete. In this paper, we propose an alternative axiomatic system with a multi-modal language, where the original modal operators are definable and their semantics are preserved, and for which completeness results are proved.**

***Index Terms*—fuzzy preferences, fuzzy modal logic, completeness**

I. Introduction

Reasoning about preferences is a topic that has received a lot of attention in Artificial Intelligence since many years, see for instance [HGY12], [DHKP11], [Kac11]. Two main approaches to representing and handling preferences have been developed: the relational and the logic-based approaches.

In the classical setting, every preorder (i.e. reflexive and transitive) relation $R \subseteq W \times W$ on a set of alternatives W can be regarded as a (weak) preference relation by understanding $(a, b) \in R$ as denoting b *is not less preferred than* a. From R one can define three disjoint relations:

- the *strict preference* $P = R \cap R^d$,
- the *indifference relation* $I = R \cap R^t$, and
- the *incomparability relation* $J = R^c \cap R^d$.

where $R^d = \{(a, b) \in R : (b, a) \notin R\}$, $R^t = \{(a, b) : (b, a) \in R\}$ and $R^c = \{(a, b) \in R : (a, b) \notin R\}$. It is clear that P is a strict order (irreflexive, antisymmetric and transitive), I is an equivalence relation (reflexive, symmetric and transitive) and J is irreflexive and symmetric. The triple (P, I, J) is called a *preference structure*, where the initial weak preference relation can be recovered as $R = P \cup I$.

In the fuzzy setting, preference relations can be attached degrees (usually belonging to the unit interval $[0, 1]$) of fulfilment or strength, so they become *fuzzy relations*. A weak fuzzy preference relation on a set X will be now a fuzzy preorder $R : X \times X \to [0, 1]$, where $R(a, b)$ is interpreted as the degree in which b is at least as preferred as a. Given a t-norm $\odot$, a fuzzy $\odot$-preorder satisfies reflexivity ($R(a, a) = 1$ for each $a \in X$) and $\odot$-transitivity ($R(a, b) \odot R(b, c) \leq R(a, c)$ for each $a, b, c \in X$). The most influential reference is the book by Fodor and Roubens [FR94], that was followed by many other works like, for example [DBM07], [DBM10], [DMB04], [DBM08], [DGLM08]. In this setting, many questions have been discusssed, like e.g. the definition of the strict fuzzy order associated to a fuzzy preorder (see for example [Bod08a], [Bod08b], [BD08], [EGV18]).

The basic assumption in logical-based approaches is that preferences have structural properties that can be suitably described in a fomalized language. This is the main goal of the so-called *preference logics*, see e.g. [HGY12]. The first logical systems to reason about preferences go back to S. Halldén [Hal57] and to von Wright [vW63], [vW72], [Liu10]. Others related works are [EP06], [vBvOR05]. More recently van Benthem et al. in [vBGR09] have presented a modal logic-based formalization of representing and reasoning with preferences. In that paper the authors first define a basic modal logic with two unary modal operators $\Diamond^{\leq}$ and $\Diamond^{<}$, together with the universal and existential modalities, A and E respectively, and axiomatize them. Using these primitive modalities, they consider several (definable) binary modalities to capture different notions of preference relations on classical propositions, and show completeness with respect to the intended preference semantics. Finally they discuss their systems in relation to von Wright axioms for *ceteris paribus* preferences [vW63]. On the other hand, with the motivation of formalising a comparative notion of likelihood, Halpern studies in [Hal97] different ways to extend preorders on a set X to preorders on subsets of X and their associated strict orders. He studies their properties and relations among them, and he also provides an axiomatic system for a *logic of relative likelihood*, that is proved to be complete with respect to what he calls *preferential structures*, i.e. Kripke models with preorders as accessibility relations. All these works relate to the classical (modal) logic and crisp preference (accessibility) relations.

In the fuzzy setting, as far as the authors are aware, there are not many formal logic-based approaches to reasoning with fuzzy preference relations, see e.g. [BEFG01]. More recently, in the first part of [EGV18] we studied and characterized

Vidal is supported by the project no. CZ.02.2.69/0.0/0.0/17_050/0008361, "Enhancing human resources for research in theoretical computer science", funded by the Operational Programme Research, Development and Education of the Ministry of Education, Youth and Sports of the Czech Republic. Esteva and Godo acknowledge partial support by the FEDER/MINECO project TIN2015-71799-C2-1-P.

different forms to define fuzzy relations on the set $\mathcal{P}(\mathcal{W})$ of subsets of W, from a fuzzy preorder on W, in a similar way to the one followed in [Hal97], [vBGR09] for classical preorders, while in the second part we have semantically defined and axiomatized several two-tiered graded modal logics to reason about different notions of preferences on crisp propositions, see also [EGV17]. On the other hand, in [VEG17a] we considered a modal framework over a many-valued logic with the aim of generalizing Van Benthem et al.'s modal approach to the case of both fuzzy preference accessibility relations and fuzzy propositions. To do that, we first extended the many-valued modal framework for only a necessity operator $\Box$ of [BEGR11], by defining an axiomatic system with both necessity and possibility operators $\Box$ and $\Diamond$ over the same class of models. Unfortunately, in the last part of that paper, there is a mistake in the proof of Theorem 3 (particularly, equation (4)). This leaves open the question of properly axiomatizing the logic of graded preferences defined there.

In this paper we address this problem, and propose an alternative approach to provide a complete axiomatic system for a logic of fuzzy preferences. Namely, given a finite MTL-chain $\mathbf{A}$ (i.e. a finite totally ordered residuated lattice) as set of truth values, and given an A-valued preference Kripke model (W, R, e), with R a fuzzy preorder valued on A, we consider the a-cuts R_a of the relation R for every $a \in A$, and for each a-cut R_a, we consider the corresponding modal operators $\Box_a, \Diamond_a$. These operators are easier to be axiomatized, since the relations R_a are not fuzzy any longer, they are a nested set of classical (crisp) relations. The good news is that, in the our rich (multi-modal) logical framework, we can show that the original modal operators $\Box$ and $\Diamond$ are definable, and vice-versa if we expand the logic with Monteiro-Baaz's Δ operator. So we obtain a different, but equivalent, system where the original operators can be properly axiomatized in an indirect way through the graded operators.

The paper is structured as follows. After this introduction, in Section II we present the multi-modal language and the intended semantics given by *graded preference Kripke models*, which allows the formalization of different notions dealing with preferences taking values in some arbitrary MTL-chain $\mathbf{A}$. In Section III, we discuss different possibilities to formalize notions of preferences on fuzzy propositions in preference Kripke models. In Section IV we will exhibit a complete axiomatization of an alternative preference logic that is not, however, equivalent to the one from [VEG17a], since the language is intrinsically different. Nevertheless, we will see in Section V how, by the addition to the logic of the so-called Monteiro-Baaz Δ operation, we can also provide an axiomatization of the original logic of graded preference models pursued in [VEG17a]. We finish with some conclusions and open problems.

II. A multi-modal preference logic: language and semantics

Let us begin by defining the formal language of our underlying many-valued propositional setting. Let $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, \odot, \to, 0, 1)$ be a *finite* and linearly ordered (bounded, integral, commutative) residuated lattice (equivalently, a finite MTL-chain) [GJKO07], and consider its canonical expansion $\mathbf{A^c}$ by adding a new constant $\overline{a}$ for every element $a \in A$ (canonical in the sense that the interpretation of $\overline{a}$ in $\mathbf{A^c}$ is a itself). A negation operation $\neg$ can always be defined as $\neg x = x \to 0$.

The logic associated with $\mathbf{A^c}$ will be denoted by $\mathbf{\Lambda(A^c)}$, and its logical consequence relation $\models_{\mathbf{A^c}}$ is defined as follows: for any set $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathbf{Fm}$ of formulas built in the usual way from a set of propositional variables $\mathcal{V}$ in the language of residuated lattices (we will use the same symbol to denote connectives and operations), including constants $\{\overline{a} : a \in A\}$,

- $\Gamma \models_{\mathbf{A^c}} \phi$ if, and only if,
  $\forall h \in \mathrm{Hom}(\mathbf{Fm}, \mathbf{A}^c)$, if $h[\Gamma] \subseteq \{1\}$ then $h(\phi) = 1$,

where $\mathrm{Hom}(\mathbf{Fm}, \mathbf{A}^c)$ denotes the set of evaluations of formulas on $\mathbf{A^c}$.

Lifting to the modal level, we extend the propositional language by graded modal operators $\Box_a, \Diamond_a$, one pair for each element a of the algebra $\mathbf{A}$. We let the set $\mathbf{MFm}$ of *multi-modal formulas* defined as usual from a set $\mathcal{V}$ of propositional variables, residuated lattice operations $\{\wedge, \vee, \odot, \to\}$, truth constants $\{\overline{a} : a \in A\}$, and modal operators $\{\Box_a, \Diamond_a : a \in A\}$.

We are now ready to introduce $\mathbf{A}$-valued preference Kripke models.

Definition II.1. *An* $\mathbf{A}$*-preference model* is a triple $\mathfrak{M} = \langle W, R, e\rangle$ such that

- W is a set of worlds,
- $R\colon W \times W \to A$ is an A-valued fuzzy pre-order, i.e. a reflexive and $\odot$-transitive A-valued binary relation between worlds, and
- $e\colon W \times \mathcal{V} \to A$ is a world-wise $\mathbf{A}$-evaluation of variables. This evaluation is uniquely extended to formulas of $\mathbf{MFm}$ by using the operations in $\mathbf{A}$ for what concerns propositional connectives, and letting for each $a \in A$,

$$e(v, \Box_a\varphi) = \bigwedge_{w : v \preceq_a w} \{e(w, \varphi)\}$$
$$e(v, \Diamond_a\varphi) = \bigvee_{w : v \preceq_a w} \{e(w, \varphi)\}$$

  where $v \preceq_a w$ stands for $R(v, w) \geq a$.

We will denote by $\mathbb{P}_{\mathbf{A}}$ the class of $\mathbf{A}$-preference models. Given an $\mathbf{A}$-preference model $\mathfrak{M} \in \mathbb{P}_{\mathbf{A}}$ and $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathbf{MFm}$, we write $\Gamma \Vdash_{\mathfrak{M}} \varphi$ whenever for any $v \in W$, if $e(v, \gamma) = 1$ for all $\gamma \in \Gamma$, then $e(v, \varphi) = 1$ too. Analogously, we write $\Gamma \Vdash_{\mathbb{P}_{\mathbf{A}}} \varphi$ whenever $\Gamma \Vdash_{\mathfrak{M}} \varphi$ for any $\mathfrak{M} \in \mathbb{P}_{\mathbf{A}}$.

We will denote by differentiated names some particular definable modal operators that enjoy a special meaning in our models. Namely:

- $\Box\varphi := \bigwedge_{a \in A} \overline{a} \to \Box_a\varphi$ and $\Diamond\varphi := \bigvee_{a \in A} \overline{a} \odot \Box_a\varphi$.
  It is easy to check that the evaluation of these operators in a preference model as defined here, coincides with the

usual one for fuzzy Kripke models, i.e.,

$$e(v, \Box\varphi) = \bigwedge_{w \in W} \{R(v,w) \to e(w,\varphi)\}$$

$$e(v, \Diamond\varphi) = \bigvee_{w \in W} \{R(v,w) \odot e(w,\varphi)\}$$

- $A\varphi := \Box_0\varphi$ and $E\varphi := \Diamond_0\varphi$.

  Again, it is easy to see that these operators coincide with the global necessity and possibility modal operators respectively, i.e.,

$$e(v, A\varphi) = \bigwedge_{w \in W} \{e(w,\varphi)\}, \quad e(v, E\varphi) = \bigvee_{w \in W} \{e(w,\varphi)\}.$$

III. Modeling fuzzy preferences on propositions

The preference models introduced above are a very natural setting to formally address and reason over graded or fuzzy preferences over non-classical contexts. They are similar to the (classical) preference models studied by van Benthem et. al in [vBGR09], but offering a lattice of values (and so, a many-valued framework) where to evaluate both the truth degrees of formulas and the accessibility (preference) relation. The latter can be naturally interpreted as a graded preference relation between possible worlds or states (assignments of truth-values to variables). The question is then how to lift a (fuzzy) preference relation $\leq$ on worlds to (fuzzy) preference relations among formulas.

In the classical case, for instance in [vBGR09], [EGV18] the following six extensions are considered, where $[\varphi]$ and $[\psi]$ denote the set of models of propositions φ and ψ respectively:

- $\varphi \leq_{\exists\exists} \psi$ iff $\exists u \in [\varphi], v \in [\psi]$ such that $u \leq v$
- $\varphi \leq_{\exists\forall} \psi$ iff $\exists u \in [\varphi]$, such that $\forall v \in [\psi]$, $u \leq v$
- $\varphi \leq_{\forall\exists} \psi$ iff $\forall u \in [\varphi]$, $\exists v \in [\psi]$ such that $u \leq v$
- $\varphi \leq_{\forall\forall} \psi$ iff $\forall u \in [\varphi]$ and $v \in [\psi]$, $u \leq v$
- $\varphi \leq_{\exists\forall 2} \psi$ iff $\exists v \in [\psi]$, such that $\forall u \in [\varphi]$, $u \leq v$
- $\varphi \leq_{\forall\exists 2} \psi$ iff $\forall v \in [\psi]$, $\exists u \in [\varphi]$ such that $u \leq v$

However, not all these extensions can be expressed in our framework. For instance, we can express the orderings $\leq_{\exists\exists}$ and $\leq_{\forall\forall}$ as follows:

- $\varphi \leq_{\exists\exists} \psi := E(\varphi \wedge \Diamond\psi)$
- $\varphi \leq_{\forall\exists} \psi := A(\varphi \to \Diamond\psi)$

Some others would need to consider the inverse order $\geq$ of $\leq$ in the models or to assume the order $\leq$ be total, and some other are not just expressible (see [vBGR09]). On the other hand, not all the extensions above are also equally reasonable, for instance some of them are not even preorders. This is not the case of $\leq_{\forall\exists}$ and $\leq_{\forall\exists 2}$, that are indeed preorders.

In the fuzzy case, the formulas

$$E(\varphi \wedge \Diamond\psi),$$
$$A(\varphi \to \Diamond\psi)$$

make full sense as a fuzzy generalizations of the $\leq_{\exists\exists}$ and $\leq_{\forall\exists}$ preference orderings respectively, and moreover, as shown in [VEG17a], the expression $A(\varphi \to \Diamond\psi)$ models a fuzzy preorder in formulas (i.e. it satisfies reflexivity and $\odot$-transitivity).

Using the graded modalities $\Diamond_a$, one could also consider other intermediate extensions like

$$E(\varphi \wedge \Diamond_a\psi),$$
$$A(\varphi \to \Diamond_a\psi)$$

which would correspond to the fuzzy extensions of the following preference orderings $\leq^a_{\exists\exists}$ $\leq^a_{\forall\exists}$ on crisp propositions defined from the a-cut of the fuzzy preorder R:

- $\varphi \leq^a_{\exists\exists} \psi$ iff $\exists u \in [\varphi]$, $\exists v \in [\psi]$ such that $R(u,v) \geq a$.
- $\varphi \leq^a_{\forall\exists} \psi$ iff $\forall u \in [\varphi]$, $\exists v \in [\psi]$ such that $R(u,v) \geq a$.

Indeed, given an $\mathbf{A}$-valued preference model $\mathfrak{M} = \langle W, R, e\rangle$, one can define the following fuzzy preference relations on formulas:

- $\varphi \preceq^a_{\exists\exists} \psi$ iff there are worlds $v, w \in W$ such that $R(v,w) \geq a$ and $e(v,\varphi) \leq e(w,\psi)$
- $\varphi \preceq^a_{\forall\exists} \psi$ iff for each world $v \in W$, there is a world $w \in W$ such that $R(v,w) \geq a$ and $e(v,\varphi) \leq e(w,\psi)$.

Then, it is not difficult to check that

$$\Vdash_{\mathfrak{M}} E(\varphi \wedge \Diamond_a\psi) \text{ iff } \varphi \preceq^a_{\exists\exists} \psi$$
$$\Vdash_{\mathfrak{M}} A(\varphi \to \Diamond_a\psi) \text{ iff } \varphi \preceq^a_{\forall\exists} \psi\ .$$

So, we think our many-valued logical framework is expressive enough to capture many notions of (fuzzy) preferences among formulas. In the next section we provide an axiomatisation for this fuzzy multi-modal preference logic.

IV. Axiomatizing fuzzy preference models

In [VEG17a], we proposed the following axiomatic system $\mathsf{P}_{\mathbf{A}}$, in the language only with $\Box$ and $\Diamond$ modal operators (i.e. without the $\Box_a$'s and $\Diamond_a$'s):

- The axioms and rules of the minimal modal logic $\mathsf{BM}_{\mathbf{A}}$ for the pairs $(\Box, \Diamond)$ and (A, E) of modal operators (see [VEG17a, Def. 2])
- T: $\Box\varphi \to \varphi, \varphi \to \Diamond\varphi, \quad A\varphi \to \varphi, \varphi \to E\varphi$
- 4: $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi, \Diamond\Diamond\varphi \to \Diamond\varphi,\ A\varphi \to AA\varphi, EE\varphi \to E\varphi$
- B: $\varphi \to AE\varphi$
- The *inclusion* axioms: $\mathsf{A}\varphi \to \Box\varphi$, $\Diamond\varphi \to \mathsf{E}\varphi$

In [VEG17a, Th. 3], this system was claimed to be complete with respect to the class $\mathbb{P}_{\mathbf{A}}$ of preference models. Unfortunately, we have discovered there is a flaw at the end of the proof, so the claim of the theorem remains unproved. In this section we remedy this problem by considering an alternative axiomatic system, based on the use of the graded modalities $\Box_a$ and $\Diamond_a$, for $a \in A$, introduced in Section II.

To this end, we introduce next the axiomatic system $\mathsf{mM}_{\mathbf{A}}$ defined by the following axioms and rules:

1) For each $a \in A$,
   - Axioms of minimum modal logic $\mathsf{BM}_{\mathbf{A}}$ for each pair of operators $(\Box_a, \Diamond_a)$ (see [VEG17a, Def. 2])
2) For each $a \in A$, the axiom
   - C_a: $\Box_a(\overline{k} \vee \varphi) \to \overline{k} \vee \Box_a\varphi$
3) For each $a, b \in A$, axioms K, T and 4:

- $K_a\colon \Box_a(\varphi \to \psi) \to (\Box_a\varphi \to \Box_a\psi)$
- $T_a\colon \Box_a\varphi \to \varphi, \qquad \varphi \to \Diamond_a\varphi$
- $4_{a,b}\colon \Box_{a\odot b}\varphi \to \Box_a\Box_b\varphi, \qquad \Diamond_a\Diamond_b\varphi \to \Diamond_{a\odot b}\varphi$

4) For each $a \leq b$, nestedness axioms:
   - $\Box_a\varphi \to \Box_b\varphi, \quad \Diamond_b\varphi \to \Diamond_a\varphi$
5) For $a = 0$, axiom
   - $B_0\colon \varphi \to \Box_0\Diamond_0 A$
6) Rules: Modus Ponens and the necessitation for $\Box_0$:[1]
   - from φ derive $\Box_0\varphi$

Letting $\vdash_{\mathsf{mM}_\mathbf{A}}$ be the consequence relation of the previous axiomatic system defined as usual, we can show that it is indeed complete with respect to our intented semantics given by the class of preference structures $\Vdash_{\mathbb{P}_\mathbf{A}}$. Formally,

Theorem IV.1. *For any* $\Gamma, \varphi \subseteq \mathbf{MFm}$,

$$\Gamma \vdash_{\mathsf{mM}_\mathbf{A}} \varphi \text{ if and only if } \Gamma \Vdash_{\mathbb{P}_\mathbf{A}} \varphi.$$

Proof. Soundness (left to right direction) is easy to check. For what concerns completeness (right to left direction), we can define a canonical model

$$\mathfrak{M}^c = (W^c, \{R^c_a\}_{a\in A}, e^c)$$

with a set of crisp accessibility relations as follows, where $Th(\mathsf{mM}_\mathbf{A}) = \{\varphi : \vdash_{\mathsf{mM}_\mathbf{A}} \varphi\}$ denotes the set of theorems of $\mathsf{mM}_\mathbf{A}$:

- $W^c = \{v \in Hom(\mathbf{MFm}, \mathbf{A})\colon v(Th(\mathsf{mM}_\mathbf{A})) = \{1\}\}$,
- $R^c_a(v, w)$ if and only if $v(\Box_a\varphi) = 1 \Rightarrow w(\varphi) = 1$ for all $\varphi \in \mathbf{MFm}$,
- $e^c(v, p) = v(p)$, for any propositional variable p.

It is clear (since the only modal inference rules affects only theorems of the logic) that if $\Gamma \nvdash_{\mathsf{mM}_\mathbf{A}} \varphi$, then there is $v \in W^c$ such that $v(\Gamma) \subset \{1\}$ and $v(\varphi) < 1$. It is then only necessary to prove that the evaluation in the model can be defined in that way, namely, to prove the corresponding Truth Lemma, which follows from [BEGR11] and [VEG17a], i.e., for each formula $\varphi \in \mathbf{MFm}$ and each $v \in W^c$, it holds that

$$e^c(v, \Box_a\varphi) = \bigwedge_{R^c_a(v,w)} w(\varphi) \text{ and } e^c(v, \Diamond_a\varphi) = \bigvee_{R^c_a(v,w)} w(\varphi).$$

The nestedness axioms allow us to easily prove that for any $a \leq b \in A$, it holds that $R^c_b \subseteq R^c_a$. Consider then the fuzzy relation R^c defined by

$$R^c(v, w) = \max\{a \in A\colon R^c_a(v, w)\}.$$

It is clear that $R^c(w, v) \geq a$ if and only if $R^c_a(v, w)$. Then, the truth lemma for the original model directly implies both

$$e^c(v, \Box_a\varphi) = \bigwedge_{w\in W^c, R^c(v,w)\geq a} w(\varphi),$$

$$e^c(v, \Diamond_a\varphi) = \bigvee_{w\in W^c, R^c(v,w)\geq a} w(\varphi).$$

[1]Observe that, together with the nestedness axioms, this rule implies the necessitation rule for each $\Box_a$.

It follows from axioms T_a that each R^c_a is reflexive, and so, R^c is a reflexive relation as well. Moreover, from axioms $4_{a,b}$, we get that R^c is $\odot$-transitive. The only remaining step is to prove is that we can obtain an equivalent model (in the sense of preserving the truth-values of formulas) in which R^c_0 is the total relation (in order to really get that $\Box_0$ and $\Diamond_0$ are global modalities). Observe that in the model defined above, thanks to axioms $T_0, 4_{0,0}$ and B_0, R^c_0 can be proven to be an equivalence relation, even though it is not necessarily the case that $R^c_0 = W^c \times W^c$. Nevertheless, since $R^c_b \subseteq R^c_0$ for all $b \in A$, for any arbitrary $v \in W^c$, we can define the model $\mathfrak{M}^c_v$ from $\mathfrak{M}^c$ by restricting the universe to $W^c_v = \{u \in W^c\colon R^c_0(v, u)\}$ and get that, for any $u \in W^c_v$ and any formula $\varphi \in \mathbf{MFm}$,

$$e^c(u, \varphi) = e^c_v(u, \varphi).$$

All the previous considerations allow us to prove that if $\Gamma \nvdash_{\mathsf{mM}_\mathbf{A}} \varphi$ there is $v \in W^c_v$ such that $e^c_v(v, \Gamma) \subseteq 1$ and $e^c_v(v, \varphi) < 1$. Given that the model $\mathfrak{M}^c_v$ defined above is indeed an $\mathbf{A}$-preference model, this concludes the completeness proof. □

V. Closing the loop: from graded to fuzzy modalities

In the previous section, we have seen that we have been able to provide a complete axiomatic system $\mathsf{mM}_\mathbf{A}$ for the graded preference modalities $\Box_a$'s and $\Diamond_a$'s, and in Section II we have seen that the original fuzzy modalities $\Box$ and $\Diamond$ can be expressed from them. Thus, the system $\mathsf{mM}_\mathbf{A}$ can be considered in fact as a sort of indirect axiomatization of the modalities $\Box$ and $\Diamond$ as well. In this section, generalising an approach introduced in [BEGR09], we will see that, by enriching our language with the well-known Monteiro-Baaz Δ connective (see e.g. [Háj98]), the graded modalities $\Box_a, \Diamond_a$ can also be expressed in terms of the original modal operators $\Box$ and $\Diamond$. Surprisingly enough we can do it using only the $\Diamond$ operator, while it is not clear using only $\Box$ would suffice.

Recall that the Monteiro-Baaz Δ operation over a linearly ordered MTL-chain $\mathbf{A}$ is the operation defined as

$$\Delta(a) = \begin{cases} 1 & \text{if } a = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

for all $a \in A$.

In the following, we will write $\varphi \equiv \psi$ to denote that φ and ψ are logically equivalent in the class of preferece models $\mathbb{P}_\mathbf{A}$. We will also denote by $\varphi \approx \overline{b}$ the formula $\Delta(\varphi \leftrightarrow \overline{b})$.

Lemma V.1.

$$\Box_a\varphi \equiv \bigwedge_{b\in A} (\Delta(\overline{a} \to \Diamond(\varphi \approx \overline{b})) \to \overline{b})$$

$$\Diamond_a\varphi \equiv \bigvee_{b\in A} (\Delta(\overline{a} \to \Diamond(\varphi \approx \overline{b}))\&\overline{b})$$

Proof. As in [BEGR09] we can check that

$$e(v, \Diamond(\varphi \approx \overline{b})) = \bigvee_{e(w,\varphi)=b} R(v, w).$$

Then $e(v, \Delta(\overline{a} \to \Diamond(\varphi \approx \overline{b}))) = \Delta(a \to \bigvee_{e(w,\varphi)\approx b} R(v,w))$, and thus

$$e(v, \Delta(\overline{a} \to \Diamond(\varphi \approx \overline{b}))) = \begin{cases} 1, & \text{if } a \leq \bigvee_{e(w,\varphi)=b} R(v,w) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}.$$

Letting $S = \{b \in A \colon a \leq \bigvee_{e(w,\varphi)=b} R(v,w)\}$, the previous trivially implies both that

$$e(v, \Delta(\overline{a} \to \Diamond(\varphi = \overline{b})) \to \overline{b}) = \begin{cases} b, & \text{if } b \in S \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$e(v, \Delta(\overline{a} \to \Diamond(\varphi = \overline{b}))\&\overline{b}) = \begin{cases} b, & \text{if } b \in S \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}.$$

Moreover, it is easy to see that

$$\{b \in A \colon a \leq \bigvee_{e(w,\varphi)=b} R(v,w)\} = \{e(w,\varphi) \colon a \leq Rvw\}.$$

Then, we have $e(v, \bigwedge_{b\in A} (\Delta(\overline{a} \to \Diamond(\varphi = \overline{b})) \to \overline{b})) = \bigwedge S = \bigwedge_{a\leq R(v,w)} e(w,\varphi) = e(v, \Box_a \varphi)$ and $e(v, \bigvee_{b\in A} (\Delta(\overline{a} \to \Diamond(\varphi = \overline{b}))\&\overline{b})) = \bigvee S = \bigvee_{a\leq R(v,w)} e(w,\varphi) = e(v, \Diamond_a \varphi)$, concluding the proof. □

It is then the case that it is possible to provide an axiomatization for the fragment with only $\Box, \Diamond, A$ and E of the logic $\Vdash_{\mathbb{P}_\mathbf{A}}$ plus Δ. First, it is easy to provide an axiomatic system for the whole logic $\Vdash_{\mathbb{P}_\mathbf{A}}$ plus Δ by adding to $\mathsf{mM}_\mathbf{A}$ an axiomatization for Δ (see eg. [Háj98], [VEG17b]) and the interaction axioms

$$\Delta \Box_a \varphi \to \Box_a \Delta \varphi.$$

From here, it is clear that we can use the interdefinability of $\Box_a, \Diamond_a$ from $\Diamond$ proven above, and obtain in that way an axiomatic system complete with respect to the intended semantics.

This system is, however, quite more involved than the one presented in [VEG17a] (that did not achieve completeness with respect to its intended semantics). An open problem for future works is to study possible simplifications of this axiomatization, since the $(\Box, \Diamond, A, E)$-fragment is possibly the best suited to formalise graded preference relations while maintaining a lower level of elements in the language (and so, probably a lower complexity level).

As a side result, the previous characterization allows us to get a definition of the $\Box$ operation in terms of the $\Diamond$ very different from the usual one arising in classical modal logic. In particular, we get the following result.

Lemma V.2.

$$\Box\varphi \equiv \bigwedge_{a\in A} \bigwedge_{b<a\in A} \Delta(\overline{a} \to \Diamond(\varphi \approx \overline{b})) \to (\overline{a \to b})$$

Proof. We know by definition that

$$\Box\varphi \equiv \bigwedge_{a\in A} \overline{a} \to \Box_a \varphi.$$

Then, using the previously proven equivalences, we prove the lemma by the following chain of equalities

$$\begin{aligned} \Box\varphi &\equiv \bigwedge_{a\in A} (\overline{a} \to \bigwedge_{b\in A} (\Delta(\overline{a} \to \Diamond(\varphi \approx \overline{b})) \to \overline{b})) \\ &\equiv \bigwedge_{a\in A} \bigwedge_{b\in A} \overline{a} \to (\Delta(\overline{a} \to \Diamond(\varphi \approx \overline{b})) \to \overline{b}) \\ &\equiv \bigwedge_{a\in A} \bigwedge_{b\in A} \Delta(\overline{a} \to \Diamond(\varphi \approx \overline{b})) \to (\overline{a} \to \overline{b}) \\ &\equiv \bigwedge_{a\in A} \bigwedge_{b<a\in A} \Delta(\overline{a} \to \Diamond(\varphi \approx \overline{b})) \to (\overline{a \to b}) \end{aligned}$$

□

VI. Conclusions and Ongoing work

The aim of this work is to provide a formal framework generalising the treatment of preferences in the style of eg. [vBGR09] to a fuzzy context. We have presented an axiomatic system encompassing reflexive and transitive modalities plus global operators, that is shown to be the syntactical counterpart of many-valued Kripke models with (reflexive and transitive) graded (weak) preference relations between possible worlds or states. It is based on considering the cuts of the relations over the elements of the algebra of evaluation, solving in this way some problems arising from [VEG17a], for what concerns systems extended with the projection connective Δ. This logical framework stands towards the use of modal many-valued logics in the representation and management of graded preferences, in the same fashion that (classical) modal logic has served in the analogous Boolean preference setting.

The generalization of the previous logical system to cases when strict preferences are taken into account is part of ongoing work. The addition of those operators would allow a richer axiomatic definition of preference relations between formulas, in the sense of Section III. Moreover, further study of the introduced preference models should be pursued towards the formalisation of particular notions like indifference or incomparability, and aiming towards the incorporation of these systems in graded reasoners or recommender systems.

On the other hand, the study of the previous systems over other classes of algebras of truth-values (e.g. including infinite algebras like those defined on the real unit interval $[0, 1]$ underlying Łukasiewicz, Product or Gödel fuzzy logics) is also of great interest, both from a theoretical point of view and towards the modelization of situations needing of continuous sets of values.

References

[BD08] U. Bodenhofer and M. Demirci. Strict fuzzy orderings with a given context of similarity. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 16(2):147–178, 2008.

[BEFG01] B. De Baets, F. Esteva, J. Fodor, and L. Godo. Systems of ordinal fuzzy logic with application to preference modelling. *Fuzzy Sets and Systems*, 124(3):353–359, 2001. Fuzzy logic (Palma, 1999/Liptovský Ján, 2000).

[BEGR09] F. Bou, F. Esteva, L. Godo, and R. Rodríguez. Characterizing fuzzy modal semantics by fuzzy multimodal systems with crisp accessibility relations. In *Proc. of the Joint 2009 IFSA World Congress and 2009 EUSFLAT Conference, Lisbon, Portugal, 20-24 July 2009*, pages 1541–1546, 2009.

[BEGR11] F. Bou, F. Esteva, L. Godo, and R. Rodríguez. On the minimum many-valued modal logic over a finite residuated lattice. *Journal of Logic and Computation*, 21(5):739–790, 2011.

[Bod08a] U. Bodenhofer. Orderings of fuzzy sets based on fuzzy orderings part i: The basic approach. *Mathware and Soft Computing*, 15(2):201–218, 2008.

[Bod08b] U. Bodenhofer. Orderings of fuzzy sets based on fuzzy orderings part ii: Generalizations. *Mathware and Soft Computing*, 15(3):219–249, 2008.

[DBM07] S. Díaz, B. De Baets, and S. Montes. Additive decomposition of fuzzy pre-orders. *Fuzzy Sets and Systems*, 8:830–842, 2007.

[DBM08] S. Díaz, B. De Baets, and S. Montes. On the compositional characterization of complete fuzzy pre-orders. *Fuzzy Sets and Systems*, 159(17):2221–2239, 2008.

[DBM10] S. Díaz, B. De Baets, and S. Montes. General results on the decomposition of transitive fuzzy relations. *Fuzzy optimization and Decisionn Making*, 9(1):1–29, 2010.

[DGLM08] S. Díaz, J.L. García-Lapresta, and S. Montes. Consistent models of transitivity for reciprocal preferences on a finite ordinal scale. *Information Sciences*, 178(13):2832–2848, 2008.

[DHKP11] C. Domshlak, E. Hüllermeier, S. Kaci, and H. Prade. Preferences in AI: An overview. *Artificial Intelligence*, 175(7-8):1037–1052, 2011.

[DMB04] S. Díaz, S. Montes, and B. De Baets. Transitive decomposition of fuzzy preference relations: the case of nilpotent minimum. *Kybernetika*, 40(1):71–88, 2004.

[EGV17] F. Esteva, L. Godo, and A. Vidal. On a graded modal logic approach to reason with fuzzy preferences. In I. Aguiló et al., editor, *Recent Advances in Artificial Intelligence Research and Development - Proc. of CCIA'17*, volume 300 of *Frontiers in Artificial Intelligence and Applications*, pages 86–95. IOS Press, 2017.

[EGV18] F. Esteva, L. Godo, and A. Vidal. A modal account of preference in a fuzzy setting. In D. Pelta and C. Cruz Corona, editors, *Soft Computing Based Optimization and Decision Models*, volume 360 of *Studies in Fuzziness and Soft Computing*, pages 241–260. Springer, Cham, 2018.

[EP06] U. Endriss and E. Pacuit. Modal logics of negotiation and preference. In M. Fisher, W. van der Hoek, B. Konev, and A. Lisitsa, editors, *Proceedings of the 10th European Conference on Logics in Artificial Intelligence (JELIA-2006)*, volume 4160 of *LNAI*, pages 138–150. Springer-Verlag, September 2006.

[FR94] J. Fodor and M. Roubens. *Fuzzy Preference Modeling and Multicriteria Decision Support*. Kluwer Academic Publishers, 1994.

[GJKO07] N. Galatos, P. Jipsen, T. Kowalski, and H. Ono. *Residuated Lattices: an algebraic glimpse at substructural logics*, volume 151 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. Elsevier, Amsterdam, 2007.

[Háj98] P. Hájek. *Metamathematics of fuzzy logic*, volume 4 of *Trends in Logic—Studia Logica Library*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.

[Hal57] S. Halldén. On the logic of better. *Library of Theoria*, 2, 1957.

[Hal97] J.Y. Halpern. Defining relative likelihood in partially-ordered preference structures. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 7:1–24, 1997.

[HGY12] S.O. Hansson and Till Grüne-Yanoff. *Preferences. The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. 2012.

[Kac11] S. Kaci. *Working with Preferences: Less Is More*. Cognitive Technologies. Springer, 2011.

[Liu10] F. Liu. Von wright's "the logic of preference" revisited. *Synthese*, 175(1):69–88, 2010.

[vBGR09] J. van Benthem, P. Girard, and O. Roy. Everything else being equal: A modal logic for ceteris paribus preferences. *Journal of Philosophical Logic*, 38:83–125, 2009.

[vBvOR05] J. van Benthem, S. van Otterloo, and O. Roy. Preference logic, conditionals and solution concepts in games. Research Report PP-2005-28, Institute for Logic, Language and Computation, University of Amsterdam, Amsterdam, 2005.

[VEG17a] A. Vidal, F. Esteva, and L. Godo. On finite-valued bimodal logics with an application to reasoning about preferences. In *Proceedings of EUSFLAT 2017*, Advances in Fuzzy Logic and Technology 2017, pages 505–517, 2017.

[VEG17b] A. Vidal, F. Esteva, and L. Godo. On modal extensions of product fuzzy logic. *Journal of Logic and Computation*, 27(1):299–336, 2017.

[vW63] G.H. von Wright. *The Logic of Preference*. Edinburg University Press, 1963.

[vW72] G.H. von Wright. The logic of preference reconsidered. *Theory and Decision*, 3(2):140–169, 1972.

Stable models in multi-adjoint normal logic programs

M. Eugenia Cornejo, David Lobo and Jesús Medina
Department of Mathematics, University of Cádiz
Email: {mariaeugenia.cornejo,david.lobo,jesus.medina}@uca.es

***Abstract*—Multi-adjoint normal logic programming arises as an extension of multi-adjoint logic programming considering a negation operator in the underlying lattice. In the literature, we can find different semantics for logic programs with negation [3]–[5]. We are interested in considering the stable model semantics in our logic programming framework. This paper summarizes a broad study on the syntax and semantics of multi-adjoint normal logic programming framework which has been recently published in [1]. Specifically, we will analyze the existence and the unicity of stable models for multi-adjoint normal logic programs.**

***Index Terms*—multi-adjoint logic programs, negation operator, stable models**

I. Introduction

Multi-adjoint logic programming was introduced in [9] as a general logic programming framework in which several implications appear in the rules of a same logic program and any order-preserving operator is allowed in the body of its rules. An interesting consequence of considering order-preserving operators in the body of the rules is associated with the existence of a least model. This fact makes possible to check whether a statement is a consequence of the logic program by simply computing the truth value of the statement under the least model. Therefore, the semantics of a multi-adjoint logic program is based on the least model of the program.

A well known fact in the logic programming literature is that the use of a negation operator increases the flexibility of a logic programming language. We are interested in enriching the multi-adjoint logic programming environment with the inclusion of a negation operator, which will give rise to a new kind of logic programs called multi-adjoint normal logic programs. It is important to emphasize that the existence of minimal models in an arbitrary multi-adjoint normal logic program cannot be ensured, in general. Furthermore, minimal models are not enough in order to prove that a statement is a consequence of a multi-adjoint normal logic program. As a result, the semantics of multi-adjoint normal logic programs will not be based on the notion of minimal model, but on the notion of stable model.

Different semantics such as the well-founded semantics [3], the stable models semantics [4] and the answer sets semantics [5] have been developed for logic programs with negation.

Partially supported by the State Research Agency (AEI) and the European Regional Development Fund (ERDF) project TIN2016-76653-P, and by the research and transfer program of the University of Cádiz.

In this paper, we will focus on the study of the existence and the unicity of stable models for multi-adjoint normal logic programs. According to the literature, sufficient conditions to ensure the existence of stable models have already been stated in other logical approaches [2], [6], [7], [10]–[13].

This paper will present a brief summary on the syntax and semantics defined for multi-adjoint normal logic programs in [1], including the most important results related to the existence and the unicity of stable models. In particular, we will show sufficient conditions which ensure the existence of stable models for multi-adjoint normal logic programs defined on any convex compact set of an euclidean space. Besides, in what regards the uniqueness of stable models, sufficient conditions for multi-adjoint normal logic programs defined on the set of subintervals $[0,1] \times [0,1]$ will be provided.

II. Multi-adjoint normal logic programs

The syntax of multi-adjoint normal logic programs is based on an algebraic structure composed by a complete bounded lattice together with various adjoint pairs and a negation operator. This algebraic structure is usually known as multi-adjoint normal lattice and it is formally defined as follows.

Definition 1. *The tuple* $(L, \preceq, \leftarrow_1, \&_1, \ldots, \leftarrow_n, \&_n, \neg)$ *is a* multi-adjoint normal lattice *if the following properties are verified:*

1) $(L, \preceq)$ *is a bounded lattice, i.e. it has a bottom* $(\bot)$ *and a top* $(\top)$ *element;*
2) $(\&_i, \leftarrow_i)$ *is an adjoint pair in* $(L, \preceq)$*, for* $i \in \{1, \ldots, n\}$*;*
3) $\top \&_i \vartheta = \vartheta \&_i \top = \vartheta$*, for all* $\vartheta \in L$ *and* $i \in \{1, \ldots, n\}$*.*
4) $\neg$ *is a negation operator, that is, a decreasing mapping* $\neg\colon L \to L$ *satisfying the equalities* $\neg(\bot) = \top$ *and* $\neg(\top) = \bot$*.*

A multi-adjoint normal logic program is defined from a multi-adjoint normal lattice as a set of weighted rules.

Definition 2. *Let* $(L, \preceq, \leftarrow_1, \&_1, \ldots, \leftarrow_n, \&_n, \neg)$ *be a multi-adjoint normal lattice. A multi-adjoint normal logic program (MANLP)* $\mathbb{P}$ *is a finite set of weighted rules of the form:*

$$\langle p \leftarrow_i @[p_1, \ldots, p_m, \neg p_{m+1}, \ldots, \neg p_n]; \vartheta \rangle$$

where $i \in \{1, \ldots, n\}$*,* $@$ *is an aggregator operator,* ϑ *is an element of* L *and* $p, p_1, \ldots, p_n$ *are propositional symbols such that* $p_j \neq p_k$*, for all* $j, k \in \{1, \ldots, n\}$*, with* $j \neq k$*.*

Let $\mathbb{P}$ be a MANLP and $\Pi_{\mathbb{P}}$ the set of propositional symbols in $\mathbb{P}$. Then, an interpretation is any mapping $I\colon \Pi_{\mathbb{P}} \to L$. We will say that an interpretation I satisfies a rule in $\mathbb{P}$ of the form $\langle p \leftarrow_i @[p_1, \ldots, p_m, \neg p_{m+1}, \ldots, \neg p_n]; \vartheta\rangle$ if and only if its evaluation under I is greater or equal than the confidence factor associated with the rule, that is:

$$\vartheta \preceq \hat{I}\,(p \leftarrow_i @[p_1, \ldots, p_m, \neg p_{m+1}, \ldots, \neg p_n])$$

A model is an interpretation that satisfies all rules in $\mathbb{P}$. As it was stated previously, the semantics of MANLPs is based on stable models. The notion of stable model is closely related to the notion of reduct given by Gelfond and Lifchitz [4]. Now, we will define the notion of reduct for MANLPs.

Given a MANLP $\mathbb{P}$ and an interpretation I, we build the reduct of $\mathbb{P}$ with respect to I, denoted by $\mathbb{P}_I$, by substituting each rule in $\mathbb{P}$ of the form

$$\langle p \leftarrow_i @[p_1, \ldots, p_m, \neg p_{m+1}, \ldots, \neg p_n]; \vartheta\rangle$$

by the rule

$$\langle p \leftarrow_i @_I[p_1, \ldots, p_m]; \vartheta\rangle$$

where the operator $\dot{@}_I\colon L^m \to L$ is defined as

$$\dot{@}_I[\vartheta_1, \ldots, \vartheta_m] = \dot{@}[\vartheta_1, \ldots, \vartheta_m, \dot{\neg} I(p_{m+1}), \ldots, \dot{\neg} I(p_n)]$$

for all $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_m \in L$.

Definition 3. *Given a MANLP $\mathbb{P}$ and an L-interpretation I, we say that I is a* stable model *of $\mathbb{P}$ if and only if I is a minimal model of $\mathbb{P}_I$.*

III. On the existence and unicity of stable models

After introducing the main notions associated with the syntax and semantics of multi-adjoint normal logic programs, sufficient conditions which ensure the existence and the uniqueness of stable models will be provided.

First of all, we will show that any MANLP defined on a non-empty convex compact set in an euclidean space has at least a stable model, whenever the operators appearing in the MANLP are continuous operators. Formally:

Theorem 4. *Let $(K, \preceq, \leftarrow_1, \&_1, \ldots, \leftarrow_n, \&_n, \neg)$ be a multi-adjoint normal lattice where K is a non-empty convex compact set in an euclidean space and $\mathbb{P}$ be a finite MANLP defined on this lattice. If $\&_1, \ldots, \&_n$, $\neg$ and the aggregator operators in the body of the rules of $\mathbb{P}$ are continuous operators, then $\mathbb{P}$ has at least a stable model.*

As far as the uniqueness of stable models is concerned, a special algebraic structure is considered and sufficient conditions from which we can ensure the unicity of stable models for multi-adjoint normal logic programs defined on the set of subintervals of $[0,1] \times [0,1]$, denoted by $\mathcal{C}([0,1])$, are given. The considered algebraic structure is mainly composed by conjunctions defined as

$$\&^{\alpha\gamma}_{\beta\delta}([a,b],[c,d]) = [\, a^{\alpha} * c^{\gamma},\, b^{\beta} * d^{\delta}\,]$$

with $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, together with their residuated implications [8].

Theorem 5. *Let $\mathbb{P}$ be a finite MANLP defined on $(\mathcal{C}([0,1]), \leq, \leftarrow^{\alpha_1\gamma_1}_{\beta_1\delta_1}, \&^{\alpha_1\gamma_1}_{\beta_1\delta_1}, \ldots, \leftarrow^{\alpha_m\gamma_m}_{\beta_m\delta_m}, \&^{\alpha_m\gamma_m}_{\beta_m\delta_m}, \neg)$ such that the only possible operators in the body of the rules are $\&^{\alpha\gamma}_{\beta\delta}$, with $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$, and $[\vartheta^1_p, \vartheta^2_p] = \max\{[\vartheta^1, \vartheta^2] \mid \langle p \leftarrow^{\alpha_w\gamma_w}_{\beta_w\delta_w} \mathcal{B}; [\vartheta^1, \vartheta^2]\rangle \in \mathbb{P}\}$. If the inequality*

$$\sum_{j=1}^{h} (\vartheta^2)^{\beta_w} \cdot \delta_w \cdot (\vartheta^2_{q_j})^{\delta_w - 1} \cdot \left(\vartheta^2_{q_1} \cdots \vartheta^2_{q_{j-1}} \cdot\ \vartheta^2_{q_{j+1}} \cdots \vartheta^2_{q_h}\right)^{\delta_w} + (\vartheta^2)^{\beta_w} \cdot \delta_w \cdot (k-h)(\vartheta^2_{q_1} \cdots \vartheta^2_{q_h})^{\delta_w} < 1$$

holds for every rule $\langle p \leftarrow^{\alpha_w\gamma_w}_{\beta_w\delta_w} q_1 * \cdots * q_h * \neg q_{h+1} * \cdots * \neg q_k; [\vartheta^1, \vartheta^2]\rangle \in \mathbb{P}$, with $w \in \{1, \ldots, m\}$, then there exists a unique stable model of $\mathbb{P}$.

IV. Conclusions and future work

The philosophy of the multi-adjoint paradigm has been considered in order to define the syntax and semantics of a novel and flexible logic programming framework with negation. Moreover, we have shown under what conditions the existence and the unicity of stable models in multi-adjoint normal logic programs are guaranteed.

As a future work, we are interested in applying the obtained results to other logics with negation operators.

References

[1] M. E. Cornejo, D. Lobo, and J. Medina. Syntax and semantics of multi-adjoint normal logic programming. *Fuzzy Sets and Systems*, 345:41 – 62, 2018.

[2] M. Fitting. The family of stable models. *The Journal of Logic Programming*, 17(2-4):197–225, 1993.

[3] A. V. Gelder, K. A. Ross, and J. S. Schlipf. The well-founded semantics for general logic programs. *Journal of the ACM*, 38(3):619–649, jul 1991.

[4] M. Gelfond and V. Lifschitz. The stable model semantics for logic programming. In *Logic Programming, Proceedings of the Fifth International Conference and Symposium, Seattle, Washington, August 15-19, 1988 (2 Volumes)*, pages 1070–1080. MIT Press, 1988.

[5] M. Gelfond and V. Lifschitz. Classical negation in logic programs and disjunctive databases. *New Generation Computing*, 9(3-4):365–385, aug 1991.

[6] Y. Loyer and U. Straccia. Epistemic foundation of stable model semantics. *Journal of Theory and Practice of Logic Programming*, pages 355–393, 2006.

[7] N. Madrid and M. Ojeda-Aciego. On the existence and unicity of stable models in normal residuated logic programs. *International Journal of Computer Mathematics*, 89(3):310–324, feb 2012.

[8] J. Medina. Adjoint pairs on interval-valued fuzzy sets. In E. Hüllermeier, R. Kruse, and F. Hoffmann, editors, *Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems*, volume 81 of *Communications in Computer and Information Science*, pages 430–439. Springer, 2010.

[9] J. Medina, M. Ojeda-Aciego, and P. Vojtáš. Multi-adjoint logic programming with continuous semantics. In *Logic Programming and Non-Monotonic Reasoning, LPNMR'01*, pages 351–364. Lecture Notes in Artificial Intelligence 2173, 2001.

[10] T. Przymusinski. Well-founded semantics coincides with three-valued stable semantics. *Fundamenta Informaticae 13*, pages 445–463, 1990.

[11] U. Straccia. Query answering in normal logic programs under uncertainty. *Lect. Notes in Computer Science*, 3571:687–700, 2005.

[12] U. Straccia. Query answering under the any-world assumption for normal logic programs. *Lect. Notes in Computer Science*, 3571:687–700, 2006.

[13] U. Straccia. A top-down query answering procedure for normal logic programs under the any-world assumption. *Proc. of the 10th Intl Conf on Principles of Knowledge Representation*, pages 329–339, 2006.

Galois connections between a fuzzy preordered structure and a general fuzzy structure

I.P. Cabrera, P. Cordero, F. García-Pardo, M. Ojeda-Aciego
Depto. de Matemática Aplicada
Universidad de Málaga, Spain
Email: aciego@uma.es

B. De Baets
Dept of Mathematical Modelling,
Statistics and Bioinformatics
Ghent University, Belgium

***Abstract*—Key work presentation based on the paper of the same title published in *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 26(3):1274-1287, 2018.**

Extended abstract

Galois connections (both in isotone and in antitone forms) can be found in different areas, and it is common to find papers dealing with them either from a practical or a theoretical point of view. In the literature, one can find numerous papers on theoretical developments on (fuzzy) Galois connections [1], [19], [21] and also on applications thereof [13], [14], [22], [25], [28], [30], [33]. One important specific field of application is that of (Fuzzy) Mathematical Morphology, in which the (fuzzy) erosion and dilation operations are known to form a Galois connection, consider [6], [11], [20], [31], [32]; another important source of applications of Galois connections is within the field of (Fuzzy) Formal Concept Analysis, in which the concept-forming operators form either an antitone or isotone Galois connection (depending on the specific definition); in this research direction, one still can find recent papers on the theoretical background of the discipline [2]–[4], [8], [24], [29] and a number of applications [10], [26], [27].

Concerning the generalization of Galois connections to the fuzzy case, to the best of our knowledge, after the initial approach by Bělohlávek [1], a number of authors have introduced different approaches to so-called fuzzy (isotone or antitone) Galois connections; see [5], [14], [15], [19], [21], [23], [34]. It is remarkable that the mappings forming the Galois connection in all the above-mentioned approaches are crisp rather than fuzzy. In our opinion the term 'fuzzy Galois connection' should be reserved for the case in which the involved mappings are actually fuzzy mappings, and that is why we prefer to stick to the term 'Galois connection' rather than 'fuzzy Galois connection', notwithstanding the fact that we are working in the context of fuzzy structures.

In previous works, some of the authors have studied the problem of constructing a right adjoint (or residual mapping) associated to a given mapping $f\colon \mathbb{A} \to B$ where $\mathbb{A}$ is endowed with some order-like structure and B is unstructured: in [18], we consider $\mathbb{A}$ to be a crisp partially (pre)ordered set $\langle A, \leq_A \rangle$; later, in [7], we considered $\mathbb{A}$ to be a fuzzy preposet $\langle A, \rho_A \rangle$.

In this paper, we consider the case in which there are two underlying fuzzy equivalence relations in both the domain and the codomain of the mapping f, more specifically, f is a *morphism* between the *fuzzy structures* $\langle A, \approx_A \rangle$ and $\langle B, \approx_B \rangle$ where, in addition, $\langle A, \approx_A \rangle$ has a fuzzy preordering relation ρ_A. Firstly, we have to characterize when it is possible to endow B with the adequate structure (namely, enrich it to a fuzzy pre-ordered structure) and, then, construct a mapping g from B to A compatible with the fuzzy equivalence relations such that the pair (f, g) forms a Galois connection.

Although all the obtained results are stated in terms of the existence and construction of right adjoints (or residual mappings), they can be straightforwardly modified for the existence and construction of left adjoints (or residuated mappings). On the other hand, it is worth remarking that the construction developed in this paper can be extended to the different types of Galois connections (see [16]).

The core of the paper starts after introducing the preliminary notions on Galois connections between fuzzy preordered structures. Specifically, given a mapping $f\colon \mathbb{A} \to B$ from a fuzzy preordered structure $\mathbb{A}$ into a fuzzy structure $\langle B, \approx_B \rangle$, we characterize when it is possible to construct a fuzzy relation ρ_B that induces a suitable fuzzy preorder structure on B and such that there exists a mapping $g\colon B \to \mathbb{A}$ such that the pair (f, g) constitutes a Galois connection. In the case of existence of right adjoint, it is worth remarking that the right adjoint need not be unique since, actually, its construction is given with several of degrees of freedom, in particular for extending the fuzzy ordering from the image of f to the entire codomain. Although a convenient extension has been given, our results do not imply that every right adjoint can be constructed in this way, and there may exist other constructions that are adequate as well. This is a first topic for future work.

Then, we follow the structure of [17] where we consider a mapping $f\colon \langle A, \rho_A \rangle \to B$ (and ρ_A is a fuzzy relation satisfying reflexivity, $\otimes$-transitivity and the weakest form of antisymmetry, namely, $\rho_A(a, b) = \rho_A(b, a) = \top$ implies $a = b$, for all $a, b \in A$); a further step was given in [7] for the same case $f\colon \langle A, \rho_A \rangle \to B$, in which antisymmetry was dropped. Both cases above can be seen as fuzzy preordered structures, in the sense of this paper, just by considering the so-called symmetric kernel relation (the conjunction of $\rho_A(a, b)$ and $\rho_A(a, b)$); the relationship between these and other kinds of structures can be found in [35]. Summarizing, the problem

in [7] can be seen as constructing a right adjoint of a mapping $f\colon \langle A, \rho_A\rangle \to B$ which involves the construction of ρ_B, whereas in this paper our problem is to find a right adjoint to a mapping $f\colon \langle A, \approx_A, \rho_A\rangle \to \langle B, \approx_B\rangle$ in which the fuzzy equivalence $\approx_B$ has to be preserved; therefore, the main result in [7] is not exactly a particular case. We have considered a fuzzy mapping as a morphism $\langle A, \approx_A\rangle \to \langle B, \approx_B\rangle$ between fuzzy structures, adopting the approach of [12], while our long-term goal is to study fuzzy Galois connections constituted of truly fuzzy mappings.

In a few words, our approach is based on the canonical decomposition of Galois connections in our framework, followed by an analysis of conditions for the existence of the right adjoint. As a consequence of the canonical decomposition, we propose a two-step procedure for verifying the existence of the right adjoint in a constructive manner.

Conclusions and future work

Galois connections have found applications in areas such as formal concept analysis, and in mathematical morphology where, respectively, the intent and extent operators, and the erosion and the dilation operations are required to form a Galois connection. The results presented in this work pave the way to build specific settings of mathematical morphology parameterized by a fixed candidate to be an erosion (or dilation) operator; and the same approach would also apply to the development of new settings of formal concept analysis. In general, the construction of new Galois connections is of interest in fields in which there are two approaches to certain reality and one has more information about one of them, since the existence of a Galois connection allows to retrieve the unknown information in the other approach. In this respect, we will explore the application of the obtained results in the area of compression of data (images, etc.) in which the existence of the right adjoint of a given compressing mapping might allow to recover as much information as possible.

Last but not least, it is worth to study the two following extensions: on the one hand, we could consider an even more general notion of fuzzy mapping, for instance that proposed in [9]; on the other hand, we could consider $\mathbb{L}$-valued sets as a suitable generalization of our fuzzy structures.

References

[1] R. Bělohlávek. Fuzzy Galois connections. *Mathematical Logic Quarterly*, 45(4):497–504, 1999.

[2] R. Bělohlávek, B. De Baets and J. Konecny, Granularity of attributes in formal concept analysis, *Information Sciences*, 260:149–170, 2014.

[3] R. Bělohlávek, B. De Baets, J. Outrata and V. Vychodil. Characterizing trees in concept lattices, *Int. J. of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 16:1–15, 2008.

[4] R. Bělohlávek, B. De Baets, J. Outrata and V. Vychodil, Inducing decision trees via concept lattices, *Int. J. of General Systems*, 38:455–467, 2009.

[5] R. Bělohlávek and P. Osička. Triadic fuzzy Galois connections as ordinary connections. *Fuzzy Sets and Systems*, 249:83–99, 2014.

[6] I. Bloch. Fuzzy sets for image processing and understanding, *Fuzzy Sets and Systems*, 281:280–291, 2015.

[7] I.P. Cabrera, P. Cordero, F. García-Pardo, M. Ojeda-Aciego, and B. De Baets. On the construction of adjunctions between a fuzzy preposet and an unstructured set. *Fuzzy Sets and Systems*, 320:81–92, 2017

[8] G. Ciobanu and C. Vaideanu. Similarity relations in fuzzy attribute-oriented concept lattices. *Fuzzy Sets and Systems*, 275:88–109, 2015.

[9] M. Ćirić, J. Ignjatović and S. Bogdanović. Uniform fuzzy relations and fuzzy functions. *Fuzzy Sets and Systems*, 160:1054–1081, 2009.

[10] P. Cordero, M. Enciso, A. Mora, M. Ojeda-Aciego, and C. Rossi. Knowledge discovery in social networks by using a logic-based treatment of implications. *Knowledge-Based Systems*, 87:16–25, 2015.

[11] B. De Baets, E. Kerre and M. Gupta. The fundamentals of fuzzy mathematical morphology. Part 1: Basic concepts, *Int. J. of General Systems*, 23:155–171, 1994.

[12] M. Demirci. A theory of vague lattices based on many-valued equivalence relations—I: general representation results. *Fuzzy Sets and Systems*, 151:437–472, 2005.

[13] K. Denecke, M. Erné, and S. L. Wismath. *Galois Connections and Applications*, Kluwer Academic Publishers, 2004.

[14] Y. Djouadi and H. Prade. Interval-valued fuzzy Galois connections: Algebraic requirements and concept lattice construction. *Fundamenta Informaticae*, 99(2):169–186, 2010.

[15] A. Frascella. Fuzzy Galois connections under weak conditions. *Fuzzy Sets and Systems*, 172(1):33–50, 2011.

[16] F. García-Pardo, I.P. Cabrera, P. Cordero, and M. Ojeda-Aciego. On Galois connections and soft computing. *Lect. Notes in Computer Science*, 7903:224–235, 2013.

[17] F. García-Pardo, I.P. Cabrera, P. Cordero, and M. Ojeda-Aciego. On the construction of fuzzy Galois connections. In *Proc. of the XVII Spanish Conf. on Fuzzy Logic and Technology*, 99–102, 2014.

[18] F. García-Pardo, I.P. Cabrera, P. Cordero, M. Ojeda-Aciego and F.J. Rodríguez. On the definition of suitable orderings to generate adjunctions over an unstructured codomain. *Information Sciences*, 286:173-187, 2014.

[19] G. Georgescu and A. Popescu. Non-commutative fuzzy Galois connections. *Soft Computing*, 7(7):458–467, 2003.

[20] M. González-Hidalgo, S. Massanet, A. Mir and D. Ruiz-Aguilera. A fuzzy morphological hit-or-miss transform for grey-level images: A new approach. *Fuzzy Sets and Systems*, 286:30–65, 2016.

[21] J. Gutiérrez-García, I. Mardones-Pérez, M. A. de Prada-Vicente, and D. Zhang. Fuzzy Galois connections categorically. *Mathematical Logic Quarterly*, 56(2):131–147, 2010.

[22] J. Järvinen. Pawlak's information systems in terms of Galois connections and functional dependencies. *Fund. Informaticae*, 75:315–330, 2007.

[23] J. Konecny. Isotone fuzzy Galois connections with hedges. *Information Sciences*, 181(10):1804–1817, 2011.

[24] J. Konecny and M. Krupka. Block relations in formal fuzzy concept analysis. *Intl. J. of Approximate Reasoning*, 73:27–55, 2016.

[25] S. Kuznetsov. Galois connections in data analysis: Contributions from the Soviet era and modern Russian research. *Lect. Notes in Computer Science*, 3626:196–225, 2005.

[26] S.-T. Li and F.-C. Tsai. A fuzzy conceptualization model for text mining with application in opinion polarity classification. *Knowledge-Based Systems*, 39:23–33, 2013.

[27] T. Martin and A. Majidian. Finding fuzzy concepts for creative knowledge discovery. *Intl. J. of Intelligent Systems*, 28(1):93–114, 2013.

[28] S.-C. Mu and J. Oliveira. Programming from Galois connections. *J. of Logic and Algebraic Programming*, 81(6):680–704, 2012.

[29] J. Pócs. Note on generating fuzzy concept lattices via Galois connections. *Information Sciences*, 185(1):128–136, 2012.

[30] J. Propp. A Galois connection in the social network. *Mathematics Magazine*, 85(1):34–36, 2012.

[31] Y. Shi, M. Nachtegael, D. Ruan and E. Kerre. Fuzzy adjunctions and fuzzy morphological operations based on implications, *Intl. J. of Intelligent Systems*, 24(12):1280–1296, 2009.

[32] P. Sussner. Lattice fuzzy transforms from the perspective of mathematical morphology, *Fuzzy Sets and Systems*, 288:115–128, 2016.

[33] M. Wolski. Galois connections and data analysis. *Fundamenta Informaticae*, 60:401–415, 2004.

[34] W. Yao and L.-X. Lu. Fuzzy Galois connections on fuzzy posets. *Mathematical Logic Quarterly*, 55(1):105–112, 2009.

[35] W. Yao. Quantitative domains via fuzzy sets. Part I: Continuity of fuzzy directed complete posets. *Fuzzy Sets and Systems*, 161:973–987, 2010.

Operations between fuzzy multisets

Ángel Riesgo
Dept. of Statistics and O.R.
University of Oviedo
Oviedo, Spain
ariesgo@yahoo.com

Pedro Alonso
Dept. of Mathematics
University of Oviedo
Gijón, Spain
palonso@uniovi.es

Irene Díaz
Dept. of Informatics
University of Oviedo
Oviedo, Spain
sirene@uniovi.es

Susana Montes
Dept. of Statistics and O.R.
University of Oviedo
Oviedo, Spain
montes@uniovi.es

***Abstract*—For fuzzy multisets the membership values are multisets in $[0,1]$. These sets are a mathematically generalization of the hesitant fuzzy sets, but in this general environment, the information about repetition is not lost, so that, the opinions given by the experts are better managed. Moreover, the order of the different opinions is also considered and this information is not lost either. In particular, we have studied in detail the basic operations for these sets: complement, union and intersection.**

***Index Terms*—fuzzy multiset, complement, aggregated union, aggregated intersection.**

I. Introduction

Fuzzy sets where introduced by Lotfi A. Zadeh (see [7]) as a way to deal with real-life situations where there is either limited knowledge or some sort of implicit ambiguity about whether an element should be considered a member of a set. Thus, the membership degree for any element is a value in the real interval $[0,1]$. However, it could be paradoxical that the membership value itself should be one precise real number. Then, different generalizations appeared as a way to solve this paradox. In that cases, the membership degree could be, for example, an interval (interval-valued fuzzy sets [2]), a function (type-2 fuzzy sets [2]) or an arbitrary subsets of $[0,1]$ (hesitant fuzzy sets [5]). When the subsets are finite, the hesitant fuzzy sets are called typical hesitant fuzzy sets and they are the ones that have attracted the most attention from researchers ([1], [3], [6]). However, for hesitant fuzzy sets the order of the elements in the set is not important and moreover, the repetition are not allowed. Clearly, this could be an important drawback. In fact, the need to account for repeated membership values has been recognised in the literature about hesitant fuzzy sets and, in fact, multiset-based hesitant fuzzy sets were already mentioned in the original paper that introduced the hesitant fuzzy sets [5]. Thus, fuzzy multisets can be considered as an appropriate tool to deal with repetitions. In that case, the membership degree is a multiset in the $[0,1]$ interval. But despite the similarities, we cannot regard the typical hesitant fuzzy sets as a particular case of the fuzzy multisets and neither can we identify the fuzzy multisets with the multiset-based hesitant fuzzy sets because the definitions for the intersection and union are different in each theory. In [4] we have established the appropriate mathematical definitions for the main operations for fuzzy multisets and show how the hesitant theory definitions can be worked out from an extension of the fuzzy multiset definitions. The main concepts and results obtained in [4] are summarized in the next two sections.

This work was partially supported by the Spanish Ministry of Science and Technology under projects TIN2014-59543-P and TIN-2017-87600-P.

II. Fuzzy multisets

As we mentioned in the introduction, the values that make up a hesitant element in a hesitant fuzzy set are typically the result of applying several criteria on membership. In a common use case, it is assumed that there are a number of "experts" or "decision-makers" for a hesitant fuzzy set who produce a membership value for each element in the universe. A problem with the hesitant fuzzy sets in the experts' model is that the information about repetition is lost. For example, if there are five experts and four of them assign a membership value of 0.1 to an element whereas the fifth expert assigns the value 0.2, the hesitant element will be $\{0.1, 0.2\}$, regardless of the fact that 0.1 was four times more popular among the experts. This information loss can be avoided by using fuzzy multisets [3] (also called fuzzy bags [6]), which we are going to discuss now.

Definition 2.1: [3] Let X be the universe. A fuzzy multiset $\hat{A}$ over X is characterized by a function $\hat{A}\colon X \to \mathbb{N}^{[0,1]}$. The family of all the fuzzy multisets over X is called the fuzzy power multiset over X and is denoted by $\mathscr{FM}(X)$.

Example 2.2: Say we have a single-element universe $X = \{x\}$. We can define a fuzzy multiset $\hat{A}$ as $\hat{A}(x) = \langle 0.1, 0.2, 0.2\rangle$ in angular-bracket notation. Or in other words, using Definition 2.1, the element x is being mapped into a function $Count_{\hat{A}(x)}\colon [0,1] \to \mathbb{N}$ defined as $Count_{\hat{A}(x)}(0.1) = 1$, $Count_{\hat{A}(x)}(0.2) = 2$ and $Count_{\hat{A}(x)}(t) = 0$ for any $t \neq 0.1$ and $t \neq 0.2$. This function $Count_{\hat{A}(x)}$ characterizes a crisp multiset for any x in X.

III. Operations between fuzzy multisets

The complement for the fuzzy multisets is quite intuitive.

Definition 3.1: [3] Let X be a universe and let $\hat{A} \in \mathscr{FM}(X)$ be a fuzzy multiset. The complement of $\hat{A}$ is the fuzzy multiset $\hat{A}^c$ defined by the following count function:

$$Count_{\hat{A}^c(x)}(t) = Count_{\hat{A}(x)}(1-t), \quad \forall x \in X, \quad \forall t \in [0,1]$$

where $Count : M :\to \mathbb{N}$ mapping each element of the universe to a natural number (including 0).

Example 3.2: If we have a two-element universe $X = \{x, y\}$, then a fuzzy multiset $\hat{A}$ with $\hat{A}(x) = \langle 0.3 \rangle$ and $\hat{A}(y) = \langle 0.5, 0.8, 0.8 \rangle$ has the complement

$$Count_{\hat{A}^c(x)}(t) = \begin{cases} 1, & \text{if } t = 0.7, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$Count_{\hat{A}^c(y)}(t) = \begin{cases} 1, & \text{if } t = 0.5, \\ 2, & \text{if } t = 0.2, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

that is, $\hat{A}^c(x) = \langle 0.7 \rangle$ and $\hat{A}(y) = \langle 0.5, 0.2, 0.2 \rangle$.

By taking the multiset union of all the combinations, we can define what we will call the aggregated intersection and union of two fuzzy multisets, which do not privilege any particular ordering.

Definition 3.3: Let X be a universe and let $\hat{A}, \hat{B} \in \mathscr{FM}(X)$ be two fuzzy multisets. The aggregated intersection of $\hat{A}$ and $\hat{B}$ is a fuzzy multiset $\hat{A} \cap^a \hat{B}$ such that for any element $x \in X$, $\hat{A} \cap^a \hat{B}(x)$ is the union, in the crisp multiset sense, of the regularised (s_A, s_B)-ordered intersections for all the possible pairs of ordering strategies (s_A, s_B), that is,

$$\hat{A} \cap^a \hat{B}(x) = \bigcup_{\substack{s_{\hat{A}} \in \mathcal{OS}(\hat{A}^r) \\ s_{\hat{B}} \in \mathcal{OS}(\hat{B}^r)}} \hat{A} \cap^r_{(s_A, s_B)} \hat{B}(x), \quad \forall x \in X.$$

Definition 3.4: Let X be a universe and let $\hat{A}, \hat{B} \in \mathscr{FM}(X)$ be two fuzzy multisets. The aggregated union of $\hat{A}$ and $\hat{B}$ is a fuzzy multiset $\hat{A} \cup^a \hat{B}$ such that for any element $x \in X$, $\hat{A} \cup^a \hat{B}(x)$ is the union, in the crisp multiset sense, of the regularised (s_A, s_B)-ordered unions for all the possible pairs of ordering strategies (s_A, s_B), that is,

$$\hat{A} \cup^a \hat{B}(x) = \bigcup_{\substack{s_{\hat{A}} \in \mathcal{OS}(\hat{A}^r) \\ s_{\hat{B}} \in \mathcal{OS}(\hat{B}^r)}} \hat{A} \cup^r_{(s_A, s_B)} \hat{B}(x), \quad \forall x \in X.$$

Example 3.5: For two fuzzy multisets $\hat{E}(x) = \langle 0.1, 0.4 \rangle$ and $\hat{F}(x) = \langle 0.2, 0.3 \rangle$, the Miyamoto intersection and union are $\hat{E} \cap \hat{F}(x) = \langle 0.1, 0.3 \rangle$ and $\hat{E} \cup \hat{F}(x) = \langle 0.2, 0.4 \rangle$. In order to calculate their aggregated intersection and union, we need to first calculate the intersections and unions for all the possible ordering strategies. There are two possible ordering strategies for $\hat{E}$, resulting in the sequences $(0.1, 0.4)$ and $(0.4, 0.1)$, and two possible ordering strategies for $\hat{F}$, resulting in the sequences $(0.2, 0.3)$ and $(0.3, 0.2)$. This leads to the four sequences of pairwise minima, $(0.1, 0.3)$, $(0.1, 0.2)$, $(0.2, 0.1)$, $(0.3, 0.1)$, which result in two ordered intersections, $\langle 0.1, 0.3 \rangle$, $\langle 0.1, 0.2 \rangle$; and to the four sequences of pairwise maxima, $(0.2, 0.4)$, $(0.3, 0.4)$, $(0.4, 0.3)$, $(0.4, 0.2)$, which result in two ordered unions, $\langle 0.2, 0.4 \rangle$, $\langle 0.3, 0.4 \rangle$. By taking the union, in the crisp multiset sense, we get the aggregated intersection and union: $\hat{E} \cap^a \hat{F}(x) = \langle 0.1, 0.2, 0.3 \rangle$ and $\hat{E} \cup^a \hat{F}(x) = \langle 0.2, 0.3, 0.4 \rangle$. We have found the striking result that the numeric values match those of the hesitant fuzzy set intersection and union in the previous examples, a hint that the hesitant theory is equivalent to the fuzzy multiset theory when the aggregated operations are used, as we will prove in the next section.

These definitions are coherent with the existing ones for hesitant fuzzy sets and fuzzy sets, which can be seen as particular cases of fuzzy multisets. These relations can be summed up in the following diagram:

Fuzzy sets	$\mathscr{F}(X)$	$\xrightarrow{\phi_{\text{FH}}}$	$\mathscr{FH}^1(X)$ $\bigcap$	
Hesitant fuzzy sets			$\mathscr{FH}(X)$	$\xrightarrow{\phi^{-1}_{\text{MH}}}$ $\mathscr{FM}(X)/\sim_r$ $\bigcap$
Fuzzy multisets				$\mathscr{FM}(X)$

References

[1] B. Bedregal, G. Beliakov, H. Bustince, T. Calvo, R. Mesiar, D. Paternain, "A class of fuzzy multisets with a fixed number of memberships," Information Sciences 189, 2012, pp. 1–17.

[2] G.J. Klir, B. Yuan, Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. Prentice Hall P T R, 1995.

[3] S. Miyamoto, "Fuzzy Multisets and Their Generalizations," in: C.S. Calude , G. Păun, G. Rozenberg, A. Salomaa (Eds), Multiset Processing. WMC 2000. Lecture Notes in Computer Science, Springer, Berlin, Heidelberg, 2000, pp. 225–235.

[4] A. Riesgo, P. Alonso, I. Díaz, S. Montes, "Basic operations for fuzzy multisets," International Journal of Approximate Reasoning 101, (2018), pp. 107–118.

[5] V. Torra, "Hesitant Fuzzy Sets," International Journal of Intelligent Systems 25 (6), 2010, pp. 529–539.

[6] R.R. Yager, "On the theory of Bags," International Journal of General Systems 13 (1), 1986, pp. 23–37.

[7] L.A. Zadeh, "Fuzzy Sets," Information Control 8 (3), 1965, pp. 338–353.

Un marco semántico general para la Lógica de Simplificación

Pablo Cordero, Manuel Enciso, Angel Mora
Universidad de Málaga,
Andalucía Tech.
Málaga, Spain
{pcordero,enciso}@uma.es, amora@ctima.uma.es

Vilem Vychodil
Dept. Computer Science
Palacky University Olomouc
Olomouc, Czechia
vilem.vychodil@upol.cz

***Resumen*—Presentamos una generalización de la Lógica de Simplificación para el razonamiento con reglas "si-entonces" sobre atributos difusos. Las implicaciones y la lógica propuesta están parametrizadas por sistemas de conexiones de Galois isótonas que permiten manejar diferentes interpretaciones de dependencias entre datos. Describimos la semántica de las reglas y el sistema axiomático de la lógica.**

***Index Terms*—Teoría de retículos, lógica difusa, implicaciones**

I. Parametrizaciones por Conexiones de Galois Isótonas

En este trabajo resumimos el presentado en [9] que se enmarca dentro del Análisis Formal de Conceptos (AFC) [1] en su versión difusa. Ésta considera un retículo completo residuado $\mathbb{L}$ y define un $\mathbb{L}$-contexto como una terna $\mathbf{I} = \langle X, Y, I\rangle$ donde X e Y son conjuntos no vacíos de objetos y atributos respectivamente e I es una $\mathbb{L}$-relación difusa de X en Y. Para cada objeto $x \in X$, se considera el conjunto difuso $I_x \in L^Y$ tal que $I_x(y) = I(x, y)$ para todo $y \in Y$. Una implicación de atributos es una expresión $A \Rightarrow B$ donde $A, B \in L^Y$ y se dice que el contexto $\mathbf{I}$ la satisface si $A \subseteq I_x$ implica $B \subseteq I_x$ para todo $x \in X$.

Nuestra propuesta explora sistemas de inferencia generales para razonar con implicaciones entre atributos difusos. Tomamos como punto de partida la generalización presentada en [3], donde el autor considera, como parámetros, un conjunto S de conexiones de Galois isotonas que es cerrado bajo composición y contiene a la identidad. Propone una axiomatización completa basada en los Axiomas de Armstrong. En este marco general, una implicación $A \Rightarrow B$ es cierta en I_x si, para todo $\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}\rangle \in S$, se cumple que $\boldsymbol{f}(A) \subseteq I_x$ implica $\boldsymbol{f}(B) \subseteq I_x$.

Como alternativa a los bien conocidos Axiomas de Armstong [7], en [8] los autores propusieron una Lógica de Simplificación y nuevos métodos para la manipulación automática de implicaciones [10], [11]. Posteriormente, en [4], se propuso la lógica *FASL (Fuzzy Attribute Simplification Logic)* para implicaciones de atributos con grados y parametrizados por *"hedges"*.

En este resumen mostramos una generalización de la Lógica de Simplificación, equivalente a la citada [3], para implicaciones con grados cuya semántica está parametrizada por conexiones de Galois isótonas.

Supported by Grants TIN2014-59471-P and TIN2017-89023-P. V. Vychodil was also supported the project no. CZ.1.07/2.3.00/20.0059.

II. Marco teórico

En este marco general, consideramos, como estructura para los grados, un retículo co-residuado completo, es decir, un álgebra $\mathbb{L} = \langle L, \leq, \oplus, \ominus, 0, 1\rangle$ satisfaciendo las siguientes condiciones:

- $\langle L, \leq, 0, 1\rangle$ es un retículo completo donde 0 es el mínimo y 1 es el máximo. Como es usual, usamos los símbolos $\vee$ y $\wedge$ para denotar respectivamente supremo e ínfimo.
- $\langle L, \oplus, 0\rangle$ es un monoide conmutativo.
- El par $\langle \oplus, \ominus\rangle$ satisface la siguiente propiedad de adjunción: para todo $a, b, c \in L$,

$$a \leq b \oplus c \quad \text{si y solo si} \quad a \ominus b \leq c. \tag{1}$$

L^Y denota el conjunto de todos los $\mathbb{L}$-conjuntos difusos en el universo Y. Las operaciones en $\mathbb{L}$ se extienden elemento a elemento a los $\mathbb{L}$-conjuntos difusos en la forma habitual: Para $A, B \in L^Y$ los $\mathbb{L}$-conjuntos difusos $A \oplus B$ and $A \ominus B$ se definen como $(A \oplus B)(y) = A(y) \oplus B(y)$ y $(A \ominus B)(y) = A(y) \ominus B(y)$ para todo $y \in Y$.

Las parametrizaciones [3] que se usan en nuestra propuesta se definen en términos de conexiones de Galois isótonas en $\langle L^Y, \subseteq\rangle$. En particular, consideramos pares $\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}\rangle$ donde $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}\colon L^Y \to L^Y$ son tales que, para todo $A, B \in L^Y$,

$$\boldsymbol{f}(A) \subseteq B \quad \text{si y solo si} \quad A \subseteq \boldsymbol{g}(B). \tag{2}$$

Es bien conocido que esta definición es equivalente a pedir que ambas funciones sean isótonas, que $\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}$ se inflacionaria y que $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}$ sea deflacionaria. Como consecuencia, $\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}$ es un *operador de cierre* y $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}$ es un *operador de núcleo* (*operador interior*).

Además, para cualquier isomorfismo $\boldsymbol{f}$ in $\langle L^Y, \subseteq\rangle$, el par $\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}^{-1}\rangle$ es una conexión de Galois isótona y, en particular, la función identidad $\boldsymbol{I}_Y\colon L^Y \to L^Y$ lo es. Otro ejemplo interesante es $\langle \mathbf{0}_Y, \mathbf{1}_Y\rangle$ donde $\mathbf{0}_Y(A)(y) = 0$ y $\mathbf{1}_Y(A)(y) = 1$, para cualquier $A \in L^Y$ e $y \in Y$.

Por último, dadas dos conexiones de Galois isótonas $\langle \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{g}_1\rangle$ y $\langle \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{g}_2\rangle$, su *composición* $\langle \boldsymbol{f}_1 \circ \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{g}_2 \circ \boldsymbol{g}_1\rangle$ es también una conexión de Galois.

Definición 1 ([3]): Una familia de conexiones de Galois isótonas S in $\langle L^Y, \subseteq\rangle$ es una $\mathbb{L}$-parametrización si $\mathbb{S} = \langle S, \circ, \langle \boldsymbol{I}_Y, \boldsymbol{I}_Y\rangle\rangle$ es un monoide. En otras palabras, si S es es cerrada para la composición y contiene a la identidad.

III. Lógica de Simplificación Parametrizada

Dado un *alfabeto* Y no vacío, cuyos elementos se denominan *atributos*, el conjunto de fórmulas bien formadas del lenguaje es:

$$\mathcal{L}_Y = \{A \Rightarrow B \mid A, B \in L^Y\}.$$

Las fórmulas del lenguaje se denominan *implicaciones* y para cada implicación, la primera y segunda componente se denomina *premisa* y *conclusion* respectivamente. Finalmente, los conjuntos de implicaciones $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$ se denominan *teorías*.

Sobre este lenguaje, definimos la Lógica de Simplificación presentando la semántica y un sistema axiomático. Finalmente, en la publicación de referencia del presente resumen [9], se prueba que la visión semántica y sintáctica coinciden, probando la corrección y completitud de la lógica propuesta.

Antes de definir la interpretación de las fórmulas, introducimos el concepto de $\mathbb{L}$-conjuntos difusos S-aditivos que juegan un papel fundamental en los modelos.

Definición 2: Sea Y un conjunto no vacío y S una $\mathbb{L}$-parametrización. Un $\mathbb{L}$-conjunto difuso $A \in L^Y$ se dice *S-aditivo* si, para todo $B, C \in L^Y$ y $\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}\rangle \in S$,

$$\boldsymbol{f}(B) \subseteq A \text{ y } \boldsymbol{f}(C) \subseteq A \text{ implica } \boldsymbol{f}(B \oplus C) \subseteq A.$$

La proposición siguiente es directa a partir de la Defnición 2 y (2).

Proposición 1: Sea Y un conjunto no vacío y S una $\mathbb{L}$-parametrización. Un $\mathbb{L}$-conjunto difuso $A \in L^Y$ es S-aditivo si y solo si $\boldsymbol{g}(A) \oplus \boldsymbol{g}(A) = \boldsymbol{g}(A)$.

Dada una $\mathbb{L}$-parametrización S, los modelos de la lógica se definen en términos de $\mathbb{L}$-conjuntos S-aditivos de la siguiente forma:

Definición 3: Sea $A \Rightarrow B \in \mathcal{L}_Y$. Un conjunto S-aditivo $M \in L^Y$ es un *modelo* para $A \Rightarrow B$ si, para todo $\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}\rangle \in S$, $\boldsymbol{f}(A) \subseteq M$ implica que $\boldsymbol{f}(B) \subseteq M$.

Denotamos el conjuntos de los modelos de $A \Rightarrow B$ por $\mathcal{M}od(A \Rightarrow B)$. De forma usual, el conjunto de modelos para una teoría $\Sigma \subseteq \mathcal{L}_Y$ se define como

$$\mathcal{M}od(\Sigma) = \bigcap_{A \Rightarrow B \in \Sigma} \mathcal{M}od(A \Rightarrow B).$$

Por extensión, un $\mathbb{L}$-contexto $\mathbf{I} = \langle X, Y, I\rangle$ es un modelo de $A \Rightarrow B$ cuando $\{I_x \mid x \in X\} \subseteq \mathcal{M}od(A \Rightarrow B)$.

Definición 4: Sea $A \Rightarrow B \in \mathcal{L}_Y$ y $\Sigma \subseteq \mathcal{L}_Y$. La implicación $A \Rightarrow B$ se dice *semánticamente derivada* de la teoría Σ, denotado por $\Sigma \models A \Rightarrow B$, si $\mathcal{M}od(\Sigma) \subseteq \mathcal{M}od(A \Rightarrow B)$.

Introducimos por último en el presente resumen el sistema axiomático de la lógica.

Definición 5: El sistema axiomático está formado por un esquema de axioma y tres reglas de inferencia:

Reflexividad: infiere $A \Rightarrow A$,
Composición: de $A \Rightarrow B, A \Rightarrow C$ infiere $A \Rightarrow B \oplus C$,
Simplificación: de $A \Rightarrow B, C \Rightarrow D$ infiere $A \oplus (C \ominus B) \Rightarrow D$,
Extensión: de $A \Rightarrow B$ infiere $\boldsymbol{f}(A) \Rightarrow \boldsymbol{f}(B)$.

para todo $A, B, C, D \in L^Y$ y $\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}\rangle \in S$.

Del modo habitual, se dice que una implicación $A \Rightarrow B \in \mathcal{L}_Y$ es sintácticamente derivada de (o inferida por) una teoría $\Sigma \subseteq \mathcal{L}_Y$, denotado por $\Sigma \vdash A \Rightarrow B$, si existe una secuencia $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \mathcal{L}_Y$ tal que σ_n es $A \Rightarrow B$ y, para todo $1 \leq i \leq n$, una de las siguientes condiciones se cumple:

- $\sigma_i \in \Sigma$;
- σ_i es un axioma (Reflexividad);
- σ_i se obtiene aplicando reglas de inferencia (Composición, Simplificación o Extensión) a implicaciones de $\{\sigma_j \mid 1 \leq j < i\}$.

El siguiente teorema asegura que ambos pilares de la lógica, las derivaciones semánticas y sintácticas, coinciden.

Teorema 1 (Corrección y completitud): Para cualquier implicación $A \Rightarrow B \in \mathcal{L}_Y$ y cualquier teoría $\Sigma \subseteq \mathcal{L}_Y$, las siguientes afirmaciones se cumplen:

1. $\Sigma \vdash A \Rightarrow B$ implica $\Sigma \models A \Rightarrow B$.
2. Si L^Y es finito, $\Sigma \models A \Rightarrow B$ implica $\Sigma \vdash A \Rightarrow B$.

Referencias

[1] Ganter, B., Wille, R.: Formal Concept Analysis: Mathematical Foundations. Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA, 1st edn. (1997)

[2] Belohlavek, R.: Fuzzy Relational Systems: Foundations and Principles. Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, USA (2002)

[3] Vychodil, V.: Parameterizing the semantics of fuzzy attribute implications by systems of isotone Galois connections. IEEE Trans. on Fuzzy Systems 24, 645–660 (2016)

[4] Belohlavek, R., Cordero, P., Enciso, M., Mora, A., Vychodil, V.: Automated prover for attribute dependencies in data with grades. International Journal of Approximate Reasoning 70, 51–67 (2016)

[5] Belohlavek, R., Vychodil, V.: Attribute dependencies for data with grades I. International Journal of General Systems 45(7–8), 864–888 (2016)

[6] Belohlavek, R., Vychodil, V.: Attribute dependencies for data with grades II. International Journal of General Systems 46(1), 66–92 (2017)

[7] Armstrong, W.W.: Dependency structures of data base relationships. In: Rosenfeld, J.L., Freeman, H. (eds.) Information Processing 74: Proceedings of IFIP Congress. pp. 580–583. North Holland, Amsterdam (1974)

[8] Cordero, P., Enciso, M.M., Mora, A., de Guzmán, I.P.I., Mora, Á., Pérez de Guzman, I.: SLFD Logic: Elimination of Data Redundancy in Knowledge Representation 2527, 141–150 (2002)

[9] Cordero, P., Enciso, M., Mora, A.,Vychodil, V. : Towards Simplification Logic for Graded Attribute Implications with General Semantics. CEUR Workshop Proceedings, 2123: 129–140, 2018. Selected papers of the 14th International Conference on Concept Lattices and Their Applications. ISSN: 1613-0073. http://ceur-ws.org/Vol-2123/

[10] Lorenzo, E.R., Adaricheva, K.V., Cordero, P., Enciso, M., Mora, A.: From an Implicational System to its Corresponding D-basis. In: Proceedings of the Twelfth International Conference on Concept Lattices and Their Applications, Clermont-Ferrand, France, October 13-16, 2015. pp. 217–228 (2015)

[11] Mora, A., Cordero, P., Enciso, M., Fortes, I., Aguilera, G.: Closure via functional dependence simplification. International Journal of Computer Mathematics 89(4), 510–526 (2012)

XIX Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy (XIX ESTYLF)

ESTYLF 9: Sesión Especial: Aplicaciones de Funciones de Agregación y Pre-agregación

Organizadores:

Humberto Bustince, Tomasa Calvo,
Javier Fernández, Laura de Miguel

Condiciones de monotonía direccional: interpretación geométrica

1st Laura De Miguel
Departamento de Estadística, Informática y Matemáticas
Universidad Publica de Navarra
Pamplona, Spain
laura.demiguel@unavarra.es

2nd Mikel Sesma-Sara
Departamento de Estadística, Informática y Matemáticas
Universidad Publica de Navarra
Pamplona, Spain
mikel.sesma@unavarra.es

3rd Antonio Roldán
Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada
Granada, Spain
aroldan@ugr.es

4th Julio Lafuente,
Departamento de Estadística, Informática y Matemáticas
Universidad Publica de Navarra
Pamplona, Spain
lafuente@unavarra.es

5th Radko Mesiar
Department of Mathematics and Descriptive Geometry
Slovak University of Technology in Bratislava
Bratislava, Slovak Republic
mesiar@math.sk

6th Humberto Bustince
Departamento de Estadística, Informática y Matemáticas
Universidad Publica de Navarra
Pamplona, Spain
bustince@unavarra.es

***Abstract*—En los últimos años ha habido un gran interés en estudiar condiciones de monotonía menos restrictivas para construir nuevas familias de funciones de fusión de datos. Varias de estas condiciones son la monotonía débil, la monotonía direccional, la monotonía direccional ordenada, y la monotonía direccional ordenada reforzada. En este trabajo presentamos algunos resultados sobre las monotonías anteriores desde el punto de vista de la geometría en dos dimensiones.**

***Index Terms*—Funciones de agregación, condiciones de monotonía, geometría bidimensional**

I. Intrododucción

La cantidad de aparatos inteligentes y sensores que nos rodea ha crecido exponecialmente en los últimos años lo que conlleva que cada vez tenemos mayor volumen de datos de todo tipo y naturaleza. Debido al prácticamente inmanejable volumen de datos, la necesidad de encontrar operadores apropiados para fusionar los datos de acuerdo a la aplicación considerada es más importante cada día.

Desde sus inicios, las funciones de agregación han jugado un papel crucial en varias y diversas aplicaciones [1]–[4]. Además, dependiendo del tipo de propiedades que se impongan a las funciones de agregación (véase [5] para más información), distintas clases de funciones han sido definidas en la literatura: t-normas/t-conormas [6], uninormas [7] o funciones de solapamiento (*overlap functions*) [8], entre otras.

Este trabajo ha sido financiado por el Servicio de Investigación de la Universidad Pública de Navarra y por el proyecto TIN2016-77356-P del MINECO, AEI/FEDER, UE y por el proyecto APVV-14-0013.

La condición de monotonía impuesta a las funciones de agregación juega un papel muy importante en aplicaciones como la toma de decisión donde el aumento de un valor (que significa que un criterio o una alternativa es mejor) no debe nunca implicar un descenso de la puntuación final o utilidad. Sin embargo, en otro tipo de aplicaciones, en especial en áreas donde es frecuente la aparicion de *outliers* o datos afectados por diversos ruidos, la monotonía impuesta en cada argumento es un incoveniente en vez de una ventaja. Esto demuestra, que para algunos casos particulares de aplicación, la condición de monotonía que satisfacen las funciones de agregación, es decir, el crecimiento en cada argumento de la función puede ser demasiado restrictiva y a veces no es necesario que las funciones cumplan una condición tan fuerte para dar unos buenos resultados.

Teniendo en cuenta todas las consideraciones anteriores sobre las funciones de agregación, en la literatura reciente, encontramos diversos esfuerzos de definir y estudiar diversas condiciones de monotonía menos restrictivas. La monotonía débil [9], la monotonía direccional [10], la monotonía direccional ordenada [11] y la monotonía direccional ordenada reforzada son algunos ejemplos de nuevas condiciones de monotonía que generan nuevas clases de operadores de fusión de datos. Estas nuevas nociones de monotonía han sido aplicados en diversas aplicaciones como la clasficación o procesamiento de imagen. Por ejemplo, funciones de preagregación [12], que solo satisfacen monotonías direccionales han demostrado mejorar los resultados en algunos problemas de clasificación [13], mientras que las monotonías or-

denadas direccionales han demostrado mejorar los resultados en detección de bordes [11], [14] y extracción de características [15].

Todos los trabajos en los que se introducen las distintas nociones de monotonía trabajan estos conceptos desde un punto de vista formal dentro del análisis matemático. En este trabajo, con el propósito de conseguir una mejor comprensión de las distintas condiciones, así como sus diferencias nos centramos en la interpretación geométrica de las distintas condiciones de monotonía introducidas en la literatura reciente [9]–[11], [16]. Para ello, nos centramos en el caso de las funciones 2-dimensionales, cuyo conjunto dominio es el $[0,1]^2$ (representable en el plano). Las ventajas de esta aproximación son claras, ya que nos permite descubrir gráficamente el comportamiento de cada noción de monotonía descrita en los trabajos anteriores.

El artículo está organizado como sigue. En la Sección II, recordamos las diferentes nociones de monotonía (restringidas al caso 2-dimensional) a la vez que fijamos algunas notaciones. En la Sección III, estudiamos la interpretación geométrica de las distintas nociones centrándonos en la monotonía direccional ordenada y monotonía direccional ordenada reforzada, probando algunos resultados sobre el comportamiento de estas funciones en el caso 2-dimensional. En la Sección IV, acabamos con algunas conclusiones y trabajo a futuro.

II. Condiciones de monotonía

En este trabajo nos centramos en la representación geométrica de algunas nociones de monotonía definidas en la literatura reciente. Por claridad y sencillez de los resultados nos restringimos al caso 2-dimensional, pero es importante resaltar que las definiciones originales, que podemos encontrar en los trabajos [9]–[11], [16] están introducidas para el caso n-dimensional.

Consideramos vectores $\vec{r} = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$ y puntos en el plano $x = (x_1, x_2) \in [0,1]^2$ ordenados según el orden parcial heredado de $\mathbb{R}^2$ que viene dado por $x = (x_1, x_2) \leq y = (y_1, y_2)$ si y solo si $x_1 \leq x_2$ y $y_1 \leq y_2$. Sea $S = \{\sigma_1 = (1,2), \sigma_2 = (2,1)\}$ el conjunto de permutaciones en dos dimensiones. Dados los elementos $x \in [0,1]^2$ y $\vec{r} \in \mathbb{R}^2$, el elemento x_{σ_i} representa el punto en el plano ordenado según la permutación $x_{\sigma_i} = (x_{\sigma_i(1)}, x_{\sigma_i(2)})$ mientras que $\vec{r}_{\sigma_i}$ representa el vector ordenado $\vec{r}_{\sigma_i} = (r_{\sigma_i(1)}, r_{\sigma_i(2)})$.

Las funciones de agregación son una clase de funciones de fusión a las que se les impone la condición de monotonía con respecto a cada argumento así como condiciones frontera en el 0 y en el 1. La definición de las funciones de agregación 2-dimensionales es la siguiente.

Definición 2.1: ([17], [18]) Una función $A : [0,1]^2 \to [0,1]$ se llama una función de agregación si satisface la siguientes propiedades:

- $A(0,0) = 0$
- $A(1,1) = 1$
- $A(x_1, x_2) \leq A(y_1, y_2)$ para todo par de puntos $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in [0,1]^2$ tales que $x_1 \leq y_1$ y $x_2 \leq y_2$.

Aunque las agregaciones han demostrado ser muy útiles en diversas aplicaciones, algunos operadores muy conocidos, como las medias Lehmer o la moda no cumplen las monotonía exigida a las funciones de agregación. Es por ello, que estudios recientes han intentado estudiar funciones de fusión con condiciones menos restrictivas para poder estudiar clases de funciones de fusión más generales. Algunas de estas condiciones menos restrictivas son la monotonía direccional, la monotonía direccional ordenada y la monotonía direccional ordenada reforzada. A continuación recordamos estas condiciones de monotonía para el caso de funciones 2-dimensionales.

Definición 2.2: ([9]): Una función $F\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ se dice débilmente creciente si la siguiente desigualdad se satisface

$$F(x_1 + c, x_2 + c) \geq F(x_1, x_2)$$

para todo $(x_1, x_2) \in [0,1]^2$ y $c \in [0,1]$ tal que $(x_1, x_2) + (c, c) \in [0,1]^2$.

Definición 2.3 ([10]): Sea $\vec{r} = (r_1, r_2)$ un vector real 2-dimensional distinto del nulo. Una función $F\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ se dice $\vec{r}$-creciente si para todo punto $(x_1, x_2) \in [0,1]^2$ y para todo $c > 0$ tales que $(x_1 + cr_1, x_2 + cr_2) \in [0,1]^2$ se cumple la siguiente condición

$$F(x_1 + cr_1, x_2 + cr_2) \geq F(x_1, x_2)\ .$$

Definición 2.4 ([11]): Sea $\vec{r} = (r_1, r_2)$ un vector real 2-dimensional distinto del nulo. Una función $F\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ se dice $\vec{r}$-creciente Ordenada Direccional (OD) si para todo $(x_1, x_2) \in [0,1]^2$, y para cada permutación $\sigma \in \mathcal{S}$ tal que $x_{\sigma(1)} \geq x_{\sigma(2)}$ y para cualquier $c > 0$ que cumple

$$1 \geq x_{\sigma(1)} + cr_1 \geq x_{\sigma(2)} + cr_2 \geq 0, \tag{1}$$

se cumple que

$$F(x_1 + cr_{\sigma^{-1}(1)}, x_2 + cr_{\sigma^{-1}(2)}) \geq F(x_1, x_2).$$

Definición 2.5 ([16]): Sea $\vec{r} = (r_1, r_2)$ un vector real 2-dimensional distinto del nulo. Una función $F\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ se dice $\vec{r}$-creciente ordenada direccional reforzada (SOD, del inglés *Strengthened Ordered Directional*) si para todo $(x_1, x_2) \in [0,1]^2$, y para cada permutación $\sigma \in \mathcal{S}$ tal que $x_{\sigma(1)} \geq x_{\sigma(2)}$ y para cualquier $c > 0$ que cumple $(x_{\sigma(1)} + cr_1, x_{\sigma(2)} + cr_2) \in [0,1]^2$, se satisface la siguiente inecuación

$$F(x_1 + cr_{\sigma^{-1}(1)}, x_2 + cr_{\sigma^{-1}(2)}) \geq F(x_1, x_2),$$

Si una función F es $\vec{r}$-creciente SOD, entonces F es también $\vec{r}$-creciente OD. El contrario no se cumple en general. Sin embargo, si el vector $\vec{r}$ satisface $r_1 \geq r_2$, entonces ambas definiciones son equivalentes.

Nótese que por sencillez solo nos hemos referido a las condiciones de crecimiento, pero condiciones similares pueden ser introducidas para el decrecimiento de las funciones.

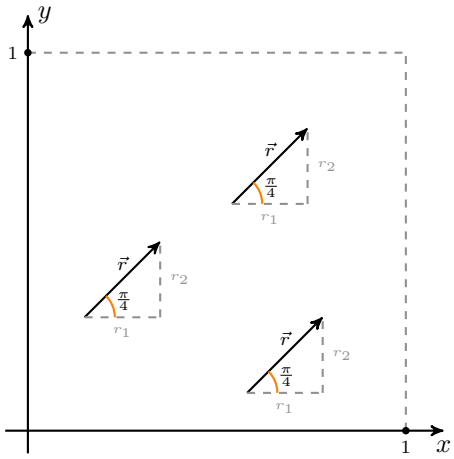


Fig. 1. Ejemplo de la dirección de una función débilmente creciente.

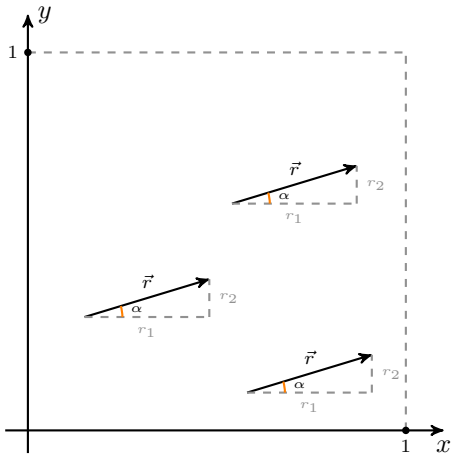


Fig. 2. Ejemplo de dirección de una función $\vec{r}$-creciente.

III. Interpretación geométrica de las condiciones de monotonía en dos dimensiones

Una función débilmente creciente puede entenderse como una función que en cada punto del plano crece en la dirección (1,1), es decir, crece a través de la recta que pasa por este punto en la dirección del vector (1,1) (véase Fig. 1). De manera similar, un función $\vec{r} = (r_1, r_2)$-creciente puede entenderse como una función que en cada punto del plano crece en la direccion (r_1, r_2), es decir, crece a través de la recta que pasa por ese punto en la dirección del vector (r_1, r_2) (véase Fig. 2).

Tanto en el caso de las funciones débilmente crecientes como en el de las funciones $\vec{r}$-crecientes para un vector fijo $\vec{r}$, la dirección de la recta sobre la que crece está prefijada y es igual para todos los puntos del dominio. Por el contrario, la mayor diferencia entre las funciones anteriores y las funciones $\vec{r}$-crecientes OD y SOD se debe a que la dirección varía de una región a otra. En particular, si $(x_1, x_2) \in [0,1]^2$ y $\sigma \in \mathcal{S}_n$ es la permutación que cumple $x_{\sigma(1)} \geq x_{\sigma(2)}$, entonces la reordenación de las componentes del vector $\vec{r}_{\sigma^{-1}}$ en las Definiciones 2.4 y 2.5 significa que la primera componente del vector, r_1, afecta al mayor valor de x, mientras que r_2 afecta al menor de los valores de x. Esto significa que diferentes direcciones son consideradas dependiendo de la permutación que ordene las componentes del punto x. Formalicemos esta idea.

Dado que estamos trabajando únicamente en el caso 2-dimensional, dado un punto $x = (x_1, x_2) \in [0,1]^2$ se satisface que $x_1 \leq x_2$ o $x_2 \leq x_1$. Esto significa que podemos diferenciar dos regiones de direcciones distintas.

Denotemos Ω_1 y Ω_2 a los subespacios

$$\Omega_1 = \{(x_1, x_2) \in [0,1]^2 \mid x_1 \geq x_2\} \tag{2}$$

and

$$\Omega_2 = \{(x_1, x_2) \in [0,1]^2 \mid x_1 \leq x_2\}. \tag{3}$$

Así mismo, denotamos por Δ a la diagonal del espacio, que está formada por todos los puntos del plano que pertenecen a los dos espacios, es decir

$$\Delta = \Omega_1 \cap \Omega_2 = \{(x_1, x_2) \in [0,1]^2 \mid x_1 = x_2\}.$$

Proposición 3.1: Sea $\vec{r} = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$ un vector 2-dimensional distinto del nulo. La función $F\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ es $\vec{r}$-creciente SOD si y solo si

- para todo $(x_1, x_2) \in \Omega_1$, F es (r_1, r_2)-creciente en (x_1, x_2);
- para todo $(x_1, x_2) \in \Omega_2$, F es (r_2, r_1)-creciente en (x_1, x_2).

Además, también se conocen los ángulos (con respecto al eje horizontal positivo) de las direcciones de crecimiento.

Proposición 3.2: Sea $F : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ una función $\vec{r}$-creciente SOD para un vector fijo $\vec{r} = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$ no nulo. Se cumple que

- para todo $(x_1, x_2) \in \Omega_1$, el ángulo de la recta (con respecto al eje horizontal positivo) a través de la cuál la función F crece en el punto (x_1, x_2) es el siguiente:
  - si $r_1 \geq 0$, entonces $\alpha = \arctan(\frac{r_2}{r_1})$ (véase nota a pie de página [1]).
  - si $r_1 < 0$, entonces $\alpha = \pi + \arctan(\frac{r_2}{r_1})$.
- para todo $(x_1, x_2) \in \Omega_2$, el ángulo de la recta (con respecto al eje horizontal positivo) a través de la cuál la función F crece en el punto (x_1, x_2) es el siguiente:
  - si $r_2 \geq 0$, entonces $\beta = \arctan(\frac{r_1}{r_2})$;
  - si $r_2 < 0$, entonces $\beta = \pi + \arctan(\frac{r_1}{r_2})$.

Además, es fácil comprobar que se cumple $\beta + \alpha = \frac{\pi}{2}$.

Demostración: Sea $(x_1, x_2) \in \Omega_1$. Esto significa que $x_1 \geq x_2$ y, por lo tanto, la permutación identidad σ_1, dada por $\sigma_1(1) = 1$ y $\sigma_1(2) = 2$, satisface que $x_{\sigma_1(1)} \geq x_{\sigma_1(2)}$. Entonces, la dirección de crecimiento en el punto x es $\vec{r} = (r_1, r_2)$ y, por lo tanto, el ángulo con respecto al eje horizontal positivo es $\alpha = \arctan(\frac{r_2}{r_1})$ para todo vector $\vec{r}$ tal que $r_1 \geq 0$ y $\alpha = \pi + \arctan(\frac{r_2}{r_1})$ para todo vector $\vec{r}$ tal que $r_1 < 0$. De manera análoga, sea $(x_1, x_2) \in \Omega_2$. Esto

[1] Por convenio consideramos $\arctan \frac{a}{0} = \text{sign}(a)\frac{\pi}{2}$.

significa que $x_2 \geq x_1$ y, por lo tanto, la permutación σ_2, dada por $\sigma_2(1) = 2$ y $\sigma_2(2) = 1$, satisface que $x_{\sigma_2(1)} \geq x_{\sigma_2(2)}$. Entonces, la dirección de crecimiento en el punto x es $\vec{r} = (r_{\sigma_2^{-1}(1)}, r_{\sigma_2^{-1}(2)}) = (r_2, r_1)$ y, por lo tanto, el ángulo con respecto al eje horizontal positivo es $\beta = \arctan(\frac{r_1}{r_2})$ para todo vector $\vec{r}$ tal que $r_2 \geq 0$ y $\beta = \pi + \arctan(\frac{r_1}{r_2})$ para todo vector $\vec{r}$ tal que $r_2 < 0$.

La igualdad $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ se cumple por el hecho de que para $a \neq 0$, se cumple $\arctan(\frac{1}{a}) = \text{sign}(a)\frac{\pi}{2} - \arctan(a)$. Nótese que algunas veces, el valor de la suma real es $\frac{5\pi}{2}$, pero este es el mismo ángulo que $\frac{\pi}{2}$. ■

Nota 1: Nótese que debido a que los elementos de la diagonal Δ pertenencen tanto a Ω_1 como a Ω_2 ambas direcciones de crecimiento son impuestas.

Resultados similares pueden ser formulados para el caso de las funciones $\vec{r}$-crecientes OD en los que se impone el creciento solo al segmento formado de puntos de la recta que pertenecen al mismo conjunto Ω_i que el punto inicial x.

Corolario 3.3: Sea $\vec{0} \neq \vec{r} \in \mathbb{R}^2$. Una función $F\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ es $\vec{r}$-creciente OD si y solo si

- para todo $(x_1, x_2) \in \Omega_1$, F es (r_1, r_2)-creciente en (x_1, x_2) restringido al subconjunto Ω_1;
- para todo $(x_1, x_2) \in \Omega_2$, F es (r_2, r_1)-creciente en (x_1, x_2) restringido al subconjunto Ω_2.

Además, los ángulos de las rectas de crecimiento son los mismos que el caso de las funciones $\vec{r}$-crecientes SOD.

En el trabajo [16] puede encontrarse el siguiente resultado sobre la monotonía $\vec{r}$-creciente SOD.

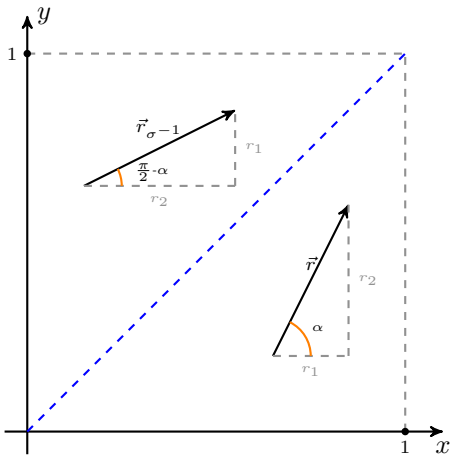
Teorema 3.4: (Teorema 6.5 de [16]) Sean $\vec{0} \neq \vec{r}, \vec{s} \in \mathbb{R}^n$ y $a, b \in \mathbb{R}^+$. Supongamos que $x = (x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n$, $c > 0$ y σ es una permutación que ordena los elementos de x. Si $x_{\sigma(1)} \geq \ldots \geq x_{\sigma(n)}$ y $x_\sigma + c(a\vec{r} + b\vec{s}) \in [0,1]^n$, entonces o $x_\sigma + ca\vec{r} \in [0,1]^n$ o $x_\sigma + cb\vec{s} \in [0,1]^n$. Por lo tanto, si una función es $\vec{r}$- y $\vec{s}$-creciente SOD, entonces es $(a\,\vec{r} + b\,\vec{s})$-creciente SOD.

Nótese que lo mismo puede probarse para funciones OD crecientes [11]. Estudiemos ahora el caso particular de los elementos de la diagonal. Recordemos, que como se ha mencionado anteriormente en la Nota 1, los elementos $\overline{x} = (x, x) \in \Delta$ satisfacen que $\overline{x} \in \Omega_1$ y $\overline{x} \in \Omega_2$, simultáneamente. Esto significa que los elementos de la diagonal en las funciones $\vec{r}$-crecientes SOD crecen en dos direcciones distintas.

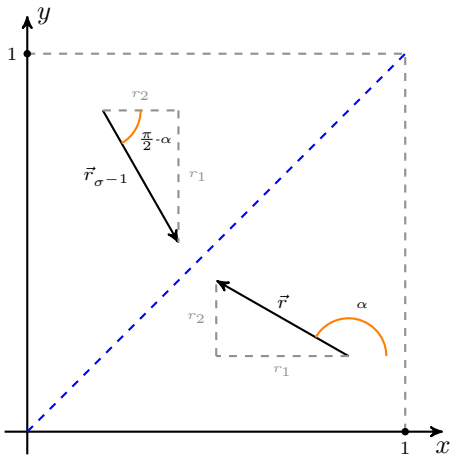
Corolario 3.5: Sea $\vec{0} \neq \vec{r} = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$ y sea F una función $\vec{r}$-creciente SOD. Para cada elemento de la diagonal $\overline{x} \in \Delta$, se tiene que F es (r_1, r_2)- y (r_2, r_1)-creciente SOD en $\overline{x}$.

Sea F una función $\vec{r} = (r_1, r_2)$-creciente SOD para un vector $\vec{r}$ satisfaciendo $r_1 \neq -r_2$. Por el Corolario 3.5, se tiene que F es una función (r_1, r_2)- y (r_2, r_1)-creciente en $\overline{x}$, para todo elemento $\overline{x} \in \Delta$. Entonces, debido al Teorema 3.4, F es creciente en $\overline{x}$ a través de cualquier dirección entre (r_1, r_2) y (r_2, r_1) (veáse Fig. 4(a)).

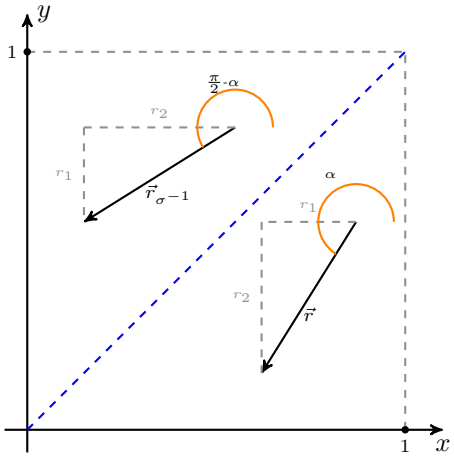
Dos casos extremos de direcciones son los vectores $\vec{r} = (-r, r)$ cuyo ángulo es $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ y $\vec{r} = (r, -r)$ cuyo ángulo es $\alpha = \frac{7\pi}{8}$ (o $-\frac{\pi}{4}$).



a) Vector $\vec{r}$ con $r_1 > 0$ y $r_2 > 0$.



b) Vector $\vec{r}$ con $r_1 < 0$ y $r_2 > 0$.



c) Vector $\vec{r}$ con $r_1 < 0$ y $r_2 < 0$.

Fig. 3. Ejemplos de algunas direcciones (r_1, r_2) para funciones crecientes OD y SOD: caso a) $r_1 > 0$ y $r_2 > 0$; b) $r_1 > 0$ y $r_2 < 0$ y c) $r_1 < 0$ y $r_2 < 0$.

Proposición 3.6: Sea $r > 0$ y F una funcion $(r,-r)$-creciente SOD. Para todo $(x_1,x_2) \in [0,1]^2$, se cumple que $F(x_m,x_m) \leq F(x_1,x_2)$, donde $x_m = \dfrac{x_1+x_2}{2}$.

Demostración: Sea F una función $(r,-r)$-creciente SOD, $(x_1,x_2) \in [0,1]^2$ y $x_m = \frac{x_1+x_2}{2}$. Como consecuencia del Corolario 3.5, F es $(r,-r)$ y $(-r,r)$-creciente en $\overline{x_m} = (x_m,x_m) \in \Delta$. Distinguimos dos posibles casos dependiendo del punto $x = (x_1,x_2)$.

- Caso 1: Sea $(x_1,x_2) \in \Omega_1$. Dado $c = \frac{x_1-x_2}{2r} \geq 0$, se cumple que $(x_m,x_m) + c(r,-r) = (x_1,x_2)$ y, por lo tanto, $F(x_m,x_m) \leq F(x_1,x_2)$.
- Caso 2: Sea $(x_1,x_2) \in \Omega_2$. Dado $c = \frac{x_2-x_1}{2r} \geq 0$, se cumple que $(x_m,x_m) + c(-r,r) = (x_1,x_2)$ y, por lo tanto, $F(x_m,x_m) \leq F(x_1,x_2)$.

■

Como consecuencia de la Proposición anterior se puede concluir que si una función es $(r,-r)$-increasing SOD, para algún $r > 0$, se cumple que $F(\overline{x}) \leq F(y_1,y_2)$ para todo punto satisfaciendo $y_1 + y_2 = 2x$, es decir, el valor en el punto de la diagonal es mínimo con respecto a todos los demás puntos de la recta que pasa por el punto con dirección $(-r,r)$ (véanse líneas verdes en la Fig. 4(b)).

Proposición 3.7: Sea $r > 0$ y F una función $(-r,r)$-creciente SOD. Para todo $(x_1,x_2) \in [0,1]^2$, se cumple que $F(x_m,x_m) = F(x_1,x_2)$, donde $x_m = \dfrac{x_1+x_2}{2}$.

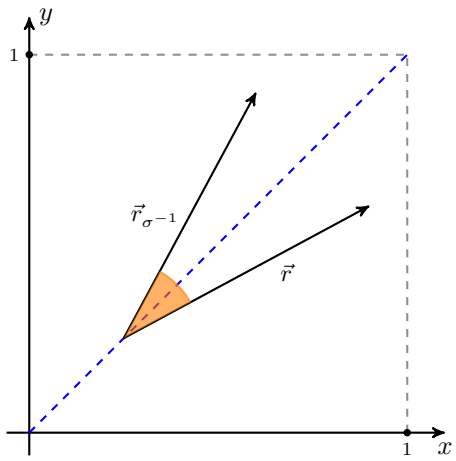
Demostración: Sea F una función $(-r,r)$-creciente SOD, $(x_1,x_2) \in [0,1]^2$ y $x_m = \frac{x_1+x_2}{2}$. Como consecuencia del Corolario 3.5, F es $(-r,r)$ y $(r,-r)$-creciente en $\overline{x_m} = (x_m,x_m) \in \Delta$. Distinguimos dos posibles casos dependeiendo del punto $x = (x_1,x_2)$.

- Caso 1: Sea $(x_1,x_2) \in \Omega_1$. Dado $c = \frac{x_1-x_2}{2r} \geq 0$, se cumple $(x_1,x_2) + c(-r,r) = (x_m,x_m)$. Como F es $(-r,r)$-creciene en (x_1,x_2), se tiene que $F(x_1,x_2) \leq F(x_m,x_m)$. De manera similar, se tiene que $(x_m,x_m) + c(r,-r) = (x_1,x_2)$. Como F es también $(r,-r)$-creciente en (x_m,x_m), se cumple que $F(x_m,x_m) \leq F(x_1,x_2)$. Por lo tanto, $F(x_1,x_2) = F(x_m,x_m)$.
- Caso 2: Sea $(x_1,x_2) \in \Omega_2$. Dado $c = \frac{x_2-x_1}{2r} \geq 0$, se cumple que $(x_1,x_2) + c(r,-r) = (x_m,x_m)$. Como F es $(r,-r)$-creciente en (x_1,x_2) (nótese que en Ω_2, $\sigma_2(1) = 2$ y $\sigma_2(2) = 1$), y se tiene que $F(x_1,x_2) \leq F(x_m,x_m)$. De manera similar, se tiene que $(x_m,x_m) + c(-r,r) = (x_1,x_2)$. Como F es también $(-r,r)$-creciente en (x_m,x_m), se cumple que $F(x_m,x_m) \leq F(x_1,x_2)$. Por lo tanto, $F(x_1,x_2) = F(x_m,x_m)$.

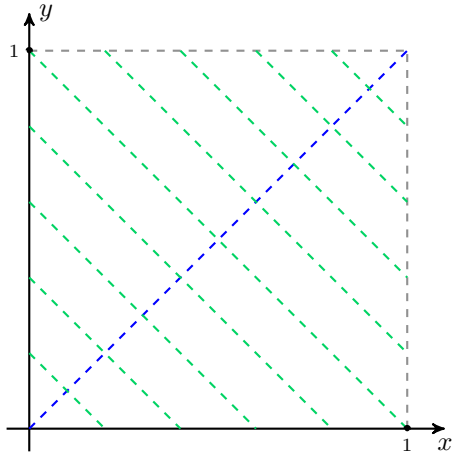
■

IV. Conclusiones

En la literatura reciente encontramos diversas nociones de monotonía menos restrictivas que la monotonía en cada variable que se impone a la funciones de agregación. En este trabajo, hemos analizado la interpretación geométrica de estas monotonías. Se ha estudiado la diferencia entre monotonía direccional ordenada y monotonía direccional ordenada reforzada, viendo que la principal diferencia es que



a) Direcciones de crecimiento en los puntos de la diagonal de una función $\vec{r}$-creciente SOD.



b) Líneas paralelas con dirección $(-r,r)$.

Fig. 4. Representación gráfica del comportamiento de las funciones $\vec{r} = (r_1,r_2)$-creciente SOD con $r_1 = -r2$.

la monotonía direccional ordenada restringe sus condiciones de monotonía al subespacio Ω en el que se encuentra. El análisis geométrico llevado a cabo para el caso 2-dimensional, también nos ha permitido deducir alguncas consecuencias del comportamiento de las funciones direccionalmente ordenadas reforzadas cuando el vector de las direcciones $\vec{r} = (r_1,r_2)$ satisface que $r_1 = -r_2$.

Como trabajo a futuro, destaca la posibilidad de realizar un estudio más general de la interpretación geométrica para el caso n-dimensional. En este caso, se perdería la posibilidad de dibujar el dominio en el plano, pero existe una mayor cantidad de permutaciones posibles, que darían un mayor número de regiones donde las direcciones varían.

Referencias

[1] G. Beliakov, S. James, and D. G. Nimmo, "Using aggregation functions to model human judgements of species diversity," *Information Sciences*, vol. 306, pp. 21–33, 2015.

[2] U. Bentkowska, "Aggregation of diverse types of fuzzy orders for decision making problems," *Information Sciences*, vol. 424, pp. 317–336, 2018.

[3] D. Paternain, H. Bustince, M. Pagola, P. Sussner, A. Kolesárová, and R. Mesiar, "Capacities and overlap indexes with an application in fuzzy rule-based classification systems," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 305, pp. 70–94, 2016.

[4] J. L. García-Lapresta and R. A. M. Pereira, "The dual decomposition of aggregation functions and its application in welfare economics," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 281, pp. 188–197, 2015.

[5] M. Grabisch, J.-L. Marichal, R. Mesiar, and E. Pap, "Aggregation functions: Construction methods, conjunctive, disjunctive and mixed classes," *Information Sciences*, vol. 181, no. 1, pp. 23–43, 2011.

[6] E. P. Klement, R. Mesiar, and E. Pap, *Triangular Norms*. Springer, Dordrecht, 2000.

[7] J. Fodor and B. D. Baets, *Studies in Fuzziness and Soft Computing, vol 215*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2007, ch. Uninorm Basics, pp. 49–64.

[8] H. Bustince, J. Fernandez, R. Mesiar, J. Montero, and R. Orduna, "Overlap functions," *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, vol. 72, no. 3-4, pp. 1488–1499, 2010.

[9] T. Wilkin and G. Beliakov, "Weakly monotonic averaging functions," *International Journal of Intelligent Systems*, vol. 30, no. 2, pp. 144–169, 2015.

[10] H. Bustince, J. Fernandez, A. Kolesárová, and R. Mesiar, "Directional monotonicity of fusion functions," *European Journal of Operational Research*, vol. 244, no. 1, pp. 300–308, 2015.

[11] H. Bustince, E. Barrenechea, M. Sesma-Sara, J. Lafuente, G. Dimuro, R. Mesiar, and A. Kolesárová, "Ordered directionally monotone functions. Justification and application," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems (In Press)*.

[12] G. Lucca, J. A. Sanz, G. P. Dimuro, B. Bedregal, R. Mesiar, A. Kolesárová, and H. Bustince, "Preaggregation functions: Construction and an application," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 24, no. 2, pp. 260–272, 2016.

[13] G. Lucca, J. A. Sanz, G. P. Dimuro, B. Bedregal, H. Bustince, and R. Mesiar, "CF-integrals: a new family of pre-aggregation functions with application to fuzzy rule-based classification systems," *Information Sciences*, vol. 435, pp. 94–110, 2017.

[14] M. Sesma-Sara, H. Bustince, E. Barrenechea, J. Lafuente, A. Kolesárová, and R. Mesiar, "Edge detection based on ordered directionally monotone functions," in *Advances in Fuzzy Logic and Technology 2017*. Springer, 2017, pp. 301–307.

[15] C. Marco-Detchart, C. Lopez-Molina, J. Fernandez, M. Pagola, and H. Bustince, *Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems. Theory and Foundations. IPMU 2018.* Springer, 2018, ch. Image Feature Extraction Using OD-Monotone Functions.

[16] M. Sesma-Sara, J. Lafuente, A. F. Roldán-López-de-Hierro, R. Mesiar, and H. Bustince, "Strengthened ordered directionally monotone functions. Links between the different notions of monotonicity," *Submitted to Fuzzy Sets and Systems*.

[17] M. Grabisch, J. Marichal, R. Mesiar, and E. Pap, *Aggregation functions*. Cambridge University Press, 2009.

[18] G. Beliakov, H. Bustince, and T. Calvo, *A Practical Guide to Averaging Functions*, ser. Studies in Fuzziness and Soft Computing. Springer International Publishing, 2016.

Operadores de agregación y comparación para diferenciación de señales discretas

C. Lopez-Molina, S. Iglesias-Rey, H. Bustince
Dpto. Estadística, Informática y Matemáticas
Universidad Publica de Navarra
Pamplona, Spain
Email: carlos.lopez@unavarra.es

N. Madrid
Escuela de Ingenierías Industriales
Universidad de Málaga
Málaga, España
Email: nicolas.madrid@uma.es

***Abstract*—La tecnología digital ha hecho que la mayor parte de los datos se registren en forma de señales discretas. A pesar de las ventajas que esto tiene, la naturaleza de esta información representa desafíos novedosos. En este trabajo analizamos la diferenciación de señales discretas, una tarea básica para el procesamiento automático de las mismas. En concreto, proponemos el uso de operadores de comparación y agregación para la generación de familias de operadores de diferenciación con alta interpretabilidad. Nuestra propuesta es validada en el contexto de procesamiento de imagen, con la finalidad de caracterizar derivadas parciales en señales bidimensionales.**

***Index Terms*—Operadores de agregación; operadores de comparación; diferenciación de señales discretas; filtros de convolución.**

I. Introducción

La era digital ha producido un incremento exponencial en la cantidad de datos recogidos en casi cualquier ámbito de conocimiento. Esto ha provocado cambios en la manera de tratar información, siendo uno de los más importantes el papel del procesamiento de señal [1], [2]. Nótese que el procesamiento de señal trata con datos nativamente representados en forma de señal (audio, imagen, video), y también de datos escalares recogidos en forma de señal (como las series temporales o los espacios-escala). El procesamiento de señal, entendido de una manera amplia, es una rama aplicada del análisis matemático. Sin embargo, la portabilidad de algoritmos entre ambos campos está en ocasiones muy dificultada por la naturaleza discreta de las señales digitales.

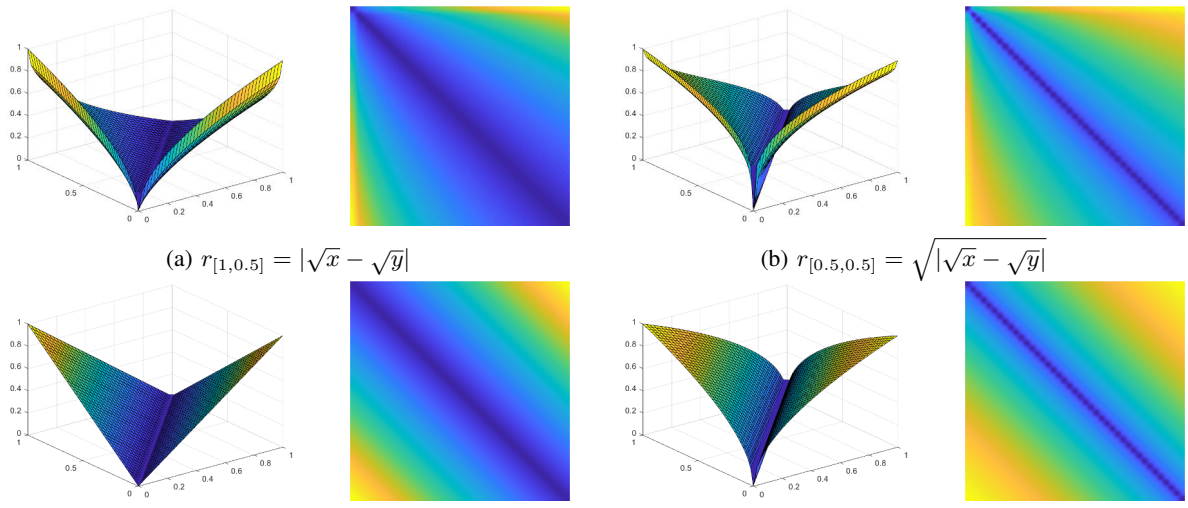
En este trabajo nos centramos en el problema de la diferenciación de señales discretas [3]. La importancia de la diferenciación (e integración) en el procesamiento de señal es capital [4]. Ambas operaciones, aunque en especial la primera de ellas, se usan para localizar tanto puntos críticos (p.e. máximos o mínimos locales) como para localizar o *clusterizar* regiones de interés en las señales. Un ejemplo de fácil interpretación es el de las imágenes en escala de grises. En estas imágenes, entendidas como señales discretas bidimensionales, el uso de derivadas parciales es central a casi cualquier procesamiento de medio o alto nivel. Las diferencias parciales permiten analizar la variación local de las imágenes, y suponen la información primaria en aplicaciones que incluyen la segmentación, detección de bordes, la búsqueda de puntos de interés y la regularización adaptativa.

Muchas de las propuestas para diferenciación de señales discretas están basadas en filtros de convolución para primera o segunda derivada. Al inicio de la era digital aparecieron filtros de convolución discretos, generalmente asociados al cómputo de gradientes en imágenes digitales [5], [6], [7]. En los años 80, nuevos trabajos se inspiraron en en el análisis matemático para diseñar filtros continuos, que debían ser discretizados para su aplicación. Esta naturaleza continua les permitía, antes de la discretización, presentarse como óptimos ante ciertos criterios de calidad [8], [9]. Estos trabajos incluyen las propuestas de Marr y Hildreth [10] y Canny [11], [12], así como ciertas expansiones posteriores [9], [13].

El estudio de filtros de convolución para el cálculo de diferencias parciales se ha visto frenado en los últimos 20 años. A pesar de que se han presentado trabajos de impacto, estos generalmente se limitan a reescribir los criterios de optimalidad y derivar nuevas propuestas, sin que esto repercuta claramente en una mejora en la aplicabilidad [14], [15], [16]. Si bien es cierto que la aparición de los espacios-escala para el análisis multidimensional de señales ha aportado cierta novedad en la diferenciación de señales discretas [17], [18], apenas ha sido aprovechado para producir mejores análisis diferenciales [19].

En este trabajo analizamos los filtros de convolución para el cálculo de diferencias parciales, con especial atención a la diferenciación parcial de imágenes. En concreto, reformulamos el proceso de convolución para considerar, de manera independiente, (a) la cuantificación de diferencias locales y (b) el modelado del vecindario de interés en torno a cada punto de la señal. Esta reformulación viene inspirada por los filtros bilaterales de Tomasi y Manduchi [20], así como por otras iniciativas de aplicación de operadores de agregación en la caracterización de diferencias parciales en imágenes [21]. Proponemos esta generalización para poder incorporar a este campo diferentes operadores de la Teoría de Conjuntos Difusos, en particular las funciones de disimilitud restringidas y las funciones de agregación.

En la Sección II repasamos algunos conocimientos básicos de aplicación en este trabajo. Las Secciones III y III desgranan la propuesta, que es validad de manera experimental en la Sección V. Para finalizar, la Sección VI lista algunas conclusiones y futuras líneas de trabajo.



(a) $r_{[1,0.5]} = |\sqrt{x} - \sqrt{y}|$ (b) $r_{[0.5,0.5]} = \sqrt{|\sqrt{x} - \sqrt{y}|}$

(c) $r_{[1,1]} = |x - y|$ (d) $r_{[0.5,1]} = \sqrt{|x - y|}$

Fig. 1. Funciones de disimilitud restringidas construidas de acuerdo a la Proposición 1.

II. Preliminaries

La teoría de funciones de comparación ha tenido un impacto significativo en la Teoría de Conjuntos Difusos. Esto se debe, probablemente, a la naturaleza subjetiva de las comparaciones humanas, en la cuales pueden aparecer ambigüedades e inconsistencias. En este contexto, la Teoría de Conjuntos Difusos ha sido prolífica, bien fuera centrada en términos de métricas [22] o en términos de medidas de similitud [23]. En este trabajo usamos las Funciones de Disimilitud Restringidas (o, RDFs, por sus siglas inglesas [24]). Estas funciones modelan la diferencia perceptual entre dos elementos en el intervalo $[0, 1]$, y han sido aplicadas en diferentes contextos [25], [26].

Definition 1: [24] Una *función de disimilitud restringida* es una aplicación $r : [0, 1]^2 \to [0, 1]$ que satisfaga

(R1) $r(x, y) = r(y, x)$ para todo $x, y \in [0, 1]$;
(R2) $r(x, y) = 1$ si y sólo si $x = 0$ e $y = 1$ o $x = 1$ e $y = 0$;
(R3) $r(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$;
(R4) para todo $x, y, z \in [0, 1]$, si $x \leq y \leq z$, entonces $r(x, y) \leq r(x, z)$ y $r(y, z) \leq r(x, z)$.

Existen diferentes maneras de construir RDFs, si bien la más sencilla es la combinación de automorfismos.

Proposition 1: Sean φ_1 y φ_2 dos automorfismos de $[0, 1]$. La aplicación $r : [0, 1]^2 \to [0, 1]$ construída tal que

$$r(x, y) = \varphi_1(|\varphi_2(x) - \varphi_2(y)|) \tag{1}$$

es una función de disimilitud restringida (o RDF).

De cara a reducir el alcance de este trabajo, consideraremos únicamente las RDFs construídas de acuerdo a la Proposición 1. Especificamente, nos referiremos como $r_{[\alpha,\beta]}$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, a la RDF tal que $\varphi_1(x) = x^\alpha$ y $\varphi_2(x) = x^\beta$. Es decir, a

$$r_{[\alpha,\beta]}(x, y) = (|x^\beta - y^\beta|)^\alpha \ . \tag{2}$$

La Fig. 1 muestra algunas RDFs construídas de acuerdo a la Ec. (2). Nótese que $r_{[1,1]}$ es equivalente a la diferencia absoluta entre los argumentos de la función.

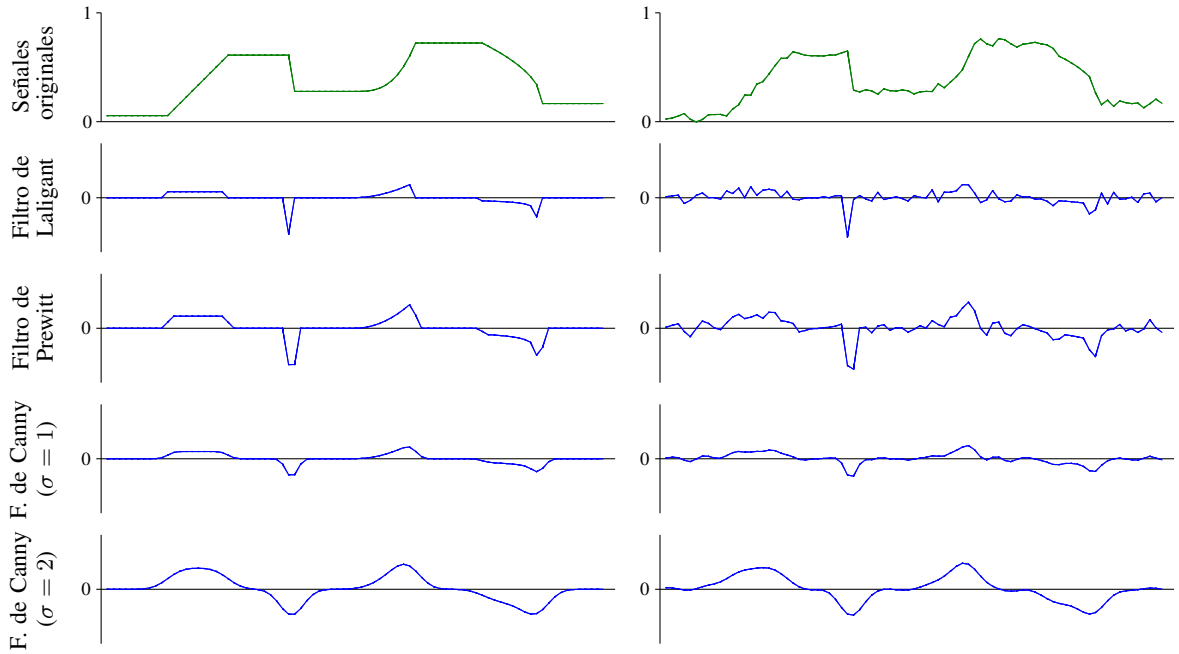
III. Un modelo general para diferenciación

La noción de *derivada* está ligada a la idea de variación de una función. Por ello, al trabajar con funciones sobre dominios discretos, la diferencia local puede tomarse como un reemplazo fidedigno de la derivada. Sean dos funciones $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{N}^2 \mapsto \mathbb{R}$ tal que la segunda (mediciones) se construya a partir del muestreo de la primera (realidad subyacente). Podría aproximarse la derivada de f tal que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(i, j) &= g(i + 1, j) - f(i, j) \text{ y} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(i, j) &= g(i, j + 1) - f(i, j) \, . \end{aligned} \tag{3}$$

Sin embargo, la aplicación de esta estrategia suele generar resultados decepcionantes, en buena medida debido a la contaminación de los datos. En entornos reales, el empleo de Ec. (3) es poco fiable, y sus resultados tienen una interpretabilidad muy baja. Un ejemplo de este hecho se ve en la Fig. 2. En esta figura vemos, en la fila superior, dos señales sintéticas, tal que la situada en la columna derecha es una versión contaminada de la que ocupa la columna izquierda. En esta señal coexisten dos *objetos* cada uno de los cuales genera dos puntos de interés (críticos), uno a cada lado del propio objeto. Estos puntos deberían representarse como dos máximos (subidas, al lado izquierdo de cada objeto) y dos mínimos (bajadas, al lado derecho.). En la segunda fila de la Fig. 2 vemos la aproximación a $\frac{\partial f}{\partial x}$ realizada por el filtro de Laligant [15], que corresponde en su versión 1D a la formulación de la Ec. (3). Se observa que el resultado es muy preciso en la señal sintética original, pero también muy poco interpretable en la señal contaminada. Esto se achaca a la alta frecuencia del muestreo para computar la diferencia (dos posiciones contiguas), lo que generalmente se soluciona usando operadores de mayor soporte.

Al usar un filtro de diferenciación la aproximación a las derivadas parciales de f se hace mediante la convolución de



(a) Señal sintética (b) Señal contaminada

Fig. 2. Estimaciones de la primera derivada de una señal discreta usando diferentes filtros de convolución 1D. La señal contaminada se obtiene añadiendo ruido blanco Gaussiano con desviación estándar 0.02. Los operadores usados son el de Laligant [15], Prewitt [6] and Canny [12], y pueden observarse en la Fig. 3.

la señal g con un filtro κ. Algunos ejemplos son los operadores discretos de Sobel [5] y Prewitt [6], o los operadores basados en señales continuas de Canny [11] (y sus evoluciones [16], [27]) o Shen-Castan [28]. Algunos de estos filtros, en su representanción 1D, se incluyen en la Fig. 3.

Una derivada parcial en x en el punto $\mathbf{p}$ se aproxima tal que[1]:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}) = g * \kappa(\mathbf{p}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \kappa(\xi)\cdot f(\mathbf{p}+\xi)\cdot d\xi\,, \quad (4)$$

donde ξ representa el desplazamiento.

La elección de κ, así como los parámetros que éste pudiera tener, ha sido ampliamente discutido en la comunidad científica. En esta discusión toman relevancia las características de las funciones a derivar, las contaminaciones que pueda sufrir, o la finalidad del proceso. De hecho, muchas propuestas son óptimas para el conjunto de restricciones y objetivos propuestos por sus autores, si bien estos difieren unos de otros. Una de las propiedades más aceptada es la antisimetría o imparidad, es decir, que para cualquier ξ en el dominio se cumple que $\kappa(\xi) = -\kappa(-\xi)$. Esta propiedad no siempre se cumple en los filtros de diferenciación, véase el caso del filtro de Laligant [15] en la Fig. 3, pero sí es sostenida en la mayor parte de los casos. Nótese que, en algunos filtros (como el ISEF [28], ver Fig. 3) el filtro no está definido en el origen, suponiéndose un valor 0.

[1]En adelante, se considera únicamente la derivada $\frac{\partial f}{\partial x}$, ya que la derivada $\frac{\partial f}{\partial y}$ se computa de manera análoga.

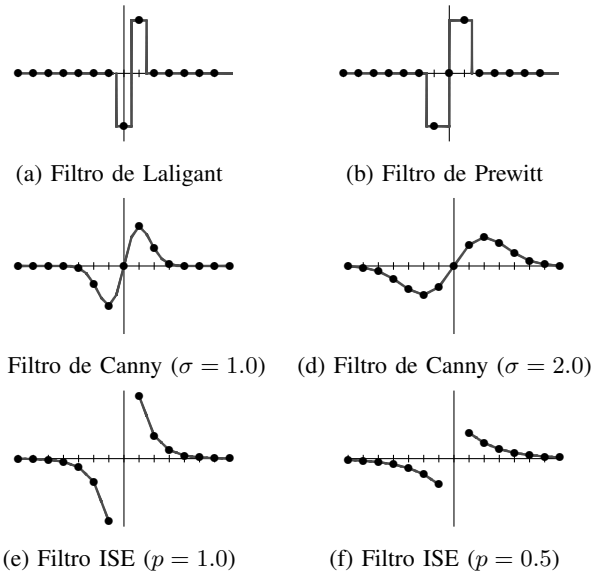
Partiendo de la Ec. (4), y dando por hecha la antisimetría del filtro κ, tenemos que:

$$\begin{aligned} g*\kappa(\mathbf{p}) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \kappa(\xi)\cdot g(\mathbf{p}+\xi)\cdot d\xi = \\ &\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \kappa(\xi) g(\mathbf{p}+\xi) d\xi + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{0} \kappa(\xi) g(\mathbf{p}+\xi) d\xi = \\ &\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \kappa(\xi) g(\mathbf{p}+\xi) d\xi + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \kappa(-\xi) g(\mathbf{p}-\xi) d\xi = \\ &\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \kappa(\xi) g(\mathbf{p}+\xi) d\xi - \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \kappa(\xi) g(\mathbf{p}-\xi) d\xi = \\ &\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \kappa(\xi)\left(g(\mathbf{p}+\xi) - g(\mathbf{p}-\xi)\right) d\xi\,. \end{aligned} \quad (5)$$

Los dominios de las señales se definen, en el plano teórico, con dominio infinito. Por ejemplo, un filtro Gaussiano es, evidentemente, positivo en $[-\infty, \infty]$, que pasa a ser el rango de las integrales en Ec. (5). Sin embargo, en las aplicaciones prácticas esto no tiene demasiada relevancia, y los filtros se restringen a un cierto soporte discreto a partir del cual se considera que $K(\xi) = 0$. Por tanto, se puede reformular el resultado de la Ec. (5) tal que:

$$g*\kappa(\mathbf{|}) = \int_{-t}^{t}\int_{0}^{t} \kappa(\xi)\cdot\left(g(\mathbf{p}+\xi) - g(\mathbf{p}-\xi)\right)\cdot d\xi\,. \quad (6)$$

donde $[-t,t]^2$ es el soporte del filtro κ, generalmente establecido a partir del descenso del valor κ por debajo de un cierto umbral cercano a 0.



(a) Filtro de Laligant (b) Filtro de Prewitt

(c) Filtro de Canny ($\sigma = 1.0$) (d) Filtro de Canny ($\sigma = 2.0$)

(e) Filtro ISE ($p = 1.0$) (f) Filtro ISE ($p = 0.5$)

Fig. 3. Filtros de convolución 1D usados para diferenciación. Los puntos representan la versión discreta, mientras que la linea señala la función continua subyacente.

La estimación de las derivadas parciales de una señal g involucra, pues, dos componentes diferentes:

- la cuantificación de las diferencias entre los valores a ambos lados de la posición, representado en la Ec. (6) por el término $(g(x+\xi) - g(x-\xi))$. Nos referimos a este término como *término de intensidad*;
- la cuantificación de la relevancia de cada posición en el entorno, representado en la Ec. (6) por el término $\kappa(\xi)$. Nos referimos a este término como *término espacial*.

Al tener ambos términos identificados, podemos modelarlos de manera independiente. Por ejemplo, en lugar de considerar la diferencia absoluta entre los valores de la señal g, podemos modelar el término de intensidad usando otras medidas. Dado que las señales discretas suelen tener límites bien definidos, podemos considerar que f y g tienen el rango $[0, 1]$. Para el *término de intensidad* de la Ec. (6) consideramos una función de diferencia tal que $\epsilon\colon [0,1]^2 \to [-1,1]$. Esta función debe encargarse de cuantificar la diferencia percibida entre dos valores, sean $g(\mathbf{p}-\xi)$ y $g(\mathbf{p}+\xi)$. La Ec. (6) resulta en:

$$g * \kappa(\mathbf{p}) = \int_{-k}^{k} \int_{0}^{k} \kappa(\xi) \cdot \epsilon\left((g(\mathbf{p}+\xi), g(\mathbf{p}-\xi)\right) \cdot d\xi \quad (7)$$

Así, las derivadas parciales dependen de dos piezas de información: el filtro que modela la relevancia espacial (κ) y la función que modula la disimilitud (ϵ). Cada uno de estos debería poder estudiarse y entrenarse de manera independiente. Además, ambos se combinan de manera local usando un operador conjuntivo (producto) y de manera semi-local usando la suma (media aritmética, en caso de normalización).

En este trabajo nos centramos en el término de intensidad, relacionándolo con la teoría de comparación. En concreto, estudiamos el papel que pueden tener las funciones de disimilitud restringidas para el modelado de las diferencias.

IV. Diferenciación usando funciones de disimilitud restringidas

Dada la Ec. (7), una pregunta evidente se refiere al conjunto mínimo de propiedades que debe cumplir la función ϵ. Por ejemplo, debería producir valores *altos* cuando sus argumentos sean diferentes, mientras que deberían ser bajos o cercanos a cero cuando los argumentos sean similares. Sería esperable también la antisimetría, ya que las derivadas de una función no deberían verse afectadas por la dirección del análisis (más allá del signo de las mismas). Creemos que una función ϵ debe cumplir las siguientes propiedades:

(E1) $\epsilon_r(y,z) = -\epsilon_r(z,y)$;
(E2) $\epsilon_r(y,z) = 0$ si y sólo si $y = z$;
(E3a) $\epsilon_r(y,z) = 1$ si y sólo si $y = 0$ y $z = 1$;
(E3b) $\epsilon_r(y,z) = -1$ si y sólo si $y = 1$ y $z = 0$;
(E4) Para cada $t, y, z \in [0,1]$, $t \leq y \leq z$, tenemos que $\epsilon_r(t,y) \leq \epsilon_r(t,z)$ y $\epsilon_r(y,z) \leq \epsilon_r(z,t)$.

Estas propiedades garantizan el comportamiento esperado en el término de intensidad. Por ejemplo, (E2) garantiza que la derivada de una función será 0 si y sólo si $g(k+\xi) = g(x-\xi)$ para cada posición $\xi \in [-t,t]^2$.

Tras un análisis detallado, creemos que las RDF suponen una herramienta útil para generar funciones ϵ. En concreto, proponemos usar funciones ϵ construidas tal que:

$$\epsilon_r(y,z) = \frac{z-y}{|z-y|} \cdot r(y,z)\,, \quad (8)$$

donde r es una RDF. Una función ϵ_r, construida como en la Ec. (8), satisface las propiedades (E1)-(E4).

Trabajos anteriores han estudiado las técnicas clásicas de filtrado para incorporar dos términos independientes (y explícitos), especialmente en el campo de procesamiento de imagen. Las técnicas de regularización o diferenciación adaptadas al contenido local de la imagen (*content-aware filtering*), por ejemplo, discriminan el análisis de tonos (el término de intensidad) con el estudio de la posición de cada pixel (el término espacial). La manera en que los términos se aplican y combinan puede, sin embargo, ser diferente. La contribución más relevante en este sentido, así como la más parecida a nuestros objetivo, es el *filtrado bilateral* de Tomasi y Manduchi (*bilateral filtering* [20]). En este trabajo, los autores proponen la combinación de filtros en las dimensiones tonal y espacial para la regularización adaptativa de imágenes. Estos filtros consideran la cercanía tonal y espacial de cada par de píxeles a la hora de regularizar una zona de la imagen. Específicamente, proponen generar una imagen regularizada g^* a partir de una imagen monocanal g tal que:

$$g^*(\mathbf{p}) = \frac{1}{k_d} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(\xi) \cdot g(\mathbf{p}+\xi) \cdot h(|g(\mathbf{p}) - g(\mathbf{p}+\xi)|) d\xi \quad (9)$$

donde k_d es un factor de normalización, s es un filtro de paso bajo y h es una función unaria decreciente. En esta formulación, s modula el peso de los elementos en función de su distancia a $\mathbf{p}$, mientras que h modula el peso de los elementos en función de su diferencia de valor respecto a $g(\mathbf{p})$.

Los filtros bilaterales se han aplicado en diferentes escenarios, si bien se han mantenido casi siempre en el ámbito de la regularización adaptativa. Los objetivos, sin embargo, han variado, desde la regularización sin contexto (en el trabajo original [20]) a la eliminación de ruido o texturas [29]. Algunos autores han relacionado los filtros bilaterales con otras estrategias de regularización adaptativas y análisis de datos, como pueden ser la difusión anisotrópica o el *mean-shift* [30], [31], [32]. Finalmente, en 2017, Wilkin y Beliakov presentaron una reformulación de los filtros bilaterales [21] usando funciones débilmente monótonas (*weakly monotone functions* [33]).

Nuestra propuesta, aunque es conceptualmente similar a la de Tomasi y Manduchi, tiene una formulación diferente. El cambio más significativo es que el término de intensidad incluye dos posiciones simétricas respecto a $\mathbf{p}$, mientras que en un filtro bilateral se evalúa la similitud tonal entre los valores respecto de la posición central (ver Ec. (9)). Otra diferencia significativa es que el dominio espacial de los filtros bilaterales es simétrico desde el origen ($\mathbf{p}$), mientras que en la Ec. (7) κ sólo necesita definirse en la mitad del mismo.

V. Validación experimental

La propuesta de la Sección IV se basa en la asunción de que la diferencia aritmética no es necesariamente el mejor descriptor de la disimilitud entre dos valores. O, al menos, de que es bueno tener la capacidad de modelar esta disimilitud por medio de una función dedicada. Esta sección trata de comprobar si el aislar el *término de intensidad* puede conllevar mejoras en los resultados prácticos de una aplicación de diferenciación. Para ello, hemos aplicado nuestras ideas al contexto de detección de bordes.

Proponemos un esquema de detección de bordes relativamente estándar, compuesto por cuatro pasos acordes a la estructura de descomposición de Bezdek [34], [35]:

1. Regularizar la imagen con un filtro Gaussiano con $\sigma = 1$;
2. Calcular los gradientes como la combinación de las derivadas parciales, aproximados de acuerdo a la Ec. (7) con los ajustes que se detallan a continuación.
3. Estimar la intensidad de borde como la magnitud del gradiente en cada píxel.
4. Binarizar la imagen usando *non-maxima suppresion* [36] e *hysteresis* [11], para la cuál los umbrales se establecen usando la técnica de Medina-Carnicer *et al.* [37].

Este esquema es una aplicación directa de la diferenciación de señales discretas (imágenes). Los ajustes de nuestros filtros son los que siguen:

- ϵ se construye como se ve en la Ec. (8), donde las RDFs son del tipo $r_{[\alpha,\beta]}$ con valores $\alpha, \beta \in \{0.5, 1, 1.5, \ldots, 3\}$;
- κ_h y κ_v son equivalentes al lado positivo de un filtro de Canny, i.e

$$\kappa_h(\xi) = \frac{-\xi_x}{\sigma^2} e^{-\frac{\xi_x^2+\xi_y^2}{2\sigma^2}} \quad \text{and} \quad \kappa_v(\xi) = \frac{-\xi_y}{\sigma^2} e^{-\frac{\xi_x^2+\xi_y^2}{2\sigma^2}}, \tag{10}$$

con $\sigma = 1$.

α \ β	**0.5**	**1.0**	**1.5**	**2.0**	**2.5**	**3.0**
0.5	.56	.63	.65	.64	.63	.61
1.0	.56	.63	.64	.63	.61	.58
1.5	.56	.61	.61	.59	.57	.55
2.0	.56	.59	.58	.55	.53	.50
2.5	.55	.57	.55	.52	.49	.47
3.0	.54	.54	.51	.48	.46	.43

(a) Rendimiento medio (medida F) para cada RDF $r_{[\alpha,\beta]}$.

α \ β	**0.5**	**1.0**	**1.5**	**2.0**	**2.5**	**3.0**
0.5	4/13	26/-	24/-	16/-	16/-	16/3
1.0	2/3	11/-	14/-	6/-	8/-	2/2
1.5	4/3	7/1	2/-	1/1	1/1	3/-
2.0	5/3	3/-	3/-	1/-	-/-	1/2
2.5	2/9	4/-	2/2	-/-	2/2	6/12
3.0	2/19	1/5	3/2	1/9	-/13	1/95

(b) Número de imágenes para las cuales cada RDF $r_{[\alpha,\beta]}$ obtiene el mejor/peor resultados de entre los contendientes.

TABLE I
Resultados cuantitativos obtenidos en el experimento para cada RDF $r_{[\alpha,\beta]}$ en el BSDS500 *test set*.

Nótese que, cuando usamos $r_{[1,1]}$, el algoritmo es computacionalmente equivalente al método de Canny. De esta manera, al incluir $(\alpha, \beta) = (1, 1)$ en la comparación, podemos contrastar la importancia de tener un término independiente y adaptable para la cuantificación de las disimilitudes.

En este experimento utilizamos un esquema estándar de cuantificación de resultados basado en la medida F [38], [39] sobre el *dataset* de *test* del BSDS [40].

En la Tabla I mostramos los resultados obtenidos en los experimentos. Primero, en la Tabla I(a) listamos el rendimiento medio de cada combinación de (α, β). Luego, en la Tabla I(b) mostramos el número de imágenes para los cuales cada combinación de (α, β) produce el mejor y/o peor resultado (en términos de la medida F).

Los resultados indican que la combinación $(\alpha, \beta) = (1, 1)$ (que recupera el método de Canny) no es necesariamente la mejor opción para el término de intensidad. Otras configuraciones producen resultados que son, al menos, competitivos, especialmente con valores bajos de α y β. Esta conclusión se refiere a los valores medios de rendimiento, pero también a los números de mejores y peores resultados. Son llamativos los casos de $r_{[0.5,1.0]}$ y, por ejemplo, $r_{[0.5,2.5]}$, ya que ambos tienen mejores resultados medios, así como mejores ratios de mejor/peor resultado que $r_{[1,1]}$. Si bien experimentos exhaustivos podrían llevarse a cabo para confirmar nuestras hipótesis, creemos que nuestros resultados, dado el limitado espacio, refuerzan nuestra tesis de que la diferencia absoluta podría no ser siempre la mejor medida de disimilitud entre (en este caso) tonos en una imagen y (de manera general) valores en una función discreta.

VI. Conclusiones

En este trabajo hemos presentado un modelo para generalizar filtros antisimétricos (impares) para la aproximación de derivadas mediante diferencias discretas. Nuestro modelo propone el uso de términos explícitos para las diferencias de valor (término de intensidad) y posición (término espacial). En el caso de las primeras, hemos presentado una clase de funciones de comparación basadas en RDFs que garantizan una serie de propiedades, añadidas a la alta flexibilidad. La validez del modelo se ha testeado en la diferenciación de imágenes en escala de grises para detección de bordes, encontrando que los resultados de algoritmos clásicos pueden mejorarse al usar las RDFs dentro de nuestra reformulación del modelo. Los resultados son prometedores, aunque deberían ser respaldados por trabajos más exhaustivos. Además, cabe señalar que nuestro modelo propuesto abre la puerta al uso de técnicas como el entrenamiento de funciones en el espacio de intensidades (tonos, en el caso de procesamiento de imagen), que en una formulación clásica del problema no eran elegibles.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Ministerio de Ciencia del Gobierno de España (Proyectos TIN2016-77356-P y TIN15-70266-C2-P-1).

References

[1] J. Astola, E. Dougherty, I. Shmulevich, and I. Tabus, "Genomic signal processing," *Signal Processing*, vol. 83, no. 4, pp. 691–694, 2003.
[2] T.-S. Chua, X. He, W. Liu, M. Piccardi, Y. Wen, and D. Tao, "Big data meets multimedia analytics," *Signal Processing*, vol. 124, pp. 1–4, 2016.
[3] L. Florack, *Image structure*. Springer Science & Business Media, 1997, vol. 10.
[4] D. Marr, *Vision*. MIT Press, 1982.
[5] I. Sobel and G. Feldman, "A 3x3 isotropic gradient operator for image processing," 1968, presented at a talk at the Stanford Artificial Intelligence Project.
[6] J. M. S. Prewitt, *Object enhancement and extraction*, ser. Picture Processing and Psychopictorics. Academic Press, 1970, pp. 75–149.
[7] L. G. Roberts, "Machine perception of three-dimensional solids," Ph.D. dissertation, Massachusetts Institute of Technology, 1963.
[8] R. M. Haralick, "Digital step edges from zero crossing of second directional derivatives," *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 6, no. 1, pp. 58–68, 1984.
[9] M. Basu, "Gaussian-based edge-detection methods- A survey," *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics, Part C: Applications and Reviews*, vol. 32, no. 3, pp. 252–260, 2002.
[10] D. Marr and E. Hildreth, "Theory of edge detection," *Proceedings of the Royal Society of London*, vol. 207, no. 1167, pp. 187–217, 1980.
[11] J. Canny, "Finding edges and lines in images," Massachussets Institute of Technology, Tech. Rep., 1983.
[12] ——, "A computational approach to edge detection," *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 8, no. 6, pp. 679–698, 1986.
[13] G. Wang and B. De Baets, "Edge detection based on the fusion of multiscale anisotropic edge strength measurements," in *Advances in Fuzzy Logic and Technology 2017*. Springer, 2017, pp. 530–536.
[14] S. Mahmoodi, "Edge detection filter based on Mumford–Shah Green function," *SIAM Journal on Imaging Sciences*, vol. 5, no. 1, pp. 343–365, 2012.
[15] O. Laligant and F. Truchetet, "A nonlinear derivative scheme applied to edge detection," *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 32, no. 2, pp. 242–257, 2010.
[16] W. McIlhagga, "The Canny edge detector revisited," *International Journal of Computer Vision*, vol. 91, pp. 251–261, 2011.
[17] T. Lindeberg, "Edge detection and ridge detection with automatic scale selection," *International Journal of Computer Vision*, vol. 30, no. 2, pp. 117–156, 1998.
[18] J. Weickert, *Anisotropic Diffusion in Image Processing*, ser. ECMI Series. Teubner-Verlag, 1998.
[19] C. Lopez-Molina, J. Montero, H. Bustince, and B. De Baets, "Self-adapting weighted operators for multiscale gradient fusion," *Information Fusion*, vol. 44, pp. 136–146, 2018.
[20] C. Tomasi and R. Manduchi, "Bilateral filtering for gray and color images," in *Proc. of the IEEE International Conf. on Computer Vision*, 1998, pp. 838–846.
[21] T. Wilkin and G. Beliakov, "Robust image denoising and smoothing with generalised spatial-tonal averages," in *IEEE International Conf. on Fuzzy Systems*. IEEE, 2017, pp. 1–7.
[22] V. Gregori, S. Morillas, and A. Sapena, "Examples of fuzzy metrics and applications," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 170, no. 1, pp. 95–111, 2011.
[23] S. Santini and R. Jain, "Similarity measures," *IEEE Trans. on Pattern Analysis Machine Intelligence*, vol. 21, no. 9, pp. 871–883, 1999.
[24] H. Bustince, E. Barrenechea, and M. Pagola, "Relationship between restricted dissimilarity functions, restricted equivalence functions and normal EN-functions: Image thresholding invariant," *Pattern Recognition Letters*, vol. 29, no. 4, pp. 525–536, 2008.
[25] C. Lopez-Molina, B. De Baets, M. Galar, and H. Bustince, "A generalization of the Perona-Malik anisotropic diffusion method using restricted dissimilarity functions," *International Journal of Computational Intelligent Systems*, vol. 6, no. 1, pp. 14–28, 2013.
[26] C. Marco-Detchart, J. Cerron, L. De Miguel, C. Lopez-Molina, H. Bustince, and M. Galar, "A framework for radial data comparison and its application to fingerprint analysis," *Applied Soft Computing*, vol. 46, pp. 246–259, 2016.
[27] P.-L. Shui and W.-C. Zhang, "Noise-robust edge detector combining isotropic and anisotropic Gaussian kernels," *Pattern Recognition*, vol. 45, no. 2, pp. 806–820, 2012.
[28] J. Shen and S. Castan, "An optimal linear operator for step edge detection," *CVGIP: Graphical Models and Image Processing*, vol. 54, no. 2, pp. 112–133, 1992.
[29] S. Paris, P. Kornprobst, J. Tumblin, and F. Durand, "Bilateral filtering: Theory and applications," *Foundations and Trends in Computer Graphics and Vision*, vol. 4, no. 1, pp. 1–73, 2008.
[30] M. Elad, "On the origin of the bilateral filter and ways to improve it," *IEEE Trans. on Image Processing*, vol. 11, no. 10, pp. 1141–1151, 2002.
[31] D. Barash, "A fundamental relationship between bilateral filtering, adaptive smoothing, and the nonlinear diffusion equation," *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 24, pp. 844–847, 2002.
[32] D. Comaniciu and P. Meer, "Mean shift: a robust approach toward feature space analysis," *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 24, no. 5, pp. 603–619, 2002.
[33] T. Wilkin and G. Beliakov, "Weakly monotonic averaging functions," *International Journal of Intelligent Systems*, vol. 30, no. 2, pp. 144–169, 2015.
[34] J. Bezdek, R. Chandrasekhar, and Y. Attikouzel, "A geometric approach to edge detection," *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, vol. 6, no. 1, pp. 52–75, 1998.
[35] C. Lopez-Molina, "The breakdown structure of edge detection- analysis of individual components and revisit of the overall structure," Ph.D. dissertation, Universidad Publica de Navarra, 2012.
[36] A. Rosenfeld and M. Thurston, "Edge and curve detection for visual scene analysis," *IEEE Trans. on Computers*, vol. 20, no. 5, pp. 562–569, 1971.
[37] R. Medina-Carnicer, F. Madrid-Cuevas, A. Carmona-Poyato, and R. Muñoz-Salinas, "On candidates selection for hysteresis thresholds in edge detection," *Pattern Recognition*, vol. 42, no. 7, pp. 1284–1296, 2009.
[38] D. Martin, C. Fowlkes, and J. Malik, "Learning to detect natural image boundaries using local brightness, color, and texture cues," *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 26, no. 5, pp. 530–549, 2004.
[39] C. Lopez-Molina, B. De Baets, and H. Bustince, "Quantitative error measures for edge detection," *Pattern Recognition*, vol. 46, no. 4, pp. 1125–1139, 2013.
[40] P. Arbelaez, M. Maire, C. Fowlkes, and J. Malik, "Contour detection and hierarchical image segmentation," *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 33, pp. 898–916, 2011.

Una nueva aproximación al concepto de similitud intervalar teniendo en cuenta la longitud de los intervalos

Humberto Bustince, Javier Fernandez, Laura de Miguel, Jose Antonio Sanz, Mikel Sesma-Sara
Depto. de Estadistica, Informática y Matemáticas
Universidad Pública de Navarra
Pamplona, Spain
{bustince, fcojavier.fernandez,laura.demiguel, joseantonio.sanz, mikel.sesma}@unavarra.es

***Abstract*—En este trabajo proponemos una definición de función de equivalencia restringida intervalo-valorada que determina el grado de similitud de dos intervalos teniendo en cuenta su amplitud y utilizando órdenes admisibles. Utilizamos estas funciones para definir medidas de similitud intervalo-valoradas y discutimos algunas posibles aplicaciones.**

***Index Terms*—Función de equivalencia restringida intervalo-valorada, Función de similitud intervalo-valorada, Orden admisible, Medida de similitud**

I. Introducción

Los conjuntos intervalo-valorados (IVFSs) son cada vez más utilizados debido a su excelente rendimiento en múltiples aplicaciones [1]–[3], [10]. Dado que muchas de estas aplicaciones, en su versión difusa, hacen uso del concepto de medida de similitud [4], [12], las medidas de similitud intervalo-valoradas están atrayendo también un gran interés [11].

El objetivo de este trabajo es construir medidas de similitud intervalo-valoradas que, por una parte, utilicen órdenes totales (y no solo parciales) a la hora de comparar los intervalos involucrados y que, además, tengan en cuenta la amplitud de los intervalos, interpretada como una medida del grado de incertidumbre asociado a los datos. Para lograr este objetivo, consideramos nuevas definiciones de funciones de agregación y funciones de equivalencia restringida intervalo-valoradas que tienen en cuenta tanto órdenes totales como la amplitud de los intervalos.

La estructura del trabajo es la siguiente. En la Sección II presentamos algunos resultados y definiciones preli-minares. En la Sección III presentamos la definición de función de equivalencia restringida intervalo-valorada y en la Sección IV, discutimos la construcción de funciones de agregación intervalo-valoradas que preservan la amplitud. La Sección V se centra en el nuevo concepto de medida de similitud intervalo-valorada basada en la amplitud. Terminamos con algunas conclusiones y referencias.

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el proyecto de investigación TIN2016-77356-P del Gobierno de España.

II. Preliminares

Vamos a trabajar con subintervalos cerrados del intervalo unidad. Por ello, definimos el siguiente conjunto:

$$L([0,1]) = \{[\underline{X}, \overline{X}] \mid 0 \leq \underline{X} \leq \overline{X} \leq 1\} .$$

La amplitud de un intervalo $X \in L([0,1])$ se denota por $w(X)$. Una función intervalar $f : (L([0,1]))^n \to L([0,1])$ se dice que preserva la amplitud si para todo $X_1, \ldots, X_n \in L([0,1])$ tales que $w(X_1) = \ldots = w(X_n)$, se tiene que $w(f(X_1, \ldots, X_n)) = w(X_i)$ para cualquier $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Denotamos por $\leq_L$ una relación de orden arbitraria en $L([0,1])$ con $0_L = [0,0]$ como elemento mínimo y $1_L = [1,1]$ como elemento máximo. Esta relación de orden puede ser total o parcial. Si queremos hablar especficamente de un orden total, lo denotaremos por $\leq_{TL}$.

Ejemplo 1: Ejemplos de relaciones de orden en $L([0,1])$.

a) La relación de orden parcial en $L([0,1])$ inducida por el orden (parcial) usual en $\mathbb{R}^2$ es:

$$[\underline{X}, \overline{X}] \preceq_L [\underline{Y}, \overline{Y}] \text{ si } \underline{X} \leq \underline{Y} \text{ y } \overline{X} \leq \overline{Y}. \quad (1)$$

b) Como ejemplo de orden total en $L([0,1])$ tenemos el de Xu y Yager (véase [14]):

$$[\underline{X}, \overline{X}] \leq_{XY} [\underline{Y}, \overline{Y}] \text{ si } \begin{cases} \underline{X} + \overline{X} < \underline{Y} + \overline{Y} \text{ o} \\ \underline{X} + \overline{X} = \underline{Y} + \overline{Y} \text{ y} \\ \overline{X} - \underline{X} \leq \overline{Y} - \underline{Y}. \end{cases} \quad (2)$$

Definición 1: Un orden admisible en $L([0,1])$ es un orden lineal $\leq_{TL}$ que extiende el orden parcial $\preceq_L$.

En este trabajo, cuando hablamos de un orden lineal entre intervalos, asumimos que es admisible. El siguiente resultado proporciona un método de construcción de órdenes admisibles.

Proposición 1: ([9]) Sean $M_1, M_2 : [0,1]^2 \to [0,1]$ dos funciones de agregación (es decir, funciones crecientes tales que, si todas las entradas son cero, el resultado es cero y, si todas las entradas son uno, el resultado es uno) tales que, para cualesquiera $X, Y \in L([0,1])$, las identidades $M_1(\underline{X}, \overline{X}) = M_1(\underline{Y}, \overline{Y})$ y $M_2(\underline{X}, \overline{X}) = M_2(\underline{Y}, \overline{Y})$ se

satisfacen simuláneamente si y solo si $X = Y$. Entonces, el orden $\leq_{M_1,M_2}$ en $L([0,1])$ dado por

$$X \leq_{M_1,M_2} Y \qquad \text{si} \qquad \begin{cases} M_1(\underline{X},\overline{X}) < M_1(\underline{Y},\overline{Y}) \text{ o} \\ M_1(\underline{X},\overline{X}) = M_1(\underline{Y},\overline{Y}) \text{ y} \\ M_2(\underline{X},\overline{X}) \leq M_2(\underline{Y},\overline{Y}) \end{cases}$$

es un orden admisible en $L([0,1])$.

Ejemplo 2:

(i) El orden de Xu y Yager es un ejemplo de orden admisible con $M_1(x,y) = \frac{x+y}{2}$ y $M_2(x,y) = y$.

(ii) Los órdenes lexicográficos $\leq_{lex1}$ ($\leq_{lex2}$) también son ejemplos de órdenes admisibles con $M_1(x,y) = x$ ($M_1(x,y) = y$) y $M_2(x,y) = y$ ($M_2(x,y) = x$).

(iii) En general, si, para $\alpha \in [0,1]$ definimos la función de agregación

$$K_\alpha(x,y) = (1-\alpha)x + \alpha y$$

entonces, para $\alpha, \beta \in [0,1]$ con $\alpha \neq \beta$, podemos obtener el orden admisible $\leq_{\alpha,\beta}$ tomando $M_1(x,y) = K_\alpha(x,y)$ y $M_2(x,y) = K_\beta(x,y)$. Véase [9] para más detalles.

Recordemos también la definición de función de equivalencia restringida (REF) [7]

Definición 2: Una función $R : [0,1]^2 \to [0,1]$ es una función de equivalencia restringida (REF) si:

1) $R(x,y) = 0$ si y solo si $\{x,y\} = \{0,1\}$;
2) $R(x,y) = 1$ si y solo si $x = y$;
3) $R(x,y) = R(y,x)$ para todo $x, y \in [0,1]$;
4) Si $x \leq y \leq z$, entonces $R(x,z) \leq R(x,y)$ y $R(x,z) \leq R(y,z)$ para todo $x, y, z \in [0,1]$.

III. Funciones de equivalencia restringida intervalo-valoradas que preservan la amplitud

En esta sección proponemos una nueva definición de REF para datos intervalo-valorados que tiene en cuenta la amplitud de los mismos.

Definición 3: Sea $\leq_L$ un orden en $L([0,1])$. Una función de equivalencia restringida intervalo-valorada (IV REF) con respecto al orden $\leq_L$ es una función $R_{IV} : L([0,1])^2 \to L([0,1])$ tal que:

1) $R_{IV}(X,Y) = 0_L$ si y solo si $\{X,Y\} = \{0_L, 1_L\}$;
2) $R_{IV}(X,X) = [1 - w(X), 1]$ para todo $X \in L([0,1])$;
3) $R_{IV}(X,Y) = R_{IV}(Y,X)$ para todo $X, Y \in L([0,1])$;
4) Si $X, Y, Z \in L([0,1])$ son tales que $X \leq_L Y \leq_L Z$ y $w(X) = w(Y) = w(Z)$, entonces $R_{IV}(X,Z) \leq_L R_{IV}(X,Y)$ y $R_{IV}(X,Z) \leq_L R_{IV}(Y,Z)$.

La principal diferencia de esta definición respecto a su contrapartida difusa radica en el axioma 2. Dado que consideramos que la amplitud del intervalo de pertenencia de un elemento es una medida de la incertidumbre asociada al valor preciso de pertenencia, y que dicho valor preciso es un número dentro del intervalo de pertenencia, de esta forma se evita que el resultado sea menos impreciso que los datos considerados.

Ejemplo 3:

La función $R_{IV} : L([0,1])^2 \to L([0,1])$ dada por:

$$\begin{aligned} R_{IV}(X,Y) \quad = \quad & \big[\max\big(0, 1 - |K_\alpha(X) - K_\alpha(Y)| \\ - \quad & \frac{1}{2}(w(X) + w(Y))\big)\,, \\ & \max\big(1 - |K_\alpha(X) - K_\alpha(Y)|, \\ & \frac{1}{2}(w(X) + w(Y))\big)\big] \end{aligned}$$

es, para todo $\alpha \in]0,1]$, un ejemplo de IV REF con respecto a cualquier orden admisible.

A continuación discutimos un método de construcción de estas funciones. Para ello, necesitamos el siguiente lema previo.

Lema 1: Sean $X, Y \in L([0,1])$ intervalos tales que $w(X) = w(Y)$. Entonces

$$X \precsim_L Y \qquad \Leftrightarrow \qquad X \leq_{TL} Y$$

para cualquier orden admisible $\leq_{TL}$.

Prueba. La demostración se sigue al tener en cuenta que dos intervalos cualesquiera de la misma amplitud son siempre comparables por medio del orden parcial $\precsim_L$. Dado que todo orden admisible refina este orden parcial, se tiene el resultado. ■

Teorema 1: Sea $\alpha \in]0,1[$, $M : [0,1]^2 \to [0,1]$ una función de agregación simétrica e idempotente y $R : [0,1]^2 \to [0,1]$ una REF. Entonces, la función $R_{IV} : L([0,1])^2 \to L([0,1])$ dada por

$$\begin{aligned} R_{IV}(X,Y) = \big[\max\big(0, R\left(K_\alpha(X)\right., \\ \left.K_\alpha(Y)\right) - M(w(X), w(Y))\big), \\ \max\left(R\left(K_\alpha(X), K_\alpha(Y)\right), M(w(X), w(Y))\right)\big] \end{aligned} \tag{3}$$

es una IV REF con respecto a cualquier orden admisible $\leq_{TL}$ que preserva la amplitud

Prueba. Por comodidad, escribimos $\mathcal{R}$ por $R\left(K_\alpha(X), K_\alpha(Y)\right)$, y $\mathcal{M}$ por $M(w(X), w(Y))$. Entonces, la ecuación (3) se simplifica como:

$$\begin{aligned} & R_{IV}(X,Y) = \big[\max\big(0, \mathcal{R} - \mathcal{M}\big), \max\big(\mathcal{R}, \mathcal{M}\big)\big] \qquad (4) \\ = \quad & \begin{cases} [\mathcal{R} - \mathcal{M}, \mathcal{R}], & \text{si } \mathcal{R} \geq \mathcal{M}, \\ [0, \mathcal{M}], & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

De (4), R_{IV} está bien definido. Además, $R_{IV}(X,Y) = 0_L$ si y solo si $\mathcal{R} = 0$ y $\mathcal{M} = 0$. Pero esto ocurre si y solo si $\{K_\alpha(X), K_\alpha(Y)\} = \{0,1\}$, lo que sucede si y solo si $\{X,Y\} = \{0_L, 1_L\}$. Luego $w(X) = w(Y) = 0$ y tenemos la primera condición de la Definición 3.

La segunda condición de la Definición 3 se sigue al observar que $R\left(K_\alpha(X), K_\alpha(X)\right) = 1$ y $M(w(X), w(X)) = w(X)$.

La simetría de R_{IV} es una consecuencia inmediata de la simetría de R y M.

La monotonía con respecto a cualquier orden admisible es clara a partir de la monotonía de R, el lema 1 y el hecho de que, si $X \leq_{TL} Y \leq_{TL} Z$ y $w(X) = w(Y) = w(Z)$, entonces $K_\alpha(X) \leq K_\alpha(Y) \leq K_\alpha(Z)$.

Finalmente, la preservación de la amplitud R_{IV} se sigue de la Ecuación (4) y de la idempotencia de M ■

Podemos utilizar cualquier REF R y cualquier función de agregación idempotente y simétrica M en la Ecuación (3) para construir funciones de equivalencia restringida intervalo-valoradas que preserven la amplitud. De hecho, es posible simplificar la Ecuación (3) imponiendo restricciones adicionales sobre R y M.

Corolario 1: Sean $\alpha \in]0,1[$ y $M : [0,1]^2 \to [0,1]$ una función de agregación simétrica idempotente tal que

$$M(x,y) \leq \min\big((1-\alpha)x + \alpha y, \alpha x + (1-\alpha)y\big)$$

para cualesquiera $x, y \in [0,1]$. Sea $R : [0,1]^2 \to [0,1]$ una función de equivalencia restringida tal que

$$R(x,y) \geq 1 - |x-y|$$

para todo $x, y \in [0,1]$. Entonces, la función $R_{IV} : L([0,1])^2 \to L([0,1])$ dada por

$$\begin{aligned} & R_{IV}(X,Y) = \big[R\left(K_\alpha(X), K_\alpha(Y)\right) \\ - \quad & M(w(X),w(Y)), R\left(K_\alpha(X), K_\alpha(Y)\right)\big] \end{aligned} \tag{5}$$

es una función de equivalencia restringida intervalo-valorada con respecto a cualquier orden admisible $\leq_{TL}$ y que preserva la amplitud.

Prueba Es necesario ver que

$$R\left(K_\alpha(X), K_\alpha(Y)\right) \geq M(w(X), w(Y))$$

para todo $X, Y \in L([0,1])$, ya que, de este modo, la Ecuación (5) es un caso especial de la Ecuación (3).

Por nuestras hipótesis sobre M y R, es suficiente mostrar que

$$\begin{aligned} & 1 - |K_\alpha(X) - K_\alpha(Y)| \\ \geq \quad & \min\big((1-\alpha)w(X) + \alpha w(Y), \alpha w(X) + (1-\alpha)w(Y)\big). \end{aligned} \tag{6}$$

Supongamos que $K_\alpha(X) \geq K_\alpha(Y)$. Entonces

$$\begin{aligned} & 1 - |K_\alpha(X) - K_\alpha(Y)| \\ = \quad & 1 - (1-\alpha)\underline{X} - \alpha\overline{X} + (1-\alpha)\underline{Y} + \alpha\overline{Y} \end{aligned}$$

y como

$$\begin{aligned} & 1 \geq \overline{X} - \underline{Y} \\ = \quad & (1-\alpha)(\overline{X} - \underline{Y}) + \alpha(\overline{X} - \underline{Y}) \\ = \quad & (1-\alpha)(\overline{X} - \underline{X} + \underline{X} - \underline{Y}) \\ + \quad & \alpha(\overline{X} - \overline{Y} + \overline{Y} - \underline{Y}), \end{aligned}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} 1 \quad & -(1-\alpha)\underline{X} - \alpha\overline{X} + (1-\alpha)\underline{Y} + \alpha\overline{Y} \\ \geq \quad & (1-\alpha)(\overline{X} - \underline{X}) + \alpha(\overline{Y} - \underline{Y}), \end{aligned}$$

luego (6) se satisface.

Supongamos ahora que $K_\alpha(X) < K_\alpha(Y)$. Tenemos que

$$\begin{aligned} & 1 - |K_\alpha(X) - K_\alpha(Y)| \\ = \quad & 1 + (1-\alpha)\underline{X} + \alpha\overline{X} - (1-\alpha)\underline{Y} - \alpha\overline{Y} \end{aligned}$$

y como

$$\begin{aligned} & 1 \geq \overline{Y} - \underline{X} \\ = \quad & (1-\alpha)(\overline{Y} - \underline{X}) + \alpha(\overline{Y} - \underline{X}) \\ = \quad & (1-\alpha)(\overline{Y} - \underline{Y} + \underline{Y} - \underline{X}) \\ + \quad & \alpha(\overline{Y} - \overline{X} + \overline{X} - \underline{X}), \end{aligned}$$

vemos que

$$\begin{aligned} & 1 + (1-\alpha)\underline{X} + \alpha\overline{X} - (1-\alpha)\underline{Y} - \alpha\overline{Y} \\ \geq \quad & (1-\alpha)(\overline{Y} - \underline{Y}) + \alpha(\overline{X} - \underline{X}), \end{aligned}$$

de donde se cumple (6) y tenemos el resultado. ■.

Corolario 2: Consideremos la función de equivalencia restringida intervalo-valorada R_{IV} propuesta en el Corolario 1. Entonces, para todo $X, Y \in L([0,1])$ se tiene que

$$\begin{aligned} & \min(w(X), w(Y)) \leq w(R_{IV}(X,Y)) = M(w(X), w(Y)) \\ \leq \quad & \min\big((1-\alpha)w(X) + \alpha w(Y), \alpha w(X) + (1-\alpha)w(Y)\big). \end{aligned}$$

Prueba. La primera desigualdad se verifica porque toda función de agregación idempotente es siempre mayor o igual que el mínimo. En cuanto a la segunda desigualdad, es una consecuencia de las hipótesis sobre M asumidas en el Corolario 1. ■

El siguiente resultado es directo.

Lema 2: Si $M_1, M_2 : [0,1]^2 \to [0,1]$ son funciones de agregación simétricas idempotentes, entonces la función $M : [0,1]^2 \to [0,1]$ dada por

$$M(x,y) = \min(M_1(x,y), M_2(x,y)),$$

para todo $x, y \in [0,1]$, es una función de agregación simétrica idempotente.

Ejemplo 4: Vamos a construir un ejemplo específico de función de equivalencia restringida intervalo-valorada construida de acuerdo con el Corolario 1. Sea $R^p(x,y) = 1 - |x-y|^p$, con $p > 0$, que es una REF. Es claro que $R^p(x,y) \geq R^1 = 1 - |x-y|$ para todo $x, y \in [0,1]$ si y solo si $p \in [1, \infty[$.

(i) Si tomamos $\alpha = 1/2$ y $M(x,y) = \frac{x+y}{2}$ obtenemos una clase de funciones de equivalencia restringida intervalo valoradas prespecto a cualquier orden admisible:

$$\begin{aligned} & R^p_{IV}(X,Y) = \left[R^p\left(\frac{\underline{X}+\overline{X}}{2}, .\frac{\underline{Y}+\overline{Y}}{2}\right)\right. \\ - \quad & \left.\frac{w(X)+w(Y)}{2}, R^p\left(\frac{\underline{X}+\overline{X}}{2}, \frac{\underline{Y}+\overline{Y}}{2}\right)\right] \end{aligned}$$

para cualquier $p \in [1, \infty[$.

(ii) Si tomamos $M(x,y) = \min(x,y)$, obtenemos:

$$\begin{aligned} & R^{p,\alpha}_{IV}(X,Y) = [R^p\left(K_\alpha(X), K_\alpha(Y)\right) - \min(w(X), w(Y)), \\ & R^p\left(K_\alpha(X), K_\alpha(Y)\right)] \end{aligned}$$

para $p \in [1, \infty[$ y $\alpha \in]0,1[$.

(iii) Sea $\alpha \in [0,1]$. Es fácil observar que

$$\begin{aligned} & \min\big((1-\beta)x + \beta y, \beta x + (1-\beta)y\big) \\ \leq \quad & \min\big((1-\alpha)x + \alpha y, \alpha x + (1-\alpha)y\big) \end{aligned}$$

para todo $\beta \in [0,1]$ tal que

$$\max(\beta, 1-\beta) \geq \max(\alpha, 1-\alpha)\ .$$

Por tanto, obtenemos una clase más general que la del ítem (ii) si tomamos $\alpha \in]0,1[$ y

$$M(x,y) = \min\big((1-\beta)x + \beta y, \beta x + (1-\beta)y\big)$$

para $\beta \in [\max(\alpha, 1-\alpha), 1]$ (o equivalentemente para $\beta \in [0, \min(\alpha, 1-\alpha)]$):

$$\begin{aligned} & R_{IV}^{p,\alpha,\beta}(X,Y) \\ = \ & \big[R^p\left(K_\alpha(X), K_\alpha(Y)\right) - \min\big((1-\beta)w(X) + \beta w(Y), \\ & \beta w(X) + (1-\beta)w(Y)\big), R^p\left(K_\alpha(X), K_\alpha(Y)\right)\big]. \end{aligned}$$

En particular, para $\beta = 1$ (o equivalentemente para $\beta = 0$) obtenemos la clase descrita en el ítem (ii).

IV. Funciones de agregación intervalo-valoradas que preservan la amplitud

De cara a posibles aplicaciones, introducimos en esta sección un análisis de la posible definición de funciones de agregaciónj intervalo-valoradas que también tengan en cuenta la amplitud de los datos a agregar. Recordamos primero la definición de función de agregación intervalo-valorada con respecto a un orden admisible arbitrario.

Definición 4: Sea $n \geq 2$. Una función de agregación intervalo-valorada (n-dimensional) en $L([0,1])$ con respecto a un orden $\leq_L$ es una aplicación $M_{IV} : (L([0,1]))^n \to L([0,1])$ tal que:

(i) $M_{IV}(0_L, \cdots, 0_L) = 0_L$.
(ii) $M_{IV}(1_L, \cdots, 1_L) = 1_L$.
(iii) M_{IV} es no decreciente respecto a $\leq_L$.

A continuación proponemos un método de construcción de funciones de agregación intervalo-valoradas que preservan la amplitud de los intervalos a agregar.

Para ello, dada una función de agregación $M : [0,1]^n \to [0,1]$, consideramos las dos propiedades siguientes:

(P1) $M(cx_1, \ldots, cx_n) \geq cM(x_1, \ldots, x_n)$ para todo $c \in [0,1]$, $x_1, \ldots, x_n \in [0,1]$.
(P2) $M(x_1, \ldots, x_n) \leq 1 - M(1-x_1, \ldots, 1-x_n)$ para todo $x_1, \ldots, x_n \in [0,1]$.

Teorema 2: Sean $\alpha, \beta \in [0,1]$ con $\beta \neq \alpha$. Sean $M_1, M_2 : [0,1]^n \to [0,1]$ dos funciones de agregación tales que M_1 es estrictamente creciente, $M_1(x_1, \ldots, x_n) \geq M_2(x_1, \ldots, x_n)$ para todo $x_1, \ldots, x_n \in [0,1]$, M_1 o M_2 satisfacen la propiedad (P1) y M_1 o M_2 satisfacen la propiedad (P2). Entonces, $M_{IV} : (L([0,1]))^n \to L([0,1])$ dada por:

$$M_{IV}(X_1, \ldots, X_n) = Y, \quad \text{donde}$$

$$\begin{cases} K_\alpha(Y) = M_1\left(K_\alpha(X_1), \ldots, K_\alpha(X_n)\right), \\ w(Y) = M_2\left(w(X_1), \ldots, w(X_n)\right), \end{cases}$$

para todo $X_1, \ldots, X_n \in L([0,1])$, es una función de agregación intervalo-valorada con respecto a $\leq_{\alpha,\beta}$.

Además, si M_2 es idempotente, entonces M_{IV} preserva la amplitud.

Prueba.

Primero veamos que M_{IV} está bien definida. Tenemos

$$Y = \left[\underline{Y}, \overline{Y}\right] = \left[K_\alpha(Y) - \alpha w(Y), K_\alpha(Y) + (1-\alpha)w(Y)\right].$$

Como $\underline{Y} \leq \overline{Y}$, solo debemos probar que

1) $\underline{Y} \geq 0$: Para $\alpha = 0$ tenemos que $\underline{Y} = M_1(\underline{X_1}, \ldots, \underline{X_n}) \geq 0$ y para $\alpha \in]0,1]$ tenemos que

$$\begin{aligned} & K_\alpha(Y) = M_1\left(K_\alpha(X_1), \ldots, K_\alpha(X_n)\right) \\ \geq \ & \alpha M_2\left(\frac{K_\alpha(X_1)}{\alpha}, \ldots, \frac{K_\alpha(X_n)}{\alpha}\right) \\ \geq \ & \alpha M_2\left(w(X_1), \ldots, w(X_n)\right) = \alpha w(Y) \end{aligned}$$

donde la primera desigualdad se sigue de que M_2 satisface la propiedad (P1) y la segunda, de que $K_\alpha(X) = (1-\alpha)\underline{X} + \alpha\overline{X} \geq \alpha(\overline{X} - \underline{X}) = \alpha w(X)$ for all $X \in L([0,1])$.

2) $\overline{Y} \leq 1$: Para $\alpha = 1$ tenemos que $\overline{Y} = M_1(\overline{X_1}, \ldots, \overline{X_n}) \leq 1$ y para $\alpha \in [0,1[$ vemos que

$$\begin{aligned} & K_\alpha(Y) + (1-\alpha)w(Y) \\ = \ & M_1\left(K_\alpha(X_1), \ldots, K_\alpha(X_n)\right) \\ + \ & (1-\alpha)M_2\left(w(X_1), \ldots, w(X_n)\right) \\ \leq \ & M_1\left(K_\alpha(X_1), \ldots, K_\alpha(X_n)\right) \\ + \ & (1-\alpha)M_2\left(\frac{1-K_\alpha(X_1)}{1-\alpha}, \ldots, \frac{1-K_\alpha(X_n)}{1-\alpha}\right) \\ \leq \ & M_1\left(K_\alpha(X_1), \ldots, K_\alpha(X_n)\right) \\ + \ & M_2\left(1-K_\alpha(X_1), \ldots, 1-K_\alpha(X_n)\right) \\ \leq \ & M_1\left(K_\alpha(X_1), \ldots, K_\alpha(X_n)\right) \\ + \ & 1 - M_2\left(K_\alpha(X_1), \ldots, K_\alpha(X_n)\right) = 1 \end{aligned}$$

donde la primera desigualdad se sigue de que $1 - K_\alpha(X) = 1 - (1-\alpha)\underline{X} - \alpha\overline{X} \geq (1-\alpha)(\overline{X} - \underline{X}) = (1-\alpha)w(X)$ for all $X \in L([0,1])$, y la segunda y la tercera, de las hipótesis del Teorema.

Veamos ahora que M_{IV} es una función de agregación intervalo-valorada.

(i) $M_{IV}(0_L, \cdots, 0_L) = Y$ donde $K_\alpha(Y) = M_1(0, \ldots, 0) = 0$ y $w(Y) = M_2(0, \ldots, 0) = 0$, luego $Y = 0_L$.

(ii) $M_{IV}(1_L, \cdots, 1_L) = Y$ donde $K_\alpha(Y) = M_1(1, \ldots, 1) = 1$ y $w(Y) = M_2(0, \ldots, 0) = 0$, luego $Y = 1_L$.

(iii) Sea $X_i \leq_{\alpha,\beta} Y_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Entonces $K_\alpha(X_i) \leq K_\alpha(Y_i)$ para todo $i = 1, \ldots, n$ y hay dos posibilidades:

1) Existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $K_\alpha(X_j) < K_\alpha(Y_j)$. Entonces

$$M_1(K_\alpha(X_1), \ldots, K_\alpha(X_n)) < M_1(K_\alpha(Y_1), \ldots, K_\alpha(Y_n)),$$

ya que M_1 es estrictamente creciente, luego $M_{IV}(X_1, \ldots, X_n) <_{\alpha,\beta} M_{IV}(Y_1, \ldots, Y_n)$.

2) $K_\alpha(X_i) = K_\alpha(Y_i)$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Si $\beta > \alpha$, entonces $w(X_i) \leq w(Y_i)$ para todo $i = 1, \ldots, n$, de donde $M_2(w(X_1), \ldots, w(X_n)) \leq$

$M_2(w(Y_1),\dots,w(Y_n))$, y por tanto $M_{IV}(X_1,\dots,X_n) \leq_{\alpha,\beta} M_{IV}(Y_1,\dots,Y_n)$. Si $\beta < \alpha$, entonces $w(X_i) \geq w(Y_i)$ para todo $i = 1,\dots,n$, luego $M_2(w(X_1),\dots,w(X_n)) \geq M_2(w(Y_1),\dots,w(Y_n))$, y $M_{IV}(X_1,\dots,X_n) \leq_{\alpha,\beta} M_{IV}(Y_1,\dots,Y_n)$.

Finalmente, la conservación de la amplitud se sigue fácilmente de la idempotencia de M_2. ■

Ejemplo 5: Una función $M_{IV} : (L([0,1]))^n \to L([0,1])$ definida como en el Teorema 2, es una función de agregación intervalo-valorada que preserva la amplitud (con respecto a $\leq_{\alpha,\beta}$), si, por ejemplo:

1) (i) $M_1(x_1,\dots,x_n) = M_2(x_1,\dots,x_n) = \frac{x_1+\dots+x_n}{n}$ para todo $x_1,\dots,x_n \in [0,1]$, o
2) (ii) $M_1(x_1,\dots,x_n) = \frac{x_1+\dots+x_n}{n}$, $M_2(x_1,\dots,x_n) = \min\{x_1,\dots,x_n\}$ para todo $x_1,\dots,x_n \in [0,1]$.

V. Medidas de similitud intervalo-valoradas que preservan la amplitud

A continuación proponemos una nueva definición de medida de similitud intervalo-valorada que tiene en cuenta la amplitud de los intervalos.

Definición 5: Sea $\leq_L$ un orden en $L([0,1])$ y $M : [0,1]^n \to [0,1]$ una función de agregación. Una medida de similitud intervalo-valorada asociada a M basada en la amplitud los conjuntos intervalo-valorados definidos en un referencia finito U, $IVFS(U)$, y con respecto al orden $\leq_L$ es una función $S_M : IVFS(U) \times IVFS(U) \to L([0,1])$ tal que, para todo $A, B, A', B' \in IVFS(U)$,

[(SM1)] $S_M(A,B) = S(B,A)$;

[(SM2)]

$$S_M(A,A) = \Big[1 - M\big(w(A(u_1)),\dots,w(A(u_n))\big), 1\Big] ;$$

[(SM3)] $S_M(A,B) = 0_L$ si y solo si $\{A(u_i), B(u_i)\} = \{0_L, 1_L\}$ para todo $i \in \{1,\dots,n\}$;

[(SM4)] Si $A \subseteq A' \subseteq B' \subseteq B$ w.r.t. $\leq_L$ y $w(A(u_i)) = w(A'(u_i)) = w(B'(u_i)) = w(B(u_i))$ para todo $i \in \{1,\dots,n\}$, entonces $S_M(A,B) \leq_L S_M(A',B')$.

Preentamos ahora un método de construcción de estas similitudes. Recordemos que una función de agregación $M : [0,1]^n \to [0,1]$ es auto-dual con respecto a la negación estándar si

$$M(x_1,\dots,x_n) = 1 - M(1-x_1,\dots,1-x_n)$$

si $x_1,\dots,x_n \in [0,1]$.

Teorema 3:

Sea $M_{IV} : (L([0,1]))^n \to L([0,1])$ una función de agregación intervalo-valorada (respecto a un orden $\leq_L$) tal que $M_{IV}(X_1,\dots,X_n) = [M_L(\underline{X_1},\dots,\underline{X_n}), M_U(\overline{X_1},\overline{X_n}]$ con M_L, M_U funciones de agregación y M_L auto-dual, y sea $M_{IV}(X_1,\dots,X_n) = 0_L$ si y solo si $X_1 = \dots = X_n = 0_L$. Sea $R_{IV} : L([0,1])^2 \to L([0,1])$ una IV REF con respecto al orden $\leq_L$. Entonces, la función $S_{M_L} : IVFS(U) \times IVFS(U) \to L([0,1])$ dada por:

$$S_{M_L}(A,B) = M_{IV}\big(R_{IV}\left(A(u_1),B(u_1)\right),\dots,R_{IV}\left(A(u_n),B(u_n)\right)\big)$$

para todo $A, B \in IVFS(U)$ es una medida de similitud intervalo-valorada asociada a M basada en la amplitud sobre $IVFS(U)$ con respecto al orden $\leq_L$.

Prueba. (SM2) Tenemos

$$\begin{aligned} & S_{M_L}(A,A) = M_{IV}\big([1-w(A(u_1)),1],\dots,[1-w(A(u_n)),1]\big) \\ = \;& \Big[M_L\big(1-w(A(u_1)),\dots,1-w(A(u_n))\big),1\Big] \\ = \;& \Big[1-M_L\big(w(A(u_1)),\dots,w(A(u_n))\big),1\Big] \end{aligned}$$

(SM1), (SM3) y (SM4) son directos. ■

Ejemplo 6: El siguiente es un ejemplo de IV similitud basada en la amplitud con respecto a la media aritmética y el orden definido por las funciones $K_{0.5}$ y K_1 (de acuerdo con la proposición 1).

$$\begin{aligned} S_{M_1}(A,B) = \Bigg[& 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} \left|\underline{A(u_i)} + \overline{A(u_i)} - \underline{B(u_i)} - \overline{B(u_i)}\right|}{2n} \\ & - \frac{\sum_{i=1}^{n} \min(w(A(u_i)), w(B(u_i)))}{n}, \\ & , 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} \left|\underline{A(u_i)} + \overline{A(u_i)} - \underline{B(u_i)} - \overline{B(u_i)}\right|}{2n} \Bigg] . \end{aligned} \tag{7}$$

VI. Conclusiones

En este trabajo hemos presentado nuevas aproximaciones a los conceptos de función de equivalencia restringida y función de similitud en el marco intervalar teniendo en cuenta órdenes admisibles y la amplitud de los intervalos.

Estas nociones son aplicables directamente en todos aquellos problemas donde, o bien se han utilizado conjuntos intervalo-valorados, o bien se han utilizado conjuntos difusos pero existe una gran incertidumbre asociada a la construcción de los valores de pertenencia. En particular, en el futuro tenemos intención de aplicar estas nociones en problemas de de visión en estéreo.

References

[1] E. Barrenechea, H. Bustince, B. De Baets, C. Lopez-Molina, Construction of interval-valued fuzzy relations with application to the generation of fuzzy edge images IEEE Transactions on Fuzzy Systems 19 (5) (2011) 819–830.

[2] E. Barrenechea, J. Fernandez, M. Pagola, F. Chiclana, H. Bustince, Construction of interval-valued fuzzy preference relations from ignorance functions and fuzzy preference relations. Application to decision making Knowledge-Based Systems 58 (2014) 33–44.

[3] P. Burillo, H. Bustince, Construction theorems for intuitionistic fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems, 84 (1996) 271–281.

[4] H. Bustince, E. Barrenechea, M. Pagola, Relationship between restricted dissimilarity functions, restricted equivalence functions and normal E_N-functions: Image thresholding invariant, Pattern Recognition Letters 29(4) (2008) 525–536.

[5] P. Burillo, H. Bustince, Entropy on intuitionistic fuzzy sets and on interval-valued fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems 78 (1996) 305–316.

[6] H. Bustince, E. Barrenechea, M. Pagola, Image thresholding using restricted equivalence functions and maximizing the measure of similarity, Fuzzy Sets and Systems 128(5) (2007) 496–516.

[7] H. Bustince, E. Barrenechea, M. Pagola, Restricted equivalence functions, Fuzzy Sets and Systems 157(17) (2006) 2333–2346.

[8] H. Bustince, E. Barrenechea, M. Pagola, J. Fernández, Z. Xu, B. Bedregal, J. Montero, H. Hagras, F. Herrera, B. De Baets, A historical account of types of fuzzy sets and their relationship, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 24 (1) (2016) 179–194.

[9] H. Bustince, J. Fernandez, , A. Kolesárová, R. Mesiar, Generation of linear orders for intervals by means of aggregation functions, Fuzzy Sets and Systems 220 (2013) 69–77.

[10] H.M. Choi, G.S. Mun, J.Y. Ahn, A medical diagnosis based on interval-valued fuzzy sets, Biomedical Engineering-Applications Basis Communications, 24(4) (2012) 349–354.

[11] A. Heidarzade, A new similarity measure for interval type-2 fuzzy sets: Application in fuzzy risk analysis, International Journal of Applied Decision Sciences, 9 (4) (2016) 400–412.

[12] X. Liu, Entropy, distance measure and similarity measure of fuzzy sets and their relations. Fuzzy Sets Systems 52 (1992) 305–318.

[13] Z. Lu, and J. Ye, Logarithmic similarity measure between interval-valued fuzzy sets and its fault diagnosis method, Information (Switzerland) 9 (2018) art. no. 36.

[14] Z.S. Xu, R.R. Yager, Some geometric aggregation operators based on intuitionistic fuzzy sets, International Journal of General Systems 35 (2006) 417–433.

Una generalización del algoritmo gravitacional de clústering utilizando funciones de overlap

I. Rodríguez, J. Ruiz-Aranguren, J. Fernández, H. Bustince
Departamento de Estadística, Informática y Matemáticas
Universidad Pública de Navarra, Pamplona
bustince@unavarra.es

Javier Armentia
Planetario de Pamplona
Pamplona, España

***Abstract*—En este trabajo consideramos una modificación del algoritmo de clúster gravitacional propuesto por Wright y utilizamos el concepto de función de overlap para mejorar su eficacia. Nuestra generalización recupera el algoritmo original. Comparamos los resultados de nuestra propuesta con los obtenidos con algoritmos usuales como el K-means o el FCM, con el objetivo de descubrir los puntos fuertes y las carencias de la nueva versión.**

Keywords—Clúster; overlap; fuerza gravitacional

I. Introducción

La variedad en los problemas a tratar por las técnicas de clúster ha fomentado la aparición de decenas de algoritmos distintos, capaces de adaptarse a distintas situaciones y ofrecer resultados óptimos para cada caso [1]. Uno de estos algoritmos es el propuesto por W. E. Wright en 1977 [2]. Este algoritmo trata cada uno de los ejemplos sobre los que trabaja como una partícula que afecta al resto del sistema, según una adaptación de la ley de gravitación universal de Newton. Cada partícula compone inicialmente un clúster, que se van combinando a lo largo del tiempo hasta que solo queda uno.

El objetivo de este trabajo es generalizar el algoritmo de Wright utilizando funciones de overlap [3].Nuestra generalización modifica la función fundamental que simula el movimiento de las partículas sustituyendo un término concreto por una función de overlap. Las funciones de overlap se introdujeron inicialmente en el campo difuso para tratar con el problema de determinar a cuál de dos conjuntos difusos pertenece en mayor medida una entrada dada. Sin embargo, desde sus orígenes se han aplicado con éxito en campos como los del procesamiento de imagen [4], la clasificación [5, 6] o la optimización [7].

En particular, en [7], una generalización muy competitiva del GSA, un algoritmo de optimización que también hace uso de la fuerza gravitacional, ver [8], fue propuesto, reemplazando el producto en la expresión de la fuerza por funciones de overlap (y otro tipo de funciones).

La estructura del trabajo es la siguiente. En la Sección II presentamos algunos conceptos preliminares. En la Sección III, presentamos el algoritmo de clúster gravitacional original y nuestra propuesta de generalización. La Sección IV se dedica a un studio experimental de nuestra propuesta. Terminamos con algunas conclusions y referencias.

II. Preliminares

A. *Funciones de Agregación*

Definición. [9] Una función de agregación n-dimensional es una función $M:[0,1]^n \to [0,1]$ que verifica las dos condiciones siguientes:

- M es no decreciente en cada una de sus variables;
- $M(0, \ldots, 0) = 0$ y $M(1, \ldots, 1) = 1$.

Definición. Sea $M:[0,1]^n \to [0,1]$ una función de agregación n-dimensional.

- $a \in [0,1]$ es un aniquilador de M si $M(x_1, \ldots, x_n) = a$ siempre que $a \in \{ x_1, \ldots, x_n \}$.
- Si M no tiene aniquilador, M se dice estrictamente creciente si lo es en el dominio $[0,1]^n$ como función real de n variables. Si a es un aniquilador de M, si es estrictamente creciente en el dominio $([0, 1]\backslash\{a\})^n$.
- M tiene divisores de cero si existen $x_1, \ldots, x_n \in [0, 1]$ tales que $M(x_1, \ldots, x_n) = 0$.
- M es idempotente si $M(x_1, \ldots, x_n) = x$ para todo $x \in [0, 1]$.

Nos vamos a centrar en el caso de funciones de agregación en dimensión 2. Por ello, revisamos algunas propiedades que nos van a resultar de interés.

Definición. Sea M una función de agregación de dos variables.

- M es simétrica si $M(x, y) = M(y, x)$ para cualesquiera $x, y \in [0, 1]$.
- M es asociativa si $M(M(x, y), z) = M(x, M(y, z))$ para cualesquiera $x, y, z \in [0, 1]$.

La asociatividad permite extender las funciones de agregación bidimensionales a dimensiones mayores de una manera “razonable”. En particular, es una de las propiedades fundamentales que se demandan en la construcción de normas triangulares (t-normas).

Definición . Una norma triangular o t-norma es una función de agregación $T:[0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ asociativa y simétrica tal que $T(1, x) = x$ para todo $x \in [0, 1]$.

Las t-normas permiten modelar intersecciones entre conjuntos difusos. Ahora bien, si estamos trabajando con solo dos elementos, la asociatividad no es en principio una propiedad que deba ser requerida. Esta idea, la de poder representar la intersección sin necesariamente requerir la asociatividad nos lleva al concepto de función de solapamiento (función de overlap) que estudiamos a continuación.

B. *Funciones de Overlap*

En esta subsección recordamos algunos conceptos y resultados presentados en [3].

Definición Una función $O:[0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ es una función de solapamiento si

- O es simétrica;
- $O(x, y) = 0$ si y solo si $xy = 0$;
- $O(x, y) = 1$ si y solo si $xy = 1$;
- O es no decreciente;
- O es continua.

Podemos presentar el siguiente resultado sobre la relación entre funciones de solapamientos y t-normas.

Teorema. Sea O una función de solapamiento asociativa. Entonces O es una t-norma.

En cuanto a la construcción de funciones de overlap, es posible hacerlo de forma general tal y como muestra el siguiente resultado.

Teorema. La función $O:[0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ es una función de solapamiento si y solo si

$$O(x, y) = f(x, y) / (f(x, y) + h(x, y))$$

Con $f, h: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ tales que

- f y h son simétricas;
- f es no decreciente y h es no creciente;
- $f(x, y) = 0$ si y solo si $xy = 0$;
- $h(x, y) = 0$ si y solo si $xy = 1$;
- f y h son continuas;

III. El algoritmo de clúster gravitacional

A. *El Algoritmo Original*

El algoritmo de clúster gravitacional pretende hacer uso de la Ley de Gravitación Universal de Newton para llevar a cabo un proceso de clasificación no supervisado [2].

El esquema del algoritmo, tal y como figura en [2], es el siguiente:

Supongamos que tenemos n partículas $p_1, \ldots, p_n$, para las que conocemos sus posiciones $s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{R}^n$. Asignamos a cada partícula p_i una masa $m_i = 1$ para comenzar el algoritmo.

1. Fijamos dos parámetros reales positivos δ y ϵ.
   - Utilizamos δ para determinar la longitud de cada paso temporal dt. En concreto, en el intervalo [t, t + dt] la partícula que se mueva más deprisa debe desplazarse una distancia δ.
   - Si dos partículas están en algún momento a distancia menor que ϵ, las unimos en una partícula con masa igual a la suma de las masas original y posición dada por el centro de masas de las partículas originales.
2. Inicializamos el tiempo con t = 0.
3. Repetimos los pasos (i)-(iv) siguientes hasta que solo quede una partícula.
   (i). En cada intervalo de tiempo [t, t + dt], para cada partícula i calculamos el efecto gravitacional de las demás partículas sobre ella. En concreto:

$$g(i,t,dt) = \frac{1}{2} G \sum_{j \neq i} \frac{m_i(t) m_j(t)}{m_i(t)} \frac{s_j(t) - s_i(t)}{|s_j(t) - s_i(t)|} \frac{1}{|s_j(t) - s_i(t)|^2} dt^2 \quad (1)$$

   donde G es una constante positiva.
   (ii). Para cada partícula i, su nueva posición es: $s_i(t + dt) = s_i(t) + g(i, t, dt)$.
   (iii). Incrementamos el tiempo de t a t + dt.
   (iv). Si dos partículas i y j están a distancia (euclídea) menor que ϵ, se funden en una partícula como se ha explicado anteriormente.

Al final tenemos una sola partícula y, si el proceso ha durado un tiempo T, la siguiente evolución:

- De $t_n = 0$ a t_{n-1} había n partículas.
- De t_{n-1} a t_{n-2} había n-1 partículas.
- …
- De t_3 a t_2 había 3 partículas.
- De t_2 a t_1 había 2 partículas.

Definimos la vida relativa de la configuración de k clusters como

$$R_k = (t_k - t_{k-1}) / T$$

Tomamos como solución aquella configuración R_{k0} con la mayor vida relativa.

Nótese que en una iteración dada puede haber varias fusiones de partículas. El caso en que en t_k se tienen k partículas y en t_{k-1} pasa a haber k-2 partículas, se puede ver como que de t_k a t_{k-1} había k partículas, de t_{k-1} a t_{k-2} pasa a haber k-1 partículas y $t_{k-1} = t_{k-2}$, luego $R_{k-1} = 0$.

Este modelo puede generalizarse reemplazando (1) por

$$g(i,t,dt) = \sum_{j \neq i} \frac{m_i(t)^p m_j(t)^q}{m_i(t)} \frac{s_j(t) - s_i(t)}{|s_j(t) - s_i(t)|} \frac{1}{|s_j(t) - s_i(t)|^2} dt^2 \quad (2)$$

con p, q >= 0. En particular, los mejores resultados se obtienen cuando p = q = 0, obteniéndose el denominado modelo unitario de Markov

$$g(i,t,dt) = \frac{1}{m_i(t)} \sum_{j \neq i} \frac{s_j(t) - s_i(t)}{|s_j(t) - s_i(t)|} \frac{1}{|s_j(t) - s_i(t)|^2} dt^2 \quad (3)$$

Nótese que la constante G/2 se ha eliminado por tratarse únicamente de un valor heredado a partir de la ley de gravitación universal de Newton que no tiene un impacto útil en nuestro algoritmo, más allá del de escalar los valores obtenidos por la función g.

B. *Generalización Usando Overlaps*

En esta sección presentamos el contenido principal del trabajo: un nuevo algoritmo de clúster gravitacional que generaliza el mostrado en la sección anterior, reemplazando el factor $1/m_i(t)$ en la ecuación (3) por un término de la forma $O(1/m_i(t), 1)$ donde $O:[0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ es una función de overlap general. Ahora bien, dado que la función de overlap está definida sobre el cuadrado unidad $[0,1]^2$, en principio es necesaria una normalización. Esto puede hacerse considerando la función $O(m_i^{p-1}/n^{p-1}, m_j^q/n^q)$, con p, q > 0.

Sin embargo, dado que estamos interesados en el caso p, q próximos a cero (que es el que mejor funciona en el trabajo original), se tiene que esta función siempre es mayor o igual que $O(1/m_i(t), 1)$. La ecuación final a utilizar será la siguiente:

$$g(i,t,dt) = O\left(\frac{1}{m_i(t)}, 1\right) \sum_{j \neq i} \frac{s_j(t) - s_i(t)}{|s_j(t) - s_i(t)|} \frac{1}{|s_j(t) - s_i(t)|^2} dt^2 \quad (4)$$

Los overlaps que ofrecen resultados más prometedores, y que por tanto se utilizarán en la fase de experimentación son los siguientes:

$$O(x,y) = (x * y)^p \rightarrow O\left(\frac{1}{m_i}, 1\right) = \frac{1}{m_i^p} \quad (5)$$

$$O(x,y) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \max(1-x, 1-y)} \rightarrow O\left(\frac{1}{m_i}, 1\right) = \frac{\sqrt{\frac{1}{m_i}}}{\sqrt{\frac{1}{m_i}} + \max\left(1 - \frac{1}{m_i}, 0\right)} \quad (6)$$

IV. Experimentación

A. *Pruebas*

Para las pruebas se utilizaron una serie de datasets sintéticos bidimensionales con el fín de comprobar en qué casos se obtienen los mejores resultados para cada uno de los overlaps. Los datasets utilizados se representan visualmente en las Figs. 1-6.

Las pruebas se realizaron utilizando tanto métricas de evaluación interna (Dunn-Index [10]) como de evaluación externa (Purity, Rand-Index [11]). Se compararon los resultados del algoritmo empleando cada uno de los overlaps con el modelo unitario de Markov, el algoritmo K-means [12] y el Fuzzy c-Means (FCM) [13].

Para estos dos últimos algoritmos se realizaron 100 ejecuciones y se tomaron los mejores valores obtenidos, buscando evitar el problema de caer en óptimos locales. Para el algoritmo gravitacional se asignaron valores tomados de 0.01 en 0.01 en [0.1, 1] para δ, y de $\epsilon = 2\delta$. Como parámetro p para (5) se utilizó el valor 20, con el objetivo de que las masas grandes se vieran muy penalizadas. En las tablas se reflejan tanto los valores medios obtenidos tras todas las ejecuciones, como los valores máximos. La columna izquierda hace referencia al dataset para el cuál se han obtenido los resultados (Figs. 1-6).

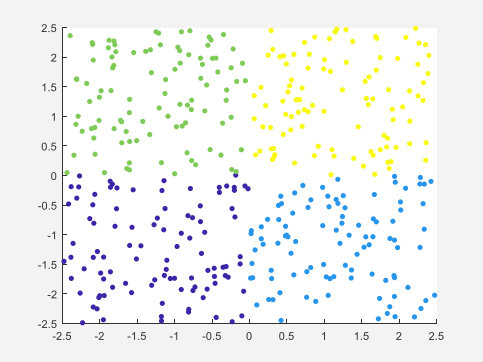


Fig. 1. Dataset "4 squares"

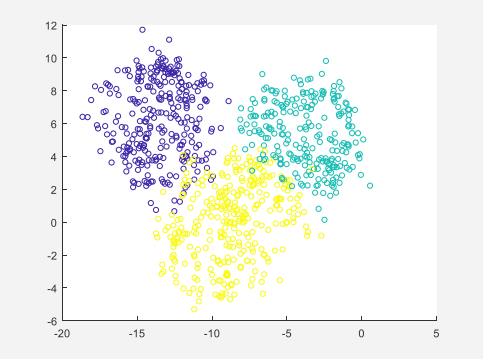


Fig. 2. Dataset "3 close circles"

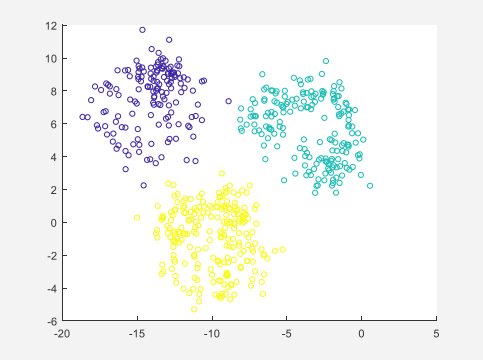


Fig. 3. Dataset "3 circles"

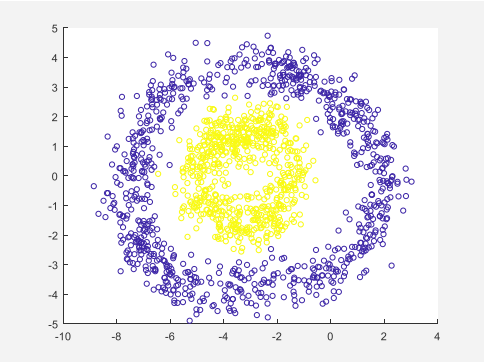


Fig. 4. Dataset "2 concentric rings"

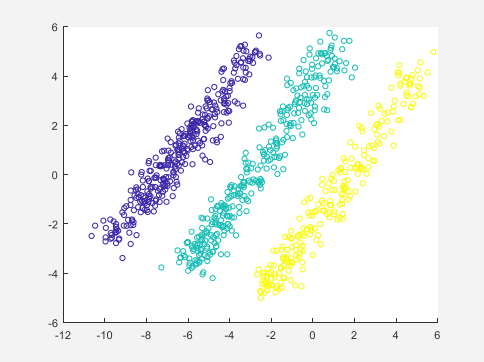


Fig. 5. Dataset "3 stripes"

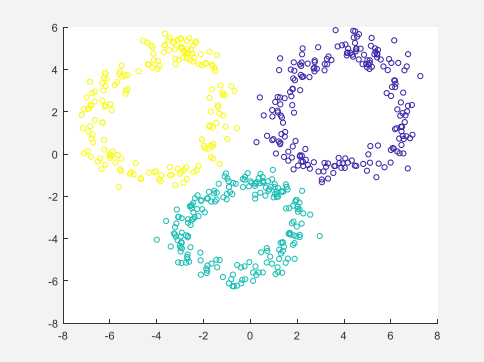


Fig. 6. Dataset "3 rings"

	Dunn-Index							
	(5)		*(6)*		*Modelo unitario*		*K-means*	*FCM*
	Mean	*Max*	*Mean*	*Max*	*Mean*	*Max*		
1	0,508	0,682	0,577	0,682	0,578	0,682	**0,743**	0,736
2	0,633	0,690	0,621	**0,691**	0,641	**0,691**	0,688	0,685
3	0,848	0,861	0,859	0,860	0,858	0,860	**0,932**	**0,932**
4	0,386	0,464	0,468	**0,497**	0,464	**0,497**	0,464	0,438
5	0,378	0,579	0,442	**0,596**	0,432	0,586	0,467	0,485
6	0,519	0,831	0,631	0,758	0,621	0,715	**0,874**	0,848

[a.] Tabla 1 – Comparación de índice Dunn entre los algoritmos para los datasets 1-6

	Purity							
	(5)		*(6)*		*Modelo unitario*		*K-means*	*FCM*
	Mean	*Max*	*Mean*	*Max*	*Mean*	*Max*		
1	0,784	0,893	0,807	0,910	0,810	0,900	**0,988**	0,983
2	0,859	0,946	0,856	**0,948**	0,852	0,920	0,901	0,901
3	0,991	**0,998**	0,996	**0,998**	0,996	**0,998**	**0,998**	**0,998**
4	0,577	0,628	0,622	**0,713**	0,624	0,705	0,570	0,570
5	0,670	**0,928**	0,564	0,642	0,569	0,690	0,697	0,690
6	0,806	**0,998**	0,788	0,916	0,784	0,916	0,960	0,960

[b.] Tabla 2 – Comparación de Purity entre los algoritmos para los datasets 1-6

	Rand-Index							
	(5)		*(6)*		*Modelo unitario*		*K-means*	*FCM*
	Mean	*Max*	*Mean*	*Max*	*Mean*	*Max*		
1	0,822	0,901	0,834	0,917	0,838	0,907	**0,988**	0,983
2	0,843	**0,931**	0,840	**0,931**	0,836	0,902	0,884	0,884
3	0,989	**0,998**	0,995	**0,998**	0,994	**0,998**	**0,998**	**0,998**
4	0,507	0,532	0,533	**0,591**	0,533	0,584	0,501	0,501
5	0,718	**0,905**	0,626	0,702	0,633	0,719	0,762	0,754
6	0,812	**0,998**	0,741	0,900	0,735	0,900	0,949	0,949

[c.] Tabla 3 – Comparación de índice Rand entre los algoritmos para los datasets 1-6

B. *Resultados*

Lo primero que se puede observar es que no siempre existe una relación directa entre los mejores resultados para la evaluación interna y los de la externa. Esto supone un problema, dado que dificulta la búsqueda de los parámetros óptimos para el algoritmo en los casos en que carecemos de información sobre las clasificaciones a priori, que serán la mayoría.

Si nos fijamos en las medidas de evaluación externa, sin embargo, vemos que el modelo usando (6) tiende a mejorar el mejor resultado del modelo clásico, mientras que suele ofrecer valores similares en media. Por tanto, parece una alternativa razonable al mismo. En concreto, obtiene los mejores resultados de cualquier método cuando opera con datasets circulares, del mismo modo que cuando lo hace con el dataset de la Fig. 4, aunque en este caso los resultados son mediocres.

En el caso del overlap indicado en (5) tenemos que se obtienen valores con mucha varianza para la mayoría de datasets. No obstante, se obtienen resultados más que aceptables al trabajar con los dos últimos, casos en los que ninguna de las alternativas del algoritmo ofrece buenos resultados. Esto parece deberse a la gran penalización de las partículas con masas mayores. El modo de trabajo del algoritmo asegura que en todas las iteraciones, una partícula se desplazará la distancia δ. En este caso también sucede así, pero el resto de partículas de masa mayor se desplazan distancias ínfimas, de modo que cuando se tiene un número elevado de partículas, en cada iteración tiende a moverse una sola, obteniéndose un funcionamiento similar al del algoritmo "single-linkage" [15], que opera bien con conjuntos de datos de esta forma.

V. Conclusiones y Futuros Trabajos

Las pruebas realizadas parecen apuntar a una mejoría del funcionamiento del algoritmo cuando se utilizan los overlaps propuestos en ciertos casos concretos. Además, lo dotan de una mayor capacidad de adaptación a conjuntos de datos de forma no circular, problema con el que no pueden tratar otro tipo de técnicas.

En cualquier caso, resulta importante recalcar que nuestro caso sigue siendo una generalización del algoritmo original, por lo que siempre se puede recuperar el funcionamiento clásico.

Esta generalización abre la puerta a un estudio en mayor profundidad que permita extender la generalización empleando funciones de overlap a funciones de otro tipo, consiguiendo posiblemente comportamientos mejores. Del mismo modo, puede haber alternativas a la distancia euclidiana a tener en cuenta a la hora de calcular la distancia entre partículas. Ambas posibilidades se tendrán en cuenta para futuros trabajos.

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el proyecto de investigación TIN2016-77356-P (MINECO/UE/FEDER) del Gobierno de España.

Referencias

[1] A. Saxena, M. Prasad, A. Gupta, N. Bharill, O. Prakash Patel, A. Tiwari, E. M. Joo, D. Weiping, L. Chin-Teng, “A review of clustering techniques and developments,” in Neurocomputing, vol. 267, pp.664-681, 2017

[2] W. E. Wright, “Gravitational clustering”, in Pattern Recognition, Pergamon Press 9, 1977, pp.151-166

[3] H. Bustince, J. Fernandez, R. Mesiar, J. Montero, R. Orduna, “Overlap functions,” in Nonlinear Analysis, vol. 72, pp.1488-1499, 2010

[4] A. Jurio, H. Bustince, M. Pagola, A. Pradera, R. R. Yager, “Some properties of overlap and grouping functions and their application to image thresholding,” in Fuzzy Sets and Systems, vol. 229, pp.69-90, 2013

[5] D. Gómez, J. T. Rodríguez, J. Montero, H. Bustince, E. Barrenechea, “n-Dimensional overlap functions,” in Fuzzy Sets and Systems, vol. 287, pp.57-75, 2016

[6] D. Paternain, H. Bustince, M. Pagola, P. Sussner, A. Kolesrov, R. Mesiar, “Capacities and overlap indexes with an application in fuzzy rule-based classification systems,” in Fuzzy Sets and Systems, vol. 305, pp.70-94, 2016

[7] M. Minárová, D. Paternain, A. Jurio, J. Ruiz-Aranguren, Z. tak, H. Bustince, “Modifying the gravitational search algorithm: A functional study,” in Information Sciences, vol. 430, pp.87-103, 2018

[8] E. Rashedi, H. Neamabadi-Pour, S. Sariazdi, “GSA: a gravitational search algorithm,” in Information Sciences, vol 179, pp.2232-2248, 2009

[9] M. Grabisch, J. Marichal, R. Mesiar, E. Pap. Aggregation Functions, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 127, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[10] J. C. Dunn, “Well-separated clusters and optimal fuzzy partitions,” in Journal of Cybernetics, vol. 4, pp.95-104, 1973

[11] D. L. Davies, D. W. Bouldin, “A cluster separation measure,” in IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. PAMI-1, pp.224-227, 1979

[12] D. Arthur, S. Vassilvitskii, “K-means++: the advantages of careful seeding,” in Proceedings of the Eighteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, New Orleans, 2007

[13] J. C. Bezdek, R. Ehrlich, W. Full, “FCM: the fuzzy c-means algorithm,” in Computer & Geosciences, vol. 10, pp.191-203, 1984

[14] R. Sibson, “SLINK: an optimally efficient algorithm for the single-link cluster method,” in The Computer Journal, vol. 16, pp.30-34, 1973

Una definición de la Integral de Choquet intervalo-valorada basada en permutaciones admisibles

Daniel Paternain, Laura De Miguel, Gustavo Ochoa, Inmaculada Lizasoain, Humberto Bustince
Departamento de Estadística, Informática y Matemáticas
Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España
{daniel.paternain,laura.demiguel,ochoa,ilizasoain,bustince}@unavarra.es

Radko Mesiar
Department of Mathematics and Descriptive Geometry, Faculty of Civil Engineering,
Slovak University of Technology, Bratislava, Eslovaquia,
mesiar@math.sk

***Abstract*—La agregación o fusión de datos intervalo-valorados no es una tarea trivial. Esto es debido a que para aplicar determinadas funciones de agregación es necesario ordenar totalmente los datos a agregar. Para solucionar el problema del orden, en la literatura podemos encontrar soluciones basadas en el concepto de orden admisible. Tras analizar las ventajas e inconvenientes de esta propuesta, en este trabajo proponemos el concepto de permutación admisible y de integral de Choquet intervalo-valorada basada en permutaciones admisibles. Este nuevo operador nos permite agregar de una manera efectiva un conjunto de intervalos solucionando los problemas encontrados en las propuestas basadas en órdenes admisibles.**

***Index Terms*—Agregación, Fusión, Integral de Choquet, intervalos, permutación admisible.**

I. Introducción

La fusión de información es un paso clave en multitud de aplicaciones del mundo real, dado que en casi todas ellas es necesario combinar o fusionar en algún momento varias fuentes de información en un único valor representativo [2], [3], [11]. Ejemplos de dichas aplicaciones son la toma de decisiones multi-experto y multi-criterio, la fusión de sensores, el procesamiento digital de imágenes, la minería de datos o el aprendizaje automático, entre otros.

Cuando el proceso de fusión de información tiene un alto grado de incertidumbre asociada a los datos, las extensiones de los conjuntos difusos pueden ser muy útiles para manejar dicha incertidumbre [1], [4], [8]. Algunas extensiones que han sido muy utilizadas en la literatura son los conjuntos intervalo-valorados difusos, los conjuntos intuicionistas de Atanassov o los tipo-2. En este trabajo nos centramos en la fusión de información intervalo-valorada, ya que con una complejidad reducida, los intervalos permiten tratar la incertidumbre de manera efectiva. Ejemplos de la utilización de información intervalo-valorada pueden ser la información proveniente de los sensores, que es convertida a un intervalo de confianza teniendo en cuenta la precisión del propio instrumento; o en toma de decisiones, los intervalos pueden ser una herramienta muy útil para los expertos cuando éstos no son capaces de asignar una puntuación exacta a una alternativa/criterio.

Sin embargo, la extensión de algunas funciones de agregación para manejar información intervalo-valorada no es trivial. Concretamente, tenemos en mente funciones como los operadores OWA o la integral de Choquet, donde es necesario ordenar los datos de entrada antes de ser fusionados. El problema surge debido a que el orden natural entre intervalos es un orden parcial y, por tanto, existen elementos incomparables que no pueden ser ordenados.

Para solucionar el problema del orden en las funciones de agregación intervalo-valoradas, en [5] se propuso una solución basada en la construcción de órdenes admisibles a partir de una pareja de funciones. Basándose en el concepto de orden admisible, en [6] se propuso una nueva definición de la integral de Choquet intervalo-valorada en la que los datos se ordenaban mediante la elección de un orden admisible. Sin embargo, aunque el problema del orden estaba solucionado, surge un nuevo problema: la elección del orden admisible más apropiado. Parece razonable pensar que si en una aplicación elegimos un mal orden admisible, los resultados de la fusión de información pueden ser contraproducentes para el resultado final de la aplicación. Se podría pensar que probando muchos órdenes admisibles se soluciona dicho problema, pero debemos tener en cuenta que: (1) podemos definir infinitos órdenes admisibles y (2) muchos órdenes admisibles son equivalentes entre sí, produciendo la misma ordenación de los datos.

Para solucionar el problema de la elección de un orden admisible concreto, en este trabajo proponemos el concepto de permutación admisible. Este concepto nos permite identificar de cuántas maneras diferentes podemos ordenar un conjunto finito de intervalos respetando en todo momento las restricciones impuestas por el orden parcial. Así, si tenemos en cuenta únicamente las permutaciones admisibles de un conjunto de intervalos podemos aislarnos de la elección de un orden admisible concreto. Basándonos en este concepto,

en este trabajo proponemos además una nueva aproximación para la integral de Choquet intervalo-valorada que tiene en cuenta todas las formas posibles de ordenar el conjunto de intervalos a ordenar y obtiene el resultado final realizando un promedio de todas ellos.

Este trabajo se organiza de la siguiente manera: en la Sección 2 recordamos los conceptos preliminares necesarios para entender el resto del trabajo. En la Sección 3 recordamos el concepto de orden admisible y de integral de Choquet basada en órdenes admisibles. En la Sección 4 proponemos el concepto de permutación admisible y de integral de Choquet basada en permutaciones admisibles y estudiamos algunas de sus propiedades. Finalmente, comentamos las conclusiones y líneas futuras en la Sección 5.

II. Preliminares

Comenzamos esta sección recordando el concepto de función de agregación en conjuntos parcialmente ordenados.

Definición 1: [12] Sea $(L, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado acotado con un elemento mínimo 0_L y un elemento máximo 1_L. Una función $M : L^n \to L$ es una función de agregación si satisface las siguientes propiedades:

(i) $M(0_L, \ldots, 0_L) = 0_L$ y $M(1_L, \ldots, 1_L) = 1_L$;
(ii) es creciente en cada argumento, es decir, para todo $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in L^n$, $M(x_1, \ldots, x_n) \preceq M(y_1, \ldots, y_n)$ si $x_1 \preceq y_1, \ldots, x_n \preceq y_n$.

Obsérvese que si L es el intervalo unidad junto con el orden habitual de los números reales, entonces obtenemos la definición usual de función de agregación [2], [3], [11].

En este trabajo nos centramos en la agregación de información intervalo-valorada. Por eso, tomamos $L = L([0,1])$ como el conjunto de todos los subintervalos cerrados del intervalo $[0,1]$:

$$L([0,1]) = \{\mathbf{x} = [\underline{x}, \overline{x}] | 0 \leq \underline{x} \leq \overline{x} \leq 1\}.$$

Nótese que $L([0,1])$ es un conjunto parcialmente ordenado con respecto a la relación de orden $\leq_L$ definida de la siguiente manera: para cada $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L([0,1])$,

$$\mathbf{x} \leq_L \mathbf{y} \text{ si y solo si } \underline{x} \leq \underline{y} \text{ y } \overline{x} \leq \overline{y}.$$

De hecho, $(L([0,1]), \leq_L)$ es un retículo completo donde el elemento mínimo es $0_L = [0,0]$ y el máximo es $1_L = [1,1]$ ([10]). En este retículo, el ínfimo y supremo de cada pareja de elementos viene dado, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 &= [\min(\underline{x}_1, \underline{x}_2), \min(\overline{x}_1, \overline{x}_2)] \\ \mathbf{x}_1 \vee \mathbf{x}_2 &= [\max(\underline{x}_1, \underline{x}_2), \max(\overline{x}_1, \overline{x}_2)]. \end{aligned}$$

Ejemplo 1: Los siguientes son ejemplos de funciones de agregación intervalo-valorada:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{arith}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) &= \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underline{x}_i, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i\right]; \\ \mathbf{M}_{min}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) &= \left[\min_{i=1,\ldots,n} \underline{x}_i, \min_{i=1,\ldots,n} \overline{x}_i\right]; \\ \mathbf{M}_{max}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) &= \left[\max_{i=1,\ldots,n} \underline{x}_i, \max_{i=1,\ldots,n} \overline{x}_i\right]. \end{aligned}$$

A. Medidas difusas y la integral de Choquet

Antes de definir el concepto de integral de Choquet, recordamos el concepto de medida difusa (ver [14], [15]).

Definición 2: Sea $X = \{1, \ldots, n\}$. Una medida difusa definida sobre X es una función $m : 2^X \to [0,1]$ tal que

(i) $m(\emptyset) = 0$ y $m(X) = 1$;
(ii) si $E \subset F$, entonces $m(E) \leq m(F)$.

Ejemplo 2:

- La medida difusa más pequeña viene dada por

$$m_*(E) = \begin{cases} 1 & \text{si } E = X; \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

  Obsérvese que para cualquier medida difusa m sobre X se cumple que $m_*(E) \leq m(E)$, para todo $E \subseteq X$.
- La medida difusa más grande viene dada por

$$m^*(E) = \begin{cases} 0 & \text{si } E = \emptyset; \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

  Obsérvese que para cualquier medida difusa m sobre X, se cumple que $m(E) \leq m^*(E)$ para todo $E \subseteq X$.

Definición 3: [9] Sea $m : 2^X \to [0,1]$ una medida difusa. La integral de Choquet discreta de $x_1, \ldots, x_n \in [0,1]$ con respecto a m viene dada por

$$\begin{aligned} C_m(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_{\sigma(i)} (m(\{\sigma(i), \ldots, \sigma(n)\}) - \\ m(\{\sigma(i+1), \ldots, \sigma(n)\})) \end{aligned} \quad (1)$$

donde $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ es una permutación tal que $x_{\sigma(1)} \leq \cdots \leq x_{\sigma(n)}$ y donde tomamos $\{x_{\sigma(n+1)}, x_{\sigma(n)}\} = \emptyset$.

III. El concepto de orden admisible y la integral de Choquet basada en órdenes admisibles

Como hemos visto en la Sección 2, el orden $\leq_L$ definido en $L([0,1])$ es un orden parcial. Esto significa que no siempre es posible comparar (ordenar) dos intervalos cualesquiera. Sin embargo, sabemos que muchas funciones de agregación, como la integral de Choquet, los operadores OWA o la integral de Sugeno, están basadas en la ordenación total de los datos de entrada. De esta manera, si queremos extender dichas funciones para agregar información intervalo-valorada, necesitamos solucionar el problema del orden.

Una primera solución a este problema fue dada en [5] mediante el concepto de orden admisible. Un orden admisible

es un orden lineal definido en $L([0,1])$ que refina el orden parcial $\leq_L$.

Definición 4: [5] Sea $(L([0,1]), \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Decimos que el orden $\preceq$ definido en $L([0,1])$ es un orden admisible si

(i) $\preceq$ es un orden lineal en $L([0,1])$;
(ii) para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L([0,1])$ con $\mathbf{x} \leq_L \mathbf{y}$, se tiene $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}$.

Ejemplo 3: Los siguientes son ejemplos de órdenes admisibles:

(i) $\mathbf{x} \preceq_{Lex1} \mathbf{y}$ (orden lexicográfico habitual en $\mathcal{R}^2$) si y solo si $\underline{x} < \underline{y}$ o ($\underline{x} = \underline{y}$ y $\overline{x} \leq \overline{y}$);
(ii) $\mathbf{x} \preceq_{Lex2} \mathbf{y}$ si y solo si $\overline{x} < \overline{y}$ o ($\overline{x} = \overline{y}$ y $\underline{x} \leq \underline{y}$);
(iii) $\mathbf{x} \preceq_{XY} \mathbf{y}$ (orden de Xu-Yager dado en [17]) si y solo si $\underline{x} + \overline{x} < \underline{y} + \overline{y}$ o ($\underline{x} + \overline{x} = \underline{y} + \overline{y}$ y $\overline{y} - \underline{y} \leq \overline{x} - \underline{x}$).

Una de las posibles formas de construcción de órdenes admisibles es mediante la utilización de dos funciones de agregación en $[0,1]$ que satisfacen determinadas propiedades. Sea $K([0,1]) = \{(\underline{x}, \overline{x}) \in [0,1]^2 | \underline{x} \leq \overline{x}\}$.

Proposición 1: [5] Sean $A, B : [0,1]^2 \to [0,1]$ dos funciones de agregación definidas en $[0,1]$ tales que, para todo $(x,y),(u,v) \in K([0,1])$, las igualdades $A(x,y) = A(u,v)$ y $B(x,y) = B(u,v)$ se cumplen simultáneamente solo si $(x,y) = (u,v)$. Definamos la relación $\preceq_{\mathrm{A,B}}$ en $L([0,1])$ dada por $\mathbf{x} \preceq_{\mathrm{A,B}} \mathbf{y}$ si y solo si

$$A(\underline{x}, \overline{x}) < A(\underline{y}, \overline{y}) \quad \text{o} \tag{2}$$

$$\left(A(\underline{x}, \overline{x}) = A(\underline{y}, \overline{y}) \quad \text{y} \quad B(\underline{x}, \overline{x}) \leq B(\underline{y}, \overline{y})\right). \tag{3}$$

Entonces, $\preceq_{\mathrm{A,B}}$ es un orden admisible de $L([0,1])$.

A. La integral de Choquet basada en órdenes admisibles

A raíz de la obtención de un método de construcción de órdenes admisibles entre intervalos, en [6] los autores propusieron una nueva definición de operador OWA y de integral de Choquet intervalo-valorados basados en órdenes admisibles. La principal característica de esta nueva aproximación es que los datos de entrada son ordenados en función de un orden admisible fijado previamente. En este sentido, si fijamos los datos a agregar, podemos obtener tantas integrales de Choquet (operadores OWA) diferentes como órdenes admisibles.

Definición 5: Sea $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in L([0,1])$ y sea $m : 2^X \to [0,1]$ una medida difusa. La integral de Choquet respecto al orden admisible $\preceq_{\mathrm{A,B}}$, con notación $\mathbf{C}_m^{\preceq_{\mathrm{A,B}}}$, viene dada por

$$\mathbf{C}_m^{\preceq_{\mathrm{A,B}}}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_{\sigma_{A,B}(i)} (m(\{\sigma_{A,B}(i), \ldots, \sigma_{A,B}(n)\}) - m(\{\sigma_{A,B}(i+1), \ldots, \sigma_{A,B}(n)\}))$$

donde $\sigma_{A,B} : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ es una permutacion tal que

$$\mathbf{x}_{\sigma_{A,B}(1)} \preceq_{\mathrm{A,B}} \cdots \preceq_{\mathrm{A,B}} \mathbf{x}_{\sigma_{A,B}(n)}$$

y donde tomamos $\{\sigma_{A,B}(n), \sigma_{A,B}(n+1)\} = \emptyset$.

Una de las principales ventajas de esta nueva definición es el hecho de que $\mathbf{C}_m^{\preceq_{\mathrm{A,B}}}$ generaliza la definición usual de integral de Choquet definida en $[0,1]$, ya que

$$\mathbf{C}_m^{\preceq_{\mathrm{A,B}}}([x_1, x_1], \ldots, [x_n, x_n]) = [C_m(x_1, \ldots, x_n), C_m(x_1, \ldots, x_n)].$$

Además, si los datos de entrada son comparables con respecto al orden usual $\leq_L$, entonces obtenemos los mismos resultados que si aplicamos la integral de Choquet sobre los extremos inferiores y superiores.

Proposición 2: [6] Si $(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n), (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$ son comonótonos, es decir, para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$

$$(\underline{x}_i - \underline{x}_j)(\overline{x}_i - \overline{x}_j) \geq 0$$

entonces se cumple que $\mathbf{C}_m^{\preceq_{\mathrm{A,B}}}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) = \mathbf{C}_m(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ para cualquier pareja admisible de funciones de agregación (A, B).

Sin embargo, aunque el problema se resuelve parcialmente con esta aproximación, también tiene una desventaja: debemos fijar un orden admisible. Recordemos que existen infinitos órdenes admisibles y que, en general, no es sencillo identificar el orden admisible apropiado para cada problema. Por estas razones, la elección del orden admisible es un punto crucial de esta aproximación que intentamos resolver mediante el concepto de permutación admisible.

IV. El concepto de permutación admisible y la integral de Choquet basada en permutaciones admisibles

En esta sección proponemos una nueva aproximación a la integral de Choquet intervalo-valorada que permita resolver el problema de $\mathbf{C}_m^{\preceq_{\mathrm{A,B}}}$. De hecho, nuestra propuesta no se basa en la elección de un orden específico, sino que trata de tener en cuenta todos los órdenes admisibles posibles. Nótese que aunque exista la posibilidad de definir infinitos órdenes admisibles, cuando ordenamos un conjunto finito de intervalos, el número de permutaciones de dichas entradas es finito. Esto es debido a que muchos órdenes admisibles diferentes producen la misma ordenación de los datos y, por tanto, son equivalentes.

Ejemplo 4: Supongamos el orden admisible $\preceq_{A,B}$ dado por $A(x,y) = 0.5x + 0.5y$ y $B(x,y) = 0.4x + 0.6y$. La pareja de funciones (A, B) es admisible y, por tanto, el orden también. Supongamos ahora una segunda pareja de funciones admisibles (A, B') donde $B'(x,y) = 0.3x + 0.7y$. Bajo estas condiciones, si $\mathbf{x}_1 =_{A,B} \mathbf{x}_2$, entonces también ocurre que $\mathbf{x}_1 =_{A,B'} \mathbf{x}_2$; si $\mathbf{x}_1 \prec_{A,B} \mathbf{x}_2$, debemos distinguir dos casos: (1) Si $A(\underline{x}_1, \overline{x}_1) < A(\underline{x}_2, \overline{x}_2)$, entonces también $\mathbf{x}_1 \prec_{A,B'} \mathbf{x}_2$; (2) Si $A(\underline{x}_1, \overline{x}_1) = A(\underline{x}_2, \overline{x}_2)$, entonces por la definición de B' tenemos que $B(\underline{x}_1, \overline{x}_1) < B(\underline{x}_2, \overline{x}_2)$ implica que $B'(\underline{x}_1, \overline{x}_1) < B'(\underline{x}_2, \overline{x}_2)$ y por tanto $\mathbf{x}_1 \prec_{A',B'} \mathbf{x}_2$. De esta manera podemos ver que ambos órdenes son equivalentes. De hecho, cualquier otro orden $\preceq_{(A,B')}$ dado por $B'(x,y) = \alpha x + (1-\alpha)y$ con $\alpha < 0.5$ es equivalente al orden $\preceq_{A,B}$

Además, es importante mencionar que, dados n intervalos, no todas las $n!$ potenciales formas de ordenar dichos intervalos son admisibles. Recordemos que los órdenes admisibles refinan el orden parcial habitual $\leq_L$. De esta manera, dados $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in L([0,1])$ y una permutación $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$, si $\mathbf{x}_i <_L \mathbf{x}_j$, entonces debemos exigir que $\sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(j)$. Más aún, si $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_j$, entonces para cada k entre $\sigma^{-1}(i)$ y $\sigma^{-1}(j)$, debemos exigir que $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{\sigma(k)} = \mathbf{x}_j$.

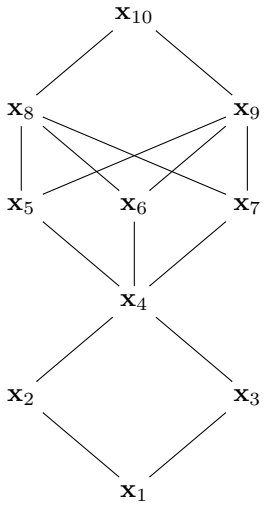
Basándonos en estas dos ideas, a continuación presentamos la definición de permutación admisible de un conjunto de intervalos.

Definición 6: Sean $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in L([0,1])$. Decimos que una permutación $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ de $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ es una permutación admisible respecto al orden parcial $\leq_L$ si

(i) para todo $\mathbf{x}_i <_L \mathbf{x}_j$, tenemos que $\sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(j)$;
(ii) para cada $\mathbf{x}_i$, el conjunto $\{\sigma^{-1}(j) | j \in \{1, \ldots, n\}$ with $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_j\}$ forma un intervalo en $\mathbb{N}$.

Obsérvese que la primera propiedad de la Definición 6 sirve para que no se altere el orden de los intervalos que sean comparables mediante el orden parcial, mientras que la segunda propiedad sirve para que los intervalos iguales sean ordenados de manera consecutiva.

Ejemplo 5: Consideremos un conjunto de 10 intervalos cuyas relaciones de orden vienen dadas en el siguiente diagrama de Hasse:



Para este conjunto de intervalos existe un total de 24 permutaciones admisibles: 2 formas de ordenar $\mathbf{x}_2$ y $\mathbf{x}_3$, 6 formas de ordenar $\mathbf{x}_5$, $\mathbf{x}_6$ y $\mathbf{x}_7$ y otras 2 formas de ordenar $\mathbf{x}_8$ y $\mathbf{x}_9$. Finalemente, $24 = 2 \times 6 \times 2$. Nótese que las restricciones impuestas a las permutaciones admisibles reducen las potenciales $10! = 3628800$ permutaciones de 10 elementos a únicamente 24 permutaciones admisibles.

A. La integral de Choquet basada en permutaciones admisibles

En la sección anterior hemos visto que la propuesta de integral de Choquet intervalo-valorada se basaba en la elección de un orden admisible concreto que permite ordenar completamente el conjunto de intervalos a agregar. La propuesta que hacemos en esta sección es algo diferente ya que, en lugar de fijar un orden concreto, tiene en cuenta todas las posibles formas de ordenar dicho conjunto de intervalos. De hecho, lo que proponemos es una agregación en dos pasos: en el primero, se calcula el conjunto de permutaciones admisibles de los datos; una vez calculados, se aplica la integral de Choquet utilizando dicha permutación de datos y el resultado final se agrega realizando un promedio que utiliza la media aritmética. De esta manera, la integral de Choquet que proponemos tiene en cuenta, de alguna manera, todas las posibles ordenaciones de los datos.

Definición 7: Sean $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in L([0,1])$ y sea $m : 2^n \to [0,1]$ una medida difusa. Sean $\sigma_1, \ldots, \sigma_p : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ el conjunto de las permutaciones admisibles de $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$. La integral de Choquet promedio $\mathbf{C}_m^{arith}$ respecto a m viene dada por

$$\mathbf{C}_m^{arith}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) = \mathbf{M}_{arith}(\mathbf{C}_m^{\sigma_1}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n), \ldots, \mathbf{C}_m^{\sigma_p}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)) \quad (4)$$

donde

$$\mathbf{C}_m^{\sigma_j}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_{\sigma_j(i)}(m(\{\sigma_j(i), \ldots, \sigma_j(n)\}) - m(\{\sigma_j(i+1), \ldots, \sigma_j(n)\}))$$

para todo $j \in \{1, \ldots, p\}$.

Ejemplo 6: Consideremos los siguientes intervalos que deber ser agregados mediante la integral de Choquet: $\mathbf{x}_1 = [0.1, 0.9]$, $\mathbf{x}_2 = [0.3, 0.5]$ y $\mathbf{x}_3 = [0.4, 0.8]$. Sea m una medida difusa dada por $m(\{\emptyset\}) = 0$, $m(\{1\}) = 0.3$, $m(\{2\}) = 0.5$, $m(\{3\}) = 0.4$, $m(\{1,2\}) = m(\{1,3\}) = 0.6$ y $m(\{2,3\}) = 0.8$.

Vamos a calcular la integral de Choquet respecto a todas las permutaciones admisibles. Obsérvese que $\mathbf{x}_1$ no es comparable a $\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ y que $\mathbf{x}_2 <_L \mathbf{x}_3$. Por tanto, existen 3 permutaciones admisibles, representadas en la siguiente matriz donde el elemento (i,j) representa $\sigma_i(j)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_m^{\sigma_1}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) &= [0.3, 0.7] \\ \mathbf{C}_m^{\sigma_2}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) &= [0.3, 0.7] \\ \mathbf{C}_m^{\sigma_3}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) &= [0.27, 0.71]. \end{aligned}$$

Por último, calculamos la media aritmética de todos los valores por cada permutación admisible y tenemos que

$$\mathbf{C}_m^{arith}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = [0.29, 0.703].$$

Para completar el estudio, vamos a analizar algunas de las propiedades más importantes de esta nueva integral de Choquet basada en permutaciones admisibles.

Proposición 3: Son ciertas las siguientes afirmaciones: :

(i) $\mathbf{C}_m^{arith}(\mathbf{x}, \ldots, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x} \in L([0,1])$;
(ii) $\inf\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\} \leq_L \mathbf{C}_m^{arith}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) \leq_L \sup\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ para todo $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in L([0,1])$;
(iii) $\mathbf{C}_m^{arith}([x_1, x_1], \ldots, [x_n, x_n]) = [C_m(x_1, \ldots, x_n), C_m(x_1, \ldots, x_n)]$ para todo $x_1, \ldots, x_n \in L([0,1])$;
(iv) si $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ forman una anticadena, entonces para cualquier medida difusa m, $\mathbf{C}_m^{arith}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) = \mathbf{M}_{arith}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$;

(v) si $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ forman una cadena, entonces $\mathbf{C}_m^{arith}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) = \mathbf{C}_m(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$.

En [7], [16], el concepto de monotonía ha sido sustituido por los conceptos más generales de monotonía débil y monotonía direccional. Utilizando estas generalizaciones de monotonía, el concepto de preagregación ha sido dado en [13]. Aunque la nueva definición de integral de Choquet que hemos definido en este trabajo no satisface la propiedad de monotonía tradicional, sí que satisface un tipo de monotonía direccional.

Proposición 4: La integral de Choquet basada en permutaciones admisibles es una preagregación respecto al vector $\vec{r} = \vec{1}$.

V. Conclusiones

En este trabajo hemos propuesto un nuevo mecanismo de fusión de intervalos basado en la integral de Choquet y en el concepto de permutación admisible. Esta nueva definición permite solucionar algunos problemas encontrados en soluciones anteriores, como la integral de Choquet basada en órdenes admisibles.

Como líneas futuras, nuestra intención es continuar estudiando las propiedades que cumple nuestra nueva definición y su relación con otro tipo de agregaciones intervalo-valoradas. Además, pretendemos extender esta definición a otros retículos y a otro tipo de funciones de agregación, como son los operadores OWA o la integral de Sugeno.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por MINECO, AEI/FEDER,UE bajo el proyecto TIN2016-77356-P y por los proyectos APVV-14-0013 y APVV-17-0066.

References

[1] K. Atanassov. Intuitionistic fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems 20 (1986) 87-96.
[2] G. Beliakov, H. Bustince, T. Calvo. A Practival guide to Averaging Functions. Studies in Fuzziness and Soft Computing 329, Springer, 2016.
[3] G. Beliakov, A. Pradera, T. Calvo. Aggregation Functions: A Guide for Practitioners. Studies in Fuzziness and Soft Computing 221, Springer, 2007.
[4] H. Bustince, Interval-valued fuzzy sets in soft computing. International Journal of Computational Intelligent Systems 3 (2010) 215-222.
[5] H. Bustince, J. Fernandez, A. Kolesárová, R. Mesiar, Generation of linear orders for intervals by means of aggregation functions. Fuzzy Sets and Systems 220 (2013) 69-77.
[6] H. Bustince, M. Galar, B. Bedregal, A. Kolesárová, R. Mesiar, A New Approach to Interval-Valued Choquet Integrals and the Problem of Ordering in Interval-Valued Fuzzy Set Applications. IEEE Transactions on Fuzzy Systems 21 (2013), 1150-1162.
[7] H. Bustince, J. Fernandez, A. Kolesárová, R. Mesiar. Directional monotonicity of fusion functions. European Journal of Operational Research 244 (2015) 300-308.
[8] H. Bustince, E. Barrenechea, M. Pagola, J. Fernandez, Z. Xu, B. Bedregal, J. Montero, H. hagras, F. Herrera, B. De Baets. A Historical Account of Types of Fuzzy Sets and Their Relationships. IEEE Transactions on Fuzzy Systems 24 (2016) 179-194.
[9] G. Choquet, Theory of capacities. Annales de l'Institute Fourier 5 (1954) 131-292.
[10] G. Deschrijver, C. Cornelus, E.E. Kerre. On the representation of intuitionistic fuzzy t-norms and t-conorms. IEEE Transactions on Fuzzy Systems 12 (2004) 45-61.
[11] M. Grabisch, J.-L. Marichal, R. Mesiar, E. Pap, Aggregation Functions. Cambridge University Press, 2009.
[12] M. Komorníková, R. Mesiar. Aggregation functions on bounded partially ordered sets and their classification. Fuzzy Sets and Systems 175 (2011) 48-56.
[13] G. Lucca, J. Sanz, G. P. Dimuro, B. Bedregal, R. Mesiar, A. Kolesárová, H. Bustince. Preaggregation Functions: Construction and an Application. IEEE Transactions on Fuzzy Systems 24 (2016) 260-272.
[14] D. Paternain, H. Bustince, M. Pagola, P. Sussner, A. Kolesárová and R. Mesiar. Capacities and overlap indexes with an application in fuzzy rule-based classification systems. Fuzzy Sets and Systems 305 (2016) 70-94.
[15] V. Torra, Y. Narukawa and M. Sugeno, Eds., Non-Additive Measures, Theory and Applications (Studies in Fuzziness and Soft Computing Series 310), Springer, 2014.
[16] T. Wilkin, G. Beliakov. Weakly Monotonic Averaging Functions. International Journal of Intelligent Systems 30 (2015) 144-169.
[17] Z. S. Xu, R. R. Yager, Some geometric aggregation operators based on intuitionistic fuzzy sets. International Journal of General Systems 35 (2006) 417-433.

Aggregation on relaxed indistinguishability operators based on different triangular norms

Tomasa Calvo Sánchez
University of Alcalá
Email: tomasa.calvo@uah.es

Pilar Fuster–Parra
University of Balearic Islands
Email: pilar.fuster@uib.es

Oscar Valero
University of Balearic Islands
Email: o.valero@uib.es

***Abstract*—We consider the aggregation problem of relaxed T_i–indistinguishability operators where each member of the collection to be merged is a relaxed indistinguishability operator with respect to a different t-norm T_i. Thus we provide sufficient conditions to merge a collection such an indistinguishability operators. Moreover, we give a characterization of those functions that allow to merge a collection of relaxed indistinguishability operators into a new one whenever all involved t–norms are continuos, Archimedean and strict. Namely, we characterize these functions in terms of the additive generator of the involved t-norms and those functions that transforms n-dimensional triangular triplets of the non-negative real line into a 1-dimensional triplet of the non-negative real line.**

I. Introduction

Aggregation functions constitute an important tool in the field of information fusion (see [4], [5], [7]). The information can be given by means of fuzzy relations what depends on different applications (see, for instance, [1], [13], [19], [26], [27], [34]). Sometimes the aggregation procedure used to take a working decision requires that the nature of the aggregated data be preserved. In the last decades, the problem of aggregating fuzzy relations has grown considerably among researchers in fuzzy mathematics (see [14], [21], [22], [28], [29], [31]). Motivated by the preceding fact, in [9], [10], we have carried out the study of the class preservation of relaxed T–indistinguishability operators by means of aggregation.

Let us recall that, on account of [32], a T-indistinguishability operator on a (non-empty) set X is a fuzzy relation $E : X \times X \to [0,1]$ satisfying for all $x, y, z \in X$ the following: (i) $E(x,x) = 1$, (ii) $E(x,y) = E(y,x)$, and (iii) $T(E(x,y), E(y,z)) \leq E(x,z)$. In general, a T–indistinguishability operator allows to classify objects when a measure presents some kind of uncertainty. They are also known as measures of similarity, in fact, the greater $E(x,y)$ the most similar are x and y. We assume that the reader is familiar with the basics of t–norms (see, for instance, [22]).

In the literature, we can found several authors that have analyzed the functions that allows to merge a collection of indistinguishability operators into a single one (see [28], [29], [31]). In particular, in [28] a characterization of those functions that aggregate indistinguishability operators have been given in terms of triangle triplets (compare [30]). Recently, the aforementioned description of the functions that aggregates indistinguishability operators have been extended by Mayor and Recasens in [24], now, in terms of T-triangular triplets.

Inspired by [24], recent results on the aggregation of relaxed T-indistinguishability operators have been developed in [9]. Now, let us recall that a relaxed T–indistinguishability operator on a (non–empty) set X is a fuzzy relation $E : X \times X \to [0,1]$ verifying for all $x, y, z \in X$ the following properties: (i) $E(x,y) = E(y,x)$ and (ii) $T(E(x,y), E(y,z)) \leq E(x,z)$. A relaxed T-indistinguishability operator E on a nonempty set X will be called a relaxed T-equality provided that it satisfies the following additional property for any $x, y, z \in X$: (i') $E(x,y) = E(x,x) = E(y,y) \Leftrightarrow x = y$.

There exist another measures very useful to classify objects that are related to (relaxed) T–indistinguishability operators, the so-called (extended) pseudo–metrics (see [12]). However, the extended pseudo-metrics are measures of dissimilarity. In the recent literature, different techniques to generate extended pseudo-metrics from indistinguishability operators, and vice-versa, have been developed (see, for example, [2], [3], [17], [20], [22], [25], [31], [33]).

It is clear that T–indistinguishability operators are relaxed T–indistinguishability operators. Nevertheless, the following is an instance of relaxed and partial indistinguishability operator that is not an indistinguishability one.

Example 1. *Let Σ be a non–empty alphabet. Denote by Σ^∞ the set of all finite and infinite sequences over Σ. Given $v \in \Sigma^\infty$ denote by $\mathrm{l}(v)$ the length of v. Thus $\mathrm{l}(v) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ for all $v \in \Sigma^\infty$. Moreover, if $\Sigma_F = \{v \in \Sigma^\infty : \mathrm{l}(v) \in \mathbb{N}\}$ and $\Sigma_\infty = \{v \in \Sigma^\infty : \mathrm{l}(v) = \infty\}$, then $\Sigma^\infty = \Sigma_F \cup \Sigma_\infty$ and we will write $v = v_1 v_2 \dots v_{l(v)}$ and $w = w_1 w_2 \dots$ whenever $v \in \Sigma_F$ and $w \in \Sigma_\infty$, respectively.*

Next, given $x, y \in \Sigma_\infty$, denote by $l(x,y)$ the longest common prefix of x and y (of course if x and y have not a common prefix then $l(x,y) = 0$).

Define the fuzzy relation E_Σ on $\Sigma^\infty \times \Sigma^\infty$ by $E_\Sigma(u,v) = 1 - 2^{-\mathrm{l}(v,w)}$ for all $u, v \in \Sigma^\infty$. Then it is a simple matter to check that E_Σ is a relaxed $T_{\min}$–indistinguishability operator on Σ^∞. In fact, it is a relaxed $T_{\min}$-equality on Σ^∞. Note that $T_{\min}$ denotes the minimum t–norm.

Note that E_Σ is not a indistinguishability operator, since $E_\Sigma(u,u) = 1 \Leftrightarrow u \in \Sigma_\infty$.

As we have mentioned before, the study of the class preservation of relaxed T–indistinguishability operators by means of aggregation was carried out in [9], [10]. Now we focus our attention on the similar preservation problem when

a collection of T_i–indistinguishability operators belonging to the aforesaid class under consideration and in such a way that each member of the collection to be merged is a relaxed indistinguishability operator with respect to different t-norm T_i and all of them are defined on the same set.

Thus, in this work, we provide sufficient conditions to merge a collection of relaxed indistinguishability operators in Section II. Concretely, we see that a dominance condition is sufficient to guarantee that a function aggregates relaxed T_i–indistinguishability operators. Furthermore, we give a characterization of those functions that allow to merge a collection of relaxed indistinguishability operators into a new one whenever all involved t–norms are continuos, Archimedean and strict. Namely, we characterize these functions in terms of the additive generator of the involved t-norms and those functions that transforms n-dimensional triangular triplets of the positive real line into a 1-dimensional triplet of the positive real line. Finally, in Section III, some conclusions are given and future work is proposed.

II. The Aggregation of Relaxed T_i–Indistinguishability Operators

First of all we introduce the notion of relaxed T_i–indistinguishability operator aggregation function as follows.

Definition 1. *A function $F : [0,1]^n \to [0,1]$ aggregates relaxed T_i–indistinguishability operators into a relaxed T-indistinguishability operator if $F(E_1,\dots,E_n)$ is a relaxed T–indistinguishability operators on X for any set X and any collection $(E_1,\dots,E_n)$ of relaxed T_i–indistinguishability operators on X, where $F(E_1,\dots,E_n)$ is the fuzzy binary relation given by $F(E_1,\dots,E_n)(x,y) = F(E_1(x,y),\dots,E_n(x,y))$.*

Notice that Definition 1 extends the notion given in [9]. In the light of the preceding concept we have the next result.

Proposition 1. *Let T be a t–norm and let $E_i, i = 1,\dots,n$, be a collection of relaxed T_i–indistinguishability operators. If a function $F : [0,1]^n \to [0,1]$ is increasing and satisfies $T(F(a),F(b)) \leq F(T_1(a_1,b_1)),\dots,T_n(a_n,b_n))$ for all $\mathbf{a},\mathbf{b} \in [0,1]^n$, then $F(E_1,\dots,E_n)$ is a relaxed T–indistinguishability operator.*

Proof. To prove that $F(E_1,\dots,E_n)$ is a relaxed T-indistinguishability operator, we only need to show the T-transitivity condition of $F(E_1,\dots,E_n)$ because the symmetry follows directly from the symmetry of each E_i relaxed T_i–indistinguishability operator.

Now, as each E_i is a relaxed T_i–indistinguishability operator we have that $T_i(E_i(x,y),E_i(y,z)) \leq E_i(x,z)$ for all $i = 1,\dots,n$. Since F is an increasing function we get $F(T_1(E_1(x,y),E_1(y,z)),\dots,T_n(E_n(x,y),E_n(y,z))) \leq F(E_1(x,z),\dots,E_n(x,z))$.

Calling $\mathbf{a} = (E_1(x,y),\dots,E_n(x,y))$, $\mathbf{b} = (E_1(y,z),\dots,E_n(y,z))$ and $\mathbf{c} = (E_1(x,z),\dots,E_n(x,z))$ we obtain that $T(F(E_1,\dots,E_n)(x,y),F(E_1,\dots,E_n)(y,z)) = T(F(E_1(x,y),\dots,E_n(x,y)),F(E_1(y,z),\dots,E_n(y,z))) = T(F(a),F(b)) \leq F(T_1(a_1,b_1)),\dots,T_n(a_n,b_n)) = F(T_1(E_1(x,y),E_1(y,z)),\dots,T_n(E_n(x,y),E_n(y,z))) \leq F(E_1(x,z),\dots,E_n(x,z))$. Therefore, $F(E_1,\dots,E_n)$ is a relaxed T-indistinguishability operator. □

According to the previous result, it seems natural to wonder whether the converse of Proposition 1 is true in general. However, the next example, which was given in [9], shows that there are relaxed T_i-indistinguishability aggregation functions that are not increasing.

Example 2. *Denote by T_D the Drastic t-norm. Consider the function $F : [0,1]^2 \to [0,1]$ defined by*

$$F(\mathbf{a}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{a} = (1,1) \\ 0, & \mathbf{a} = (1/2,1/2) \\ 1/2, & \textit{otherwise} \end{cases}$$

for all $\mathbf{a} \in [0,1]^2$. It is not hard to check that F aggregates T_D–indistinguishability operators. However F is not an increasing function due to $F(1/2,0) \leq F(0,0)$.

When the collection of $n+1$–t-norms T, T_i, are such that $T \leq T_i$, for all $i = 1,\dots,n$, the following result can be stated.

Proposition 2. *Let T be a t–norm and let $E_i, i = 1,\dots,n$, be a collection of relaxed T_i–indistinguishability operators. If $T \leq T_i$ for all $i = 1,\dots,n$, then $T(E_1,\dots,E_n)$ is a relaxed T–indistinguishability operator.*

Proof. First of all we show the transitivity condition. On the one hand, by the commutativity and associativity of T, we have that

$$T(T(E_1(x,y),\dots,E_n(x,y)),T(E_1(y,z),\dots,E_n(y,z))) = T(T(E_1(x,y),E_1(y,z)),\dots,T(E_n(x,y),E_n(y,z))).$$

On the other hand, the monotony of T and the fact that $T \leq T_i$ provide that

$$T(T(E_1(x,y),E_1(y,z)),\dots,T(E_n(x,y),E_n(y,z))) \leq T(T_1(E_1(x,y),E_1(y,z)),\dots,T_n(E_n(x,y),E_n(y,z))).$$

Since $T_i(E_i(x,y),E_i(y,z)) \leq E_i(x,z)$ for all $i = 1,\dots,n$ we have that

$$T(T_1(E_1(x,y),E_1(y,z)),\dots,T_n(E_n(x,y),E_n(y,z))) \leq T(E_1(x,z),\dots,E_n(x,z)).$$

It follows that

$$T(T(E_1,\dots,E_n)(x,y),T(E_1,\dots,E_n)(y,z)) \leq T(E_1,\dots,E_n)(x,z).$$

This means that $T(E_1,\dots,E_n)$ is a T-transitive relation. As the symmetry of this relation is always guaranteed by the symmetry of T, we conclude that $T(E_1,\dots,E_n)$ is a relaxed T-indistinguishability operator. □

As an example, in the spirit of the above proposition, we can choose $T = T_D$ and $T_i = T_P$ for all $i = 1,\dots,n$. Then, by Proposition 2, $T_D(E_1,\dots,E_n)$ is a relaxed T_D–indistinguishability operator when E_i is a collection of T_P–indistinguishability operators, since $T_D \leq T_P$.

In order to introduce the announced characterization of those functions that merge relaxed T_i–indistinguishability operators, we need to recall the following notion which was provided in [6].

Definition 2. *A triplet $(a,b,c) \in [0,\infty]^3$ is said to be (1-dimensional) triangular if and only if $a \leq b+c$, $b \leq a+c$ and $c \leq a+b$. Being $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c} \in [0,\infty]^n$, $n \geq 1$, we say that $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ is a (n-dimensional) triangular triplet if (a_i,b_i,c_i) is a triangular triplet for all $i=1,\ldots,n$, where $\mathbf{a}=(a_1,\ldots,a_n)$, $\mathbf{b}=(b_1,\ldots,b_n)$ and $\mathbf{c}=(c_1,\ldots,c_n)$.*

Taking into account the preceding notion we provide the following characterization.

Theorem 1. *Let $T,T_1,\ldots T_n$ be strict and continuos Archimedean t–norms. The following assertions are equivalent:*

1) *A function $F:[0,1]^n \to [0,1]$ aggregates a collection of n relaxed T_i –indistinguishability operators E_i into a relaxed T–indistinguishability operator.*
2) *There exists a function $G:[0,+\infty]^n \to [0,+\infty]$ which trasnforms n–dimensional triangular triplets into 1–dimensional triangular triplets and satisfies*

$$G = t \circ F \circ (t_1^{-1} \times \ldots \times t_n^{-1}),$$

where t and t_i are additive generators of t–norms T and T_i, respectively.

Proof. (1) $\to$ (2) Let us suppose that F aggregates a collection of relaxed T_i-indistinguishability operators into a relaxed T–indistinguishability operator. We have to prove that G transforms n-dimensional triangular triplets into 1-dimensional triangular triplets. To this end, assume that $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) \in [0,\infty]^n$ is a n-dimensional triplet. Define the fuzzy relations E_i, $i=1,\ldots,n$, on a non-empty set $X=\{x,y,z\}$ (of different elements) by $E_i(x,y)=E_i(y,x)=t_i^{-1}(b_i)$, $E_i(x,z)=E_i(z,x)=t_i^{-1}(a_i)$, $E_i(y,z)=E_i(z,y)=t_i^{-1}(c_i)$, $E_i(x,x)=E_i(y,y)=E_i(z,z)=1$. It is not hard to check that each E_i is a relaxed T_i–indistinguishability operator, since $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ is a n-dimensional triplet. Next, let us prove that $(G(\mathbf{a}),G(\mathbf{b}),G(\mathbf{c}))$ is a 1–dimensional triangular triplet.

Since F aggregates the collection of relaxed T_i–indistinguishability operators E_i into a relaxed T–indistinguishability operator we have that

$$T(F(E_1,\ldots,E_n)(x,y),F(E_1,\ldots,E_n)(y,z)) \leq F(E_1,\ldots,E_n)(x,z).$$

It follows that

$$t^{-1}(t \circ F(E_1,\ldots,E_n)(x,y)) + t \circ (F(E_i,\ldots,E_n)(y,z)) \leq F(E_1,\ldots,E_n)(x,z).$$

Whence we deduce that

$$t \circ (F(E_1,\ldots,E_n)(x,y)) + t \circ (F(E_i,\ldots,E_n)(y,z)) \geq t(F(E_1,\ldots,E_n)(x,z)).$$

The fact that $E_i(x,y)=t^{-1}(b_i)$, $E_i(x,z)=t^{-1}(a_i)$ and $E_i(y,z)=t^{-1}(c_i)$ provides that

$$t \circ (F(t_1^{-1}(b_1),\ldots,t_n^{-1}(b_n))) + t \circ (F(t_1^{-1}(c_1),\ldots,t_n^{-1}(c_n))) \geq t \circ (F(t_1^{-1}(a_1),\ldots,t_n^{-1}(a_n))).$$

Hence we conclude that $G(\mathbf{a}) \leq G(\mathbf{b})+G(\mathbf{c})$ and, thus, that G transforms a n-dimensional triangular triplet into a 1-dimensional triangular triplet.

(2) $\to$ (1) Assuming that G transforms n-dimensional triangular triplets into 1-dimensional triangle triplets, we must prove that $F(E_1,\ldots,E_n)$ is a relaxed T-indistinguishability operator for all collection E_i, $i=1,\ldots,n$, of relaxed T_i-indistinguishability operators. To this end. consider a collection E_i, $i=1,\ldots,n$, of relaxed T-indistinguishability operators on a non-empty set X. Then, for each $x,y,z \in X$, we set $E_i(x,y)=E_i(y,x)=a_i$, $E_i(y,z)=E_i(z,y)=b_i$, and $E_i(x,z)=E_i(z,x)=c_i$. Since $T_i(E_i(x,y),E_i(y,z)) \leq E_i(x,z)$, $T_i(E_i(x,z),E_i(z,y)) \leq E_i(x,y)$ and $T_i(E_i(y,x),E_i(x,z)) \leq E_i(y,z)$ we have that $t_i(a_i)+t_i(b_i) \geq t_i(c_i)$, $t_i(b_i)+t_i(c_i) \geq t_i(a_i)$ and $t_i(a_i)+t_i(c_i) \geq t_i(b_i)$ and, thus, that $(t_i(a_i),t_i(b_i),t_i(c_i))$ is a 1-dimensional triangle triplet. So $(\mathbf{t}(\mathbf{a}),\mathbf{t}(\mathbf{b}),\mathbf{t}(\mathbf{c}))$ is a n-dimensional triangle triplet. The fact that G transforms n-dimensional triangular triplets into 1-dimensional triangle triplets provides that $(G(\mathbf{t}(\mathbf{a})),G(\mathbf{t}(\mathbf{b})),G(\mathbf{t}(\mathbf{c})))$ is a 1-dimensional triangle triplet, where $\mathbf{t}(\mathbf{a}) = (t_1(a_1),\ldots,t_n(a_n))$, $\mathbf{t}(\mathbf{b}) = (t_1(b_1),\ldots,t_n(b_n))$ and $\mathbf{t}(\mathbf{c}) = (t_1(c_1),\ldots,t_n(c_n))$. Thus $G(\mathbf{t}(\mathbf{a})) \leq G(\mathbf{t}(\mathbf{b}))+G(\mathbf{t}(\mathbf{c}))$, $G(\mathbf{t}(\mathbf{b})) \leq G(\mathbf{t}(\mathbf{a}))+G(\mathbf{t}(\mathbf{c}))$ and $G(\mathbf{t}(\mathbf{c})) \leq G(\mathbf{t}(\mathbf{a}))+G(\mathbf{t}(\mathbf{b}))$.

Since $G = t \circ F \circ (t_1^{-1} \times \ldots \times t_n^{-1})$ we have

$$\begin{aligned} t(F(\mathbf{a})) &= G(\mathbf{t}(\mathbf{a})) \leq G(\mathbf{t}(\mathbf{b}))+G(\mathbf{t}(\mathbf{c})) \\ &= t(F(\mathbf{b}))+t(F(\mathbf{c})). \end{aligned}$$

From the preceding inequality we deduce that

$$F(\mathbf{a}) \geq t^{-1}(t(F(\mathbf{b}))+t(F(\mathbf{c}))) = T(F(\mathbf{b}),F(\mathbf{c})).$$

Therefore we obtain that

$$T(F(E_1,\ldots,E_n)(z,y),F(E_1,\ldots,E_n)(x,z)) \leq F(E_1,\ldots,E_n)(x,y).$$

Similarly we can show that

$$T(F(E_1,\ldots,E_n)(x,y),F(E_1,\ldots,E_n)(y,z)) \leq F(E_1,\ldots,E_n)(x,z)$$

and

$$T(F(E_1,\ldots,E_n)(y,x),F(E_1,\ldots,E_n)(x,z)) \leq F(E_1,\ldots,E_n)(y,z).$$

Moreover, $F(E_1,\ldots,E_n)(x,y) = F(E_1,\ldots,E_n)(y,x)$ due to every E_i is a relaxed T_i–indistinguishability operator. Consequently, we conclude that F aggregates relaxed T_i–indistinguishability operators into a relaxed T–indistinguishability operator. □

In order to finish the paper we recall two pertinent properties of those functions that transforms n-dimensional triangular triplets into 1-dimensional triangular triplets (see [6]).

Proposition 3. *Consider a function $G : [0,\infty]^n \longrightarrow [0,\infty]$, $n \geq 1$. Then:*

i) *If G transforms n–dimensional triangular triplets into 1-dimensional triangular triplets, then it is subadditive.*

ii) *If G is increasing and subadditive, then it transforms n–dimensional triangular triplets into 1-dimensional triangular triplets.*

Taking into account Propositions 1 and 3 we can state the next result.

Corollary 1. *Let $T, T_1, \ldots T_n$ be strict and continuos Archimedean t–norms ($n \geq 1$) and let $F : [0,1]^n \longrightarrow [0,1]$ be an increasing function. Then the following assertions are equivalent:*

1) *$F : [0,1]^n \longrightarrow [0,1]$ aggregates relaxed T_i-indistinguishability operators into a relaxed T-indistinguishability operator.*

2) *The function $G : [0,+\infty]^n \to [0,+\infty]$ given by $G = t \circ F \circ (t_1^{-1} \times \ldots \times t_n^{-1})$ is subadditive.*

Proof. (1) $\to$ (2) Taking into account Theorem 1 we know that G transforms n-dimensional triangular triplets into a 1-dimensional triangular triplet and, in addition, from Proposition 3 we can ensure that G is a subadditive function.

(2) $\to$ (1). The monotony of F yields that G is increasing. Proposition 3 guarantees that the function G transforms n-dimensional triangular triplets into 1-dimensional triangular triplet. Now, from Theorem 1, it follows that F aggregates relaxed T_i-indistinguishability operators into a relaxed T-indistinguishability operator. □

III. Conclusions

We have addressed the aggregation problem of a collection of relaxed indistinguishability operators where each member of the collection to be merged is a relaxed indistinguishability operator with respect to a different t-norm. A sufficient condition to merge a collection of the indistinguishability operators under consideration has been given. Moreover, we have characterized those functions that allow to merge a collection of relaxed T_i–indistinguishability operators into a new with respecto to a new t–norm T. Namely, the aforesaid characterization is provided in terms of the additive generator of the all involved t-norms and another functions that transforms a n-dimensional triangular triplet of the positive real line into a 1-dimensional triplet of the positive real line. As future work we will discuss whether some concrete families of aggregation functions (OWA operators, overlap functions, etc) could be used as relaxed T-indistinguishability operators.

Acknowledgements

This research was funded by the Spanish Ministry of Economy and Competitiveness under Grants DPI2017-86372-C3-3-R, TIN2016-81731-REDT (LODISCO II) and AEI/FEDER, UE funds, by the Programa Operatiu FEDER 2014-2020 de les Illes Balears, by project ref. PROCOE/4/2017 (Direccio General d' Innovacio i Recerca, Govern de les Illes Balears), and by project ROBINS. The latter has received research funding from the EU H2020 framework under GA 779776. This publication reflects only the authors views and the European Union is not liable for any use that may be made of the information contained therein.

References

[1] B. De Baets and R. Mesiar, T-partitions, Fuzzy Sets and Syst., 97, (1998), 211–223.

[2] B. De Baets and R. Mesiar, Pseudo–metrics and T-equivalences, J. Fuzzy Math., 5 (1997), 471–481.

[3] B. De Baets and R. Mesiar, Metrics and T-equivalities, J. Math. Anal. Appl., 267 (2002), 531–547.

[4] G. Beliakov, H. Bustince and T. Calvo-Sánchez, A Practical Guide to Averaging Functions, Springer, Heidelberg, Berlin, New York, 2016.

[5] G. Beliakov, A. Pradera and T. Calvo, Aggregation Functions: a guide for practitioners, Springer, Heidelberg, Berlin, New York, 2007.

[6] J. Borsík and J. Doboš, On a product of metric spaces. Math. Slovaca 31 (1981), 193–205.

[7] B. Bouchon-Meunier, (Ed.), Aggregation and Fusion of Imperfect Information, Sudies in Fuzziness and Soft Computing, Vol. 12, Physica-Verlag, Heidelberg, 1998.

[8] M. Bukatin, R. Kopperman and S.G. Matthews, Some corollaries of the correspondence between partial metric and multivalued equalities, Fuzzy Set. Syst. 256 (2014), 57-72.

[9] T. Calvo, P. Fuster-Parra and O. Valero, On the problem of relaxed indistinguishability aggregation operators, Proc. of the Workshop on Applied Topological Structures, WATS'17, (2017), 19–26.

[10] T. Calvo, P. Fuster-Parra and O. Valero, On the Problem of Aggregation of Partial T-Indistinguishability Operators, Jesús Medina, Manuel Ojeda-Aciego, José Luis Verdegay, · David A. Pelta, Inma P. Cabrera, · Bernadette Bouchon-Meunier, Ronald R. Yager (Eds.), Proc. Part I. Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems, Theory and Foundations, IPMU'18, (2018), 207-218.

[11] M. Demicri, The order-theoretic duality and relations between partial metrics and local equalities, Fuzzy Set. Syst. 192 (2011) 45–57.

[12] M.M. Deza and E. Deza, Encyclopedia of Distances, Springer-Verlag, 2016.

[13] J. Drewniak and U. Dudziak, Aggregation preserving classes of fuzzy relations, Kybernetica, 41 (3), (2005), 265–284.

[14] U. Dudziak, Preservation of t–norm and t–conorm based properties of fuzzy relations during aggregation process, Proc. 8th Conference of European Society for Fuzzy Logic and Technology, EUSFLAT'2013, (2013), 376–383.

[15] P. Fuster-Parra, J. Martín, J. J. Miñana and O. Valero, A study on the relationship between relaxed metrics and indistinguishability operators, 2017, (submitted).

[16] P. Fuster-Parra, J. Martín, J. Recasens and O. Valero, On the metric behavior of partial indistinguishability operators, preprint.

[17] S. Gottwald, On t-norms which are related to distances of fuzzy sets, BUSEFAL 50 (1992), 25-30.

[18] M. Grabisch, J.L. Marichal, R. Mesiar and E. Pap, *Aggregation Functions*, Cambridge University Press, New York, 2009.

[19] O. Grigorenko and J. Lebendinska, On another view of aggregation of fuzzy relations, In: S. Galichet, J. Montero and G. Mauris, (eds), Proc. 7th. Conf. EUSFLAT'2011 and LFA'2011, Atlantis Press, (2011), 21–27.

[20] U. Höhle, Fuzzy equalities and indistinguishability, Proc. of EUFIT'93, Vol. 1, Aachen, 1993 pp. 358-363.

[21] J. Jacas and J. Recasens, Aggregation of T-Transitive Relations, Int. J. Intell. Syst. 18 (2003), 1193–1214.

[22] P. Klement, R. Mesiar and E. Pap, Triangular Norms, Kluwer, Dordrecht, 2000.

[23] C. M. Ling, Representation of associative function, Publ. Math. Debrecen 12, (1965), 189–212.

[24] G. Mayor and J. Recasens, Preserving T-transitivity in: Artificial Intelligence Research and Development, A. Nebot et al. (eds), IOS Press, Vol. 288, 79–87, 2016.

[25] S. Ovchinnikov, Representation of transitive fuzzy relations, Aspects of Vageness (H. Skala, S. Termini and E. Trillas, eds.), Reidel, Dordrecht, 1984, pp. 105-118.
[26] S. Ovchinnikov, Similarity relations, fuzzy partitions, and fuzzy orderings, Fuzzy Sets and Syst., 40 (1991), 107-126.
[27] V. Peneva and I. Popchev, Properties of the aggregation operators related with fuzy relations, Fuzzy Sets and Syst., 139 (3), (2003), 615–633.
[28] A. Pradera, E. Trillas, and E. Castiñeira. On distances aggregation, in: Proc. of Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems International Conference, B. Bouchon-Meunier et al. (eds), Universidad Politécnica de Madrid Press, Vol. II, 693–700, 2000.
[29] A. Pradera, E. Trillas and E. Castiñeira, On the aggregation of some classes of fuzzy relations, in: Technologies for constructing intelligent systems, B. Bouchon-Meunier, J. Gutierrez, L. Magdalena and R. Yager (eds), Springer-Verlag, 125–147, 2002.
[30] A. Pradera, E. Trillas, A note on pseudo-metrics aggregation, Int. J. Gen. Syst. 31 (2002), 41–51.
[31] J. Recasens, Indistinguishability Operators: Modelling Fuzzy Equalities and Fuzzy Equivalence Relations, Springer, Berlin, 2010.
[32] E. Trillas, Assaig sobre les relacions d'indistingibilitat, Proc. Primer Congrés Catalá de Lógica Matemática, Barcelona, 1982, pp. 51–59.
[33] L. Valverde, On the structure of F-indistinguishability operators, Fuzzy Set. Syst. 17 (1985) 313–328.
[34] L. A. Zadeh, Similarity relations and fuzzy orderings, Inform. Sci. 3(2), (1971), 177–200.

XIX Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy (XIX ESTYLF)

ESTYLF 10: Sesión Especial Nuevos Enfoques y Aplicaciones en la Toma de Decisiones en Ambientes de Incertidumbre II

Organizadores:

Rocío de Andrés, Teresa González Arteaga

Fuzzy information and contexts for designing Automatic Decision-making Systems*

*Note: The full contents of this paper have been published in the volume *Lecture Notes in Artificial Intelligence 11160* (LNAI 11160)

M.T. Lamata, D.A. Pelta, J.L. Verdegay
Department of Computer Science and Artificial Intelligence
Universidad de Granada
Granada, Spain
{mtl,dpelta,verdegay}@decsai.ugr.es

***Abstract*—The replacement of people by Automatic Decision-making Systems (ADS) has become a threat today. However, it seems that this replacement is unstoppable. Thus, the need for future and current ADS to perform their tasks as perfectly as possible is, more than a necessity an obligation. Hence, the design of these ADS must be carried out in accordance with the theoretical models on which they are to be built. From this point of view, this paper considers the classic definition of General Decision Making Problem and introduces two new key elements for building ADS: the nature of the information available and the context in which the problem is being solved. The new definition allows to cover different models and decision and optimization problems, some of which are presented for illustrative purposes.**

***Index Terms*—Fuzzy Information, Decision Making problems, Contexts**

OWA OPERATORS IN THE CALCULATION OF THE AVERAGE GREEN-HOUSE GASES EMISSIONS

Keivan Amirbagheri

Department of Economics and Business, Faculty of Economics and Business, University of Barcelona, Av. Diagonal 690, 08034 Barcelona, Spain

kamirbam7@alumnes.ub.edu

José M. Merigó

Department of Management Control and Information Systems, School of Economics and Business, University of Chile, Av. Diagonal Paraguay 257, 8330015 Santiago, Chile

jmerigo@fen.uchile.cl

Abstract

This study proposes, through weighted averages and ordered weighted averaging operators, a new aggregation system for the analysis of average gases emissions. We introduce the ordered weighted averaging operators gases emissions, the induced ordered weighted averaging operators gases emissions, the weighted ordered weighted averaging operators gases emissions and the induced probabilistic weighted ordered weighted averaging operators gases emissions. These operators represent a new way of analyzing the average gases emissions of different variables like countries or regions. The work presents further generalizations by using generalized and quasi-arithmetic means. The article also presents an illustrative example regarding the calculations of the average gases emissions in the European region.

Keywords: Green-house gases emission, aggregation operators, decision making, ordered weighted average

1. Introduction

In the very recent decades, because of an enormous growth of the population and the necessity to provide food for them from one hand and the other hand an immethodical consumption of fossil fuel, our planet is experiencing an unexampled growth in terms of green-house gases (GHG) emission such as CO_2, CH_4 and N_2O in its atmosphere that cause an ascending amount of global warming year by year and a drastic climate change [6,20].

There are many works that study the ways that can lead the GHG emission toward the minimization. [19], evaluate the potential influence of vehicle electrification on grid infrastructure and road-traffic green-house emission. [5] study the impact of electrical power generation on GHG emission in Europe.

Besides, although these works exist but it seems vital to present a comprehensive forecast about the future of countries based on the experts' opinions to provide a clear plan and make a suitable decision to decrease this emission in any of the studied sectors and under various conditions.

Aggregation operators in the related literature with the aim of decision making are diverse and each of them can be used to collect the information [1,2,9-14, 21,23,25]. These techniques give importance to the variables according to certain available subjective or objective findings [17].

A very popular aggregation operator is the weighted average. This aggregation operator is flexible to use in a wide range of problems. Another popular aggregation operator is the ordered weighted average (OWA) [24]. The OWA operator provides a parametrized family of aggregation operators between the minimum and the maximum, weighting the data according to the attitudinal character of the decision-maker. Based on this operator and with the purpose of expanding it, many authors expand and generalize it [3,7,18,22]. There are several types for the concept of expanding and generalizing and the most important item is the form of integrating OWA operator with some key concepts such as, using the induced variables, the probability and the weighted average. [23] propose some new aggregation operators such as the induced ordered weighted geometric averaging (IOWGA) operator, generalized induced ordered weighted averaging (GIOWA) operator, hybrid weighted averaging (HWA) operator.

The purpose of this work is to concentrate on the analysis of the use of the aggregation operators in the calculation of green-house gases (GHG) emission with the aim of developing better decision-making

techniques. To this end, the paper studies several aggregation operators including the WA [1], OWA [24], OWAWA and IOWAWA [11], IOWA [27], POWAWA and IPOWAWA operator [12]. With the use of each operator, a new operator for GHG emission is produced including the OWA GHG emission (OWAGE), induced OWA GHG emission (IOWAGE), ordered weighted averaging-weighted average GHG emission (OWAWAGE), induced OWAWA GHG emission (IOWAWAGE), probabilistic OWAWA GHG emission (POWAWAGE) and induced probabilistic OWAWA GHG emission (IPOWAWAGE).

The work also presents further generalizations by using generalized and quasi-arithmetic means obtaining the generalized OWAGE (GOWAGE). The aim of this approach is to show a more general framework in the analysis of averages by using complex aggregations including with geometric and quadratic averages. The study presents a wide range of particular types of aggregations under this approach.

The work presents an application regarding the calculation of the average gases emissions in Europe. For doing so, the paper considers a multi-expert aggregation problem where four experts analyze the expected average emissions of each European country for the next period. From, the analysis develops several aggregation methods based on the tools developed in the paper including the OWAGE, IOWG and OWAWAGE operators. The main advantage of the OWA operator is the possibility of under or overestimate the information according to the attitudinal character of the decision maker. Thus, depending on the degree of optimism or pessimism of the decision maker, the results may lead to different decisions and interpretations of the information.

2. Preliminaries

2.1. The weighted average (WA)

The WA [1] is one of the most common aggregation operators found in the literature. It has been used in a wide range of applications. It can be defined as follows.

Definition 1. A WA operator of dimension n is a mapping $WA: R^n \to R$ that has an associated weighting vector V, with $v_j \in [0,1]$ and $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$, such that:

$$WA(a_1,\ldots,a_n) = \sum_{i=1}^{n} v_i a_i \quad (1)$$

where a_i represents the argument variable.

2.2. The OWA operators

The OWA operator [24] is an aggregation operator that provides a parametrized family of aggregation operators that include the maximum, the minimum and the average criteria as especial cases and can be defined as follows.

Definition 2. An OWA operator of dimension n is a mapping $OWA: R^n \to R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that sum of the weight is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$OWA(a_1,a_2,\ldots,a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \quad (2)$$

where b_j is the jth largest of the a_i.

2.3. The Induced OWA operator (IOWA)

The IOWA operator [27] is an extension of the OWA operator. The main difference between OWA and IOWA is that the reordering step is not developed with the values of the arguments a_i. In this case, the reordering step is carried out with order inducing variables. The IOWA operator also includes as particular cases the maximum, the minimum and the average criteria. It can be defined as follows.

Definition 3. An IOWA operator of dimension n is a mapping $IOWA: R^n \times R^n \to R$ that has an associated weighting vector W of dimension n with $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ and $w_j \in [0,1]$, such that:

$$IOWA(\langle u_1,a_1\rangle,\langle u_2,a_2\rangle,\ldots,\langle u_n,a_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \quad (3)$$

where b_j is the a_i value of the IOWA pair $\langle u_i,a_i\rangle$ having the jth largest u_i. u_i is the order-ranking variable and a_i is the argument variable.

2.4. The probabilistic ordered weighted averaging-weighted average (POWAWA)

The POWAWA [17] operator uses probabilities, weighted average and OWA in the same formulation. It unifies these three concepts by considering the degree of importance that each concept has in the aggregation, depending on the situation considered. The POWAWA operator is defined as follows.

Definition 4. A POWAWA operator of dimension n is a mapping $POWAWA: R^n \to R$ that has an associated weighting vector W of dimension n with $w_j \in [0,1]$ and $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ such that:

$$POWAWA(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j \quad (4)$$

where b_j is the jth largest of the a_i, each argument a_i has an associated weight v_i with $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ and $v_i \in [0,1]$, a probability p_i with $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ and $p_i \in [0,1]$, $\hat{v}_j = C_1 w_j + C_2 v_j + C_3 p_j$, with C_1, C_2 and $C_3 \in [0,1]$, $C_1 + C_2 + C_3 = 1$ and v_j p_j are the weights v_i and p_i ordered according to b_j, that is to say, according to the jth largest of the a_i.

2.5. The Induced probabilistic OWAWA operator

The IPOWAWA [12] is an aggregation operator that extends POWAWA operator that uses order-inducing variables that represent complex reordering processes of an aggregation. Thus, it is an aggregation operator that uses induced variables, the probability, the weighted average and the OWA operator. Moreover, it can assess complex reordering processes by using order-inducing variables. Its main advantage is that it provides a more robust formulation than the POWAWA operator because it includes a wide range of cases. It can be defined as follows.

Definition 5. The IPOWAWA operator of dimension n is a mapping $IPOWAWA: R^n \times R^n \to R$ that has an associated weighting vector W of dimension n with $w_j \in [0,1]$ and $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, such that:

$$IPOWAWA(\langle u_1, e_1\rangle, \langle u_2, e_2\rangle, \ldots, \langle u_n, e_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j \quad (5)$$

where b_j is the a_i value of the IPOWAWA pair $\langle u_i, e_i\rangle$ having the jth largest u_i, u_i is the order-inducing variable, each argument a_i has an associated weight v_i with $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ and $v_i \in [0,1]$, a probability p_i with $\sum_{i=1}^{n} p_i$ and $p_i \in [0,1]$, $\hat{v}_j = C_1 w_j + C_2 v_j + C_3 p_j$, with C_1, C_2 and $C_3 \in [0,1]$, $C_1 + C_2 + C_3 = 1$, v_j and p_j are the weights v_i and p_i ordered according to b_j, that is to say according to the jth largest of the e_i.

3. Calculation of the average green-house gases (GHG) emission with OWA operators

The purpose of this paper is to calculate the average GHG emission. The average GHG emission represents a numerical value that reports the information of the GHG emission. To calculate this item, using many aggregation operators is possible likewise normal arithmetic mean. These possible aggregation operators could be WA, OWA, IOWA or a combination of them such as OWAWA, IOWAWA, etc. Through using them we prepare some possibilities for the future of GHG emission in different scenarios in a spectrum from the worst case to the best case based on experts' opinions.

The basic operator for analyzing a set of GHG emission is OWAGE. The OWAGE operator is an aggregation operator that analyses an average GHG emission under uncertainty situation. It can be defined as follows for the set of GHG emission $A = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$:

$$OWAGE(e_1, e_2, \ldots, e_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j f_j \quad (6)$$

where f_j is the jth largest of the e_i.

The other significant aggregation operator is the induced OWA (IOWA) that its reordering step is developed with order including variables. So, by using the IOWA operator we obtain IOWA GHG emission (IOWAGE) that can be defined as follows:

$$IOWAGE(\langle u_1, e_1\rangle, \langle u_2, e_2\rangle, \ldots, \langle u_n, e_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} w_j f_j \quad (7)$$

where f_j is the e_i value of the IOWA pair $\langle u_i, e_i\rangle$ having the jth largest u_i. u_i is the order-ranking variable and e_i is the argument variable.

It is important to mention that this operator is based on considering no extra information. One of the very important aspects of the average GHG emission is the importance of each of them and in other words, their weights in comparison with each other. To this end it is better to use some approaches of information aggregation that combine OWA operators and WA. In the literature there are some aggregation operators with this structure like, the WOWA operator [21], the hybrid average [9] and the OWAWA operators [8]. In this work we apply OWAWA to obtain the OWAWA GHG emission (OWAWAGE) and it is defined as

follows for a set of GHG emission $A=\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$:

$$OWAWAGE(e_1,e_2,\ldots,e_n)=\sum_{j=1}^{n}\hat{v}_j f_j \tag{8}$$

where f_j is the *j*th largest of the e_i, each argument e_i has an associated weight (WA) v_i with $\sum_{i=1}^{n} v_i=1$ and $v_i\in[0,1]$, $\hat{v}_j=\beta w_j+(1-\beta)v_j$ with $\beta\in[0,1]$ and v_j is the weight (WA) v_i ordered according to b_j, that is, according to the *j*th largest of the e_i.

To focus more deeply on our contributions, we implement IOWAWA which is a combination of IOWA operators and WA in the same formulation. By using the IOWAWA operator we obtain IOWAWA GHG emission (IOWAWAGE) that can be defined as follows:

$$IOWAWAGE(\langle u_1,e_1\rangle,\langle u_2,e_2\rangle,\ldots,\langle u_n,e_n\rangle)=\sum_{j=1}^{n}\hat{v}_j f_j \tag{9}$$

where f_j is the e_i value of the IOWAWA pair $\langle u_i,e_i\rangle$ having the *j*th largest u_i, u_i is the order including variable and e_i is the argument variable, each argument e_i has an associated weight (WA) v_i with $\sum_{i=1}^{n} v_i=1$ and $v_i\in[0,1]$, $\hat{v}_j=\beta w_j+(1-\beta)v_i$ with $\beta\in[0,1]$ and v_j is the weight (WA) v_i ordered according to f_j, that is, according to the *j*th largest u_i.

Besides, the other aspect that can be considered and leads results to a better form is probabilities in the attitudinal character of the decision-maker. For this reason, we apply POWAWA operator. By applying the Eq. (7) we could obtain the probabilistic OWAWA GHG emission (POWAWAGE). It can be defined as follows:

$$POWAWAGE(e_1,e_2,\ldots,e_n)=\sum_{j=1}^{n}\hat{v}_j f_j \tag{10}$$

where f_j is the *j*th largest of the e_i, each argument e_i has an associated weight v_i with $\sum_{i=1}^{n} v_i=1$ and $v_i\in[0,1]$, a probability p_i with $\sum_{i=1}^{n} p_i=1$ and $p_i\in[0,1]$, $\hat{v}_j=C_1 w_j+C_2 v_j+C_3 p_j$, with C_1,C_2 and $C_3\in[0,1]$, $C_1+C_2+C_3=1$ and v_j p_j are the weights v_i and p_i ordered according to f_j, that is to say, according to the *j*th largest of the e_i.

Let us analyze the different families of IOWAWAGE and POWAWAGE in the following paragraphs

First, we are considering the two main cases of the IOWAWAGE operator that are found by analyzing the coefficient β. Basically:

- If $\beta=0$, we get the WA.
- If $\beta=1$, the IOWA operator.
- If $\beta=1$ and the ordered position of u_i is the same than the ordered position of f_i such that f_j is the *j*th largest of e_i, the OWA operator.
- Note that when β increases, we are giving more importance to the IOWAGE operator and when β decreases, we give more importance to the WA.

Another group of interesting families are the maximum-WAGE, the minimum-WAGE, the step-IOWAWAGE operator and the usual average.

- The maximum-WAGE is found when $w_p=1$ and $w_j=0$, for all $j\neq p$, and $u_p=Max\{e_i\}$.
- The minimum-WAGE is formed when $w_p=1$ and $w_j=0$, for all $j\neq p$, and $u_p=Min\{e_i\}$.

The arithmetic-WAGE is obtained when $w_j=1/n$ for all *j*, and the weighted average is equal to the OWA when the ordered position of *i* is the same as the ordered position of *j*. The arithmetic-WAGE (A-WAGE) can be formulated as follows:

$$A\text{-}WAGE(\langle u_1,e_1\rangle,\langle u_2,e_2\rangle,\ldots,\langle u_n,e_n\rangle)=\frac{1}{n}\beta a_i+(1-\beta)\sum_{i=1}^{n} v_i e_i, \tag{11}$$

Note that if $v_i=1/n$, for all *i*, then, we get the unification between the arithmetic mean (or simple average) and the IOWAGE operator, that is, the arithmetic-IOWAGE (A-IOWAGE). The A-IOWAGE operator can be formulated as follows:

$$A\text{-}IOWAGE(\langle u_1,e_1\rangle,\langle u_2,e_2\rangle,\ldots,\langle u_n,e_n\rangle)=\beta\sum_{j=1}^{n} w_j b_j+(1-\beta)\frac{1}{n}e_i. \tag{12}$$

Following the OWA literature [13, 25, 27], we can develop many other families of IOWAWA operators such as:

- The olympic-IOWAWAGE operator ($w_1=w_n=0$, and $w_j=1/(n-2)$ for all others).

- The general olympic-IOWAWAGE operator ($w_j = 0$ for $j = 1,2,\ldots,k,n,n-1,\ldots,n-k+1$; and for all others $w_{j^*} = 1/(n-2k)$, where $k < n/2$).
- The centered-IOWAWAGE (if it is symmetric, strongly decaying from the center to the maximum and the minimum, and inclusive).

Many other particular cases can be studied by looking at different expressions of the weighting vectors and the coefficients C_1, C_2 and C_3. For example:

- If $C_1 = 1$, we obtain the OWAGE operator.
- If $C_2 = 1$, the weighted GHG emission (WGE).
- If $C_3 = 1$, the probabilistic GHG emission (PGE).
- If $C_1 = 0$, the probabilistic weighted averaging GHG emission (PWAGE).
- If $C_2 = 0$, the probabilistic OWA GHG emission (POWAGE).
- If $C_3 = 0$, the OWAWA GHG emission (OWAWAGE) [14].

4. Generalizations with generalized and quasi-arithmetic means

Generalization of the OWA operators is possible to do by generalized and quasi-arithmetic averaging aggregation operators that as the most common one generalized OWA (GOWA) [26] and then quasi-arithmetic OWA (Quasi-OWA) [4] are formed. These functions apply a general framework including particular cases. The GOWA operator applied to the analysis of gases emissions is called GOWA gases emissions (GOWAGE) and is defined as follows.

Definition 6. A GOWAGE operator of dimension *n* is a mapping $GOWA: R^n \to R$ that has an associated weighting vector W of dimension n with $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ and $w_j \in [0,1]$, such that:

$$GOWAGE(e_1, e_2, ..., e_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \quad (13)$$

where b_j is the *j*th largest of the e_i, and λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty) - \{0\}$.

Like the section 3, this operator also has the particular cases of the maximum, the minimum and the generalized mean (GM). Besides, there are some special cases that can be obtained by maneuvering on the values of λ, such as:

- If $\lambda = 1$, the usual OWAGE operator.
- If $\lambda \to 0$, the ordered weighted geometric average gases emissions (OWGAGE).
- If $\lambda = 2$, the ordered weighted quadratic average gases emissions (OWQAGE).

Quasi-arithmetic OWA gases emissions (Quasi-OWAGE) operator is the other generalization that uses the quasi-arithmetic means instead of the generalized means. So, it replaces the parameter λ by a strictly continuous monotonic function *g*.

Definition 7. A Quasi-OWAGE operator of dimension *n* is a mapping Quasi-OWAGE: $R^n \to R$ that has an associated weighting vector W of dimension *n* with $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ and $w_j \in [0,1]$, then:

$$Quasi - OWAGE(e_1, e_2, ..., e_n) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g\left(b_{(j)}\right) \right) \quad (14)$$

where b_j is the *j*th largest of the e_i and g is a strictly continuous monotonic function.

5. Conclusions

The purpose of this study is to concentrate on the analysis of the use of the aggregation operators in the calculation of GHG emission with the aim of developing better decision-making techniques. In this study we reviewed some of the important operators of the family of OWA. This review started with simple WA and continued with OWA operator. Moreover, we also analyzed some operators that form by combination of two or more aggregation operators. So, these operators are, IOWAGE, OWAWAGE, IOWAWAGE, POWAWAGE and IPOWAWAGE.

In addition, through these formulations, we found some particular cases in either IOWAWAGE or POWAWAGE operators such as, olympic-IOWAWAGE, S-IOWAWAGE, centered-IOWAWAGE, maximum, minimum and arithmetic probabilistic weighted average, and arithmetic probabilistic ordered weighted average. Furthermore, some other generalizations are developed by using generalized and quasi-arithmetic means obtaining the GOWAGE and the Quasi-OWAGE operators.

The study provides a simple example to review the function of two simple aggregations operators of average green-house gases emission. During this example we review weighted average gases emission (WAGE) and ordered weighted average gases emission (OWAGE) to represent the difference between the result of the calculation based on these operators.

References

[1] G. Beliakov, A. Pradera and T. Calvo, *Aggregation Functions: A Guide for Practitioners*. Berlin: Springer-Verlag, 2007.

[2] T. Calvo, G. Mayor and R. Mesiar, *Aggregation Operators: New Trends and Applications*. New York: Physica-Verlag, 2012.

[3] A. Emrouznejad and M. Marra, Ordered weighted averaging operators 1988–2014: A citation-based literature survey. *International Journal of Intelligent Systems*, *29*:994-1014, 2014.

[4] J. Fodor, J.L. Marichal and M. Roubens, Characterization of the ordered weighted averaging operators. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, *3*:236-240, 1995.

[5] T.J. Hammons, Impact of electric power generation on green house gas emissions in Europe: Russia, Greece, Italy and views of the EU Power Plant Supply Industry–a critical analysis. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, *28*:548-564, 2006.

[6] A.F. Hastings, M. Wattenbach, w. Eugster, C. Li, N. Buchmann and P. Smith, P. Uncertainty propagation in soil greenhouse gas emission models: an experiment using the DNDC model and at the Oensingen cropland site. *Agriculture, Ecosystems & Environment*, *136*:97-110, 2010.

[7] J. Kacprzyk and S. Zadrożny, Towards a general and unified characterization of individual and collective choice functions under fuzzy and nonfuzzy preferences and majority via the ordered weighted average operators. *International Journal of Intelligent Systems*, *24*:4-26, 2009.

[8] J.M. Merigó, A unified model between the weighted average and the induced OWA operators. *Expert Systems with Applications*, 38:11560-11572, 2011.

[9] J.M. Merigó, M. Casanovas, Fuzzy generalized hybrid aggregation operators and its application in decision making. *International Journal of Fuzzy Systems,* 12:15-24, 2010a.

[10] J.M. Merigó, M. Casanovas, The fuzzy generalized OWA operator and its application in strategic decision making. *Cybernetics and Systems*, 41:359-370, 2010b.

[11] J.M. Merigó and A.M. Gil-Lafuente, The induced generalized OWA operator. *Information Sciences*, 179:729-741, 2009.

[12] J.M. Merigó, C. Lobato-Carral, A. Carrilero-Castillo, Decision making in European Union under risk and uncertainty, *European Journal of International Management*, 6:590-609, 2012.

[13] J.M. Merigó, D. Palacios-Marqués, M.M. Benavides-Espinosa, Aggregation methods to calculate the average price. *Journal of Business Research*, 68: 1574-1580, 2015.

[14] J.M. Merigó, D. Palacios-Marqués, P. Soto-Acosta, Distance measures, weighted averages, OWA operators and Bonferroni means. *Applied Soft Computing*, 50:356-366, 2017.

[15] J.M. Merigó, M. Peris-Ortíz, A. Navarro-García, C. Rueda-Armengot. Aggregation operators in economic growth analysis and entrepreneurial group decision-making, *Applied Soft Computing*, 47:141-150, 2016.

[16] J.M. Merigó, J.B. Yang, D.L. Xu, Demand analysis with aggregation systems. *International Journal of Intelligent Systems*, 31:425-443, 2016.

[17] J.M. Merigó, L. Zhou, D. Yu, N. Alrajeh and K. Alnowibet, Probabilistic OWA distances applied to asset management. *Soft Computing*, 1-24, 2018.

[18] R. Mesiar A. Stupňanová, and R.R. Yager, Generalizations of OWA operators. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, *23*:2154-2162, 2015.

[19] M. Sorrentino, G. Rizzo and L. Sorrentino, A study aimed at assessing the potential impact of vehicle electrification on grid infrastructure and road-traffic green house emissions. *Applied Energy*, *120*:31-40, 2014.

[20] C.E. Stewart, J. Zheng, J. Botte and M.F. Cotrufo, Co-generated fast pyrolysis biochar mitigates green-house gas emissions and increases carbon sequestration in temperate soils. *GCB Bioenergy*, *5*:153-164, 2013.

[21] V. Torra, The weighted OWA operator. *International Journal of Intelligent Systems*, 12:153-166, 1997.

[22] V. Torra and Y. Narukawa, Some relationships between Losonczi's based OWA generalizations and the Choquet–Stieltjes integral. *Soft Computing*, *14*: 465-472, 2010.

[23] Z.S. Xu, Q.L. Da, An overview of operators for aggregating information. *International Journal of Intelligent Systems*, 18:953-969, 2003.

[24] R.R. Yager, On ordered weighted averaging aggregation operators in multi-criteria decision making. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B*, 18:183-190, 1988.

[25] R.R. Yager, Families of OWA operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 59: 125-148, 1993.

[26] R.R. Yager, Generalized OWA aggregation operators. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, *3*:93-107, 2004.

[27] R.R. Yager and D.P. Filev, Induced ordered weighted averaging operators. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B,* 29:141-150, 1999.

Fuzzy linguistic ranking model for Web Accessibility Test tools

Noe Zermeño*, Lucas D.D.R. Calache†, Rosana Montes* and Francisco Herrera*
*Andalusian Research Institute on Data Science and Computational Intelligence, DaSCI
University of Granada, Granada, Spain
Emails: nzermeno@correo.ugr.es, rosana@ugr.es, herrera@decsai.ugr.es
†São Carlos School of Engineering, University of São Paulo, Brazil
Email: lucascalache@usp.br

***Abstract*—There are dozens of tools to automatically evaluate web accessibility. Some are online, and some are toolbars to complement web browsers. In order to select the best Web Accessibility Test Tool, various aspects should be considered. Among the various aspects, the evaluation environment has an important role to assume in the evaluation criteria of the website. The ability to evaluate websites that require user permissions or they are freely accessible could affect the accessibility outcome due to limited or no access to the tool. In addition, the interpretability of the results differs from one tool to another, and it can be difficult to identify the areas of opportunity for improvement of the website evaluated. To select the best tool that matches experts' needs, it is important to have a group of experts in the area. These experts will give their opinions on the criteria according to which the tools will be evaluated. Each Web Accessibility Test Tool is an alternative in a decision making problem (DM). A DM which is evaluated by a group of experts is called a Multi-Expert Multi-Criteria (MEMC). Contrary to studies where the assessments are quantitative, this research uses Computing with Words (CW) processes. Because experts may have uncertainty at the time of issuing their evaluation, Intuitionistic Fuzzy Sets (IFS) are used to work with that uncertainty. Finally, a ranking of the evaluated tools is carried out by TOPSIS.**

***Keywords*—Intuitionistic Fuzzy Set (IFS), TOPSIS, Multi-Expert Multi-Criteria Linguistic Decision Making (MEMCLDM), Web Accesibility Tools Test, Ranking.**

I. Introduction

The World Wide Web Consortium (W3C) is an international community working towards international standards for the web. W3C dictates a series of standards –WCAG 1.0 [1] in 1999 and WCAG 2.0 [2] in 2008– to make web information accessible to everyone regardless of hardware, software, network infrastructure, language, culture, geographic location, or physical or mental ability. Currently there are several tools that evaluate the accessibility of websites automatically. The tools contain different features that may or may not facilitate the evaluation of the site depending on the context in which are applied. Choosing the right tool for the expert's needs is a decision making problem (DM). A DM is a typical problem that has different alternatives to choose from valued by experts in the topic.

In this document, a fuzzy linguistic model is proposed for evaluating accessibility tools through nine criteria: (1) Learnability, (2) Scope of application, (3) Displays element evaluation,ig (4) Accessibility level, (5) Accuracy, (6) CSS evaluation, (7) Reports, (8) Intuitivity, (9) Standardized output. Commonly, the valuation process is done using numerical scales. This research makes use of enhanced linguistic terms in order to take advantage of the knowledge and experience of the experts in a better way, since the evaluation is performed using natural language. The decision-making process is carried out by intuitionist linguistic representation using linguistic sets in the expert opinions on the criteria to be evaluated of the accessibility tools. Finally, using TOPSIS, the results are aggregated to rank the tools evaluated.

This document is structured as follows: Section II provides a descriptive summary of the preliminaries relating to the Intuitionist linguistic model as well as TOPSIS as a technique for the ranking of alternatives. In Section III, we present a Fuzzy linguistic ranking model. In Section IV, we apply a ranking model for Web Accessibility Test tools. Finally, in Section V, the conclusions are presented.

II. Preliminaries

This section describes the methodologies applied to the Multi-Expert Multi-Criteria Linguistic Decision Making (MEMCLDM) problem for ranking in the alternative selection.

A. Multi Criteria Decision Making

The Multi-Criteria Decision Making (MCDM) was introduced in the early 1970s. It is a tool used for problem assessment and decision making with multiple alternatives that are evaluated considering multiple criteria [1], [2].

MCDM often deal with different types of problems such as selection, ranking and classification problems. The aim on each kind of problem is different: (1) selection problems is expected to find the best alternative; (2) the ranking problems are aimed at determining the suitability of all alternatives, which is presented as a hierarchy from the best to the worst and (3) in the classification problems we want to know which alternatives belong to which class of a predefined set of ordered classes.

There are several methods of solving MCDM problems that are used to form a ranking of alternatives. The TOPSIS method [3] is one of them. TOPSIS is based on an aggregation function

[1]https://www.w3.org/TR/WAI-WEBCONTENT/
[2]https://www.w3.org/TR/WCAG20/

of the experts' evaluation scores and determines the best alternative by calculating the distances between the positive and negative ideal solution.

MCDM problems can be evaluated by various experts to be approached as MEMCLDM problems. These experts are usually people with experience in the subject to be assessed. Alternatives can be assessed quantitatively or qualitatively. To evaluate qualitative information, the use of the Fuzzy Set Theory (FST) [4], proposed by Zadeh in 1965, has been very successful. In order to achieve an efficient evaluation of the perception of the experts, the use of linguistic variables[5] and the procedures of Computation with Words (CW) [6], [7] are used in intelligent computer systems [8], [9], [10], [11].

B. Intuitionistic fuzzy representation model

Intuitionistic Fuzzy Set (IFS) was proposed by Atanassov in 1986. IFS [12] is characterized by having simultaneously a membership and a non-membership with a degree of hesitance. The IFS are models of information representation used to support decision making and are very useful because of the ability to express imprecise or uncertain information more flexibly than the traditional fuzzy sets [2], [13].

According to Atanassov [12] an IFS A, in the universe $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, it is represented as:

$$\widetilde{A} = \langle x_j, \mu_{\widetilde{A}}(x_j), \nu_{\widetilde{A}}(x_j)\rangle \mid x_j \in X$$

where $\mu_{\widetilde{A}}(x_j) \in [0,1]$ and $\nu_{\widetilde{A}}(x_j) \in [0,1]$ represents respectively the membership and the non-membership degrees of the element x_j. Then an IFS has the following requirement:

$$0 \leq \mu_{\widetilde{A}}(x_j) + \nu_{\widetilde{A}}(x_j) \leq 1$$

The function $\pi_{\widetilde{A}}(x_j)$ represents the degree of hesitancy of x_j and it is defined as:

$$\pi_{\widetilde{A}}(x_j) = 1 - \mu_{\widetilde{A}}(x_j) - \nu_{\widetilde{A}}(x_j)$$

Let α and β be two intuitionistic fuzzy sets, λ be a number. Hence, the main algebraic operations of any two intuitionistic fuzzy sets $\alpha = (\mu_\alpha, \nu_\alpha)$ and $\beta = (\mu_\beta, \nu_\beta)$ can be defined in the following way [14] and [15]:

1) *Addition* $\oplus$*:*

$$\alpha \oplus \beta = (\mu_\alpha + \mu_\beta - \mu_\alpha\mu_\beta, \nu_\alpha\nu_\beta); \quad (1)$$

2) *Product* $\otimes$*:*

$$\alpha \otimes \beta = (\mu_\alpha\mu_\beta, \nu_\alpha + \nu_\beta - \nu_\alpha\nu_\beta); \quad (2)$$

3) *Scalar product:*

$$\lambda\alpha = (1 - (1 - \mu_\alpha)^\lambda, \nu_\alpha^\lambda), \lambda > 0; \quad (3)$$

4) *Scalar power:*

$$\alpha^\lambda = (\mu_{\alpha^\lambda}, 1 - (1 - \nu_\alpha)^\lambda), \lambda > 0. \quad (4)$$

The Intuitionistic Fuzzy Weighted Average (IFWA) aggregation operator was initially proposed by [15], it has been used to aggregate the individual opinions of decision makers [16], [17]. Let $R^{(k)} = (r_{ij}^{(k)})m \times n$ be an intuitionist decision-making matrix with the evaluations of each alternative A_i with $(i = 1, \ldots, m)$ and criterion C_j with $(j = 1, \ldots, n)$ by each decision maker DM_k with $(k = 1, \ldots, d)$. Let w_k be the weight of each decision maker DM_k where $\Sigma_{k=1}^n w_k = 1$. Then the final result of applying the $IFWA_w$ aggregation operatio operator is an IFS value given by Eq.(5):

$$\begin{aligned} IFWA_w &= IFWA_w(r_{ij}^{(1)}, r_{ij}^{(2)}, \ldots, r_{ij}^{(d)}) \\ &= w_1 r_{ij}^{(1)} \oplus w_2 r_{ij}^{(2)} \oplus w_3 r_{ij}^{(3)} \oplus \cdots \oplus w_k r_{ij}^{(d)} \\ &= [\chi, \psi, \delta] \end{aligned} \quad (5)$$

where

$$\begin{aligned} \chi &= 1 - \Pi_{k=1}^d (1 - \mu_{ij}^{(k)})^{w_k} \\ \psi &= \Pi_{k=1}^d (\nu_{ij}^{(k)})^{w_k} \\ \delta &= \Pi_{k=1}^d (1 - \mu_{ij}^{(k)})^{w_k} - \Pi_{k=1}^d (\nu_{ij}^{(k)})^{w_k}. \end{aligned}$$

Intuitionistic fuzzy representation has been widely used with multicriteria decision-making techniques [18] such as Intuitionistic fuzzy TOPSIS [17], Intuitionistic fuzzy AHP [19], Intuitionistic fuzzy VIKOR [20], Intuitionistic fuzzy ELECTRE [21], among others, with the purpose of order the alternatives.

C. Intuitionistic fuzzy TOPSIS

There are different techniques for the ranking of alternatives in MEMCLDM. TOPSIS is a technique which uses the order by similarity with an ideal solution [3]. TOPSIS is based on the fact that the alternative selected must be the one that contains the closest distance from the ideal solution and the furthest distance from the negative solution. The Fuzzy TOPSIS technique is widely applied in decision making [22] and it is considered as one of the best MCDM methods to solve problems. Due to its simplicity of application avoiding it application in alternatives ranking when a new alternative is inserted [23]. Boran et al. [16] proposes the Intuitionistic fuzzy TOPSIS to be applied following these steps:

1) Let $W_j = (\mu_j, \nu_j)$ be the intuitionistic fuzzy weight of each criteria C_j according to alternative A_i. Let $R^{'} = (r_{ij}^{'})_{m\times n}$ be the matrix of the aggregated intuitionistic fuzz sets with m alternatives and n criteria. Then the weighted normalized matrix is calculated by Eq.(6) and Eq.(7).

$$R^{'} \otimes W_i = \{(\mu_{r_{ij}^{'}}\mu_{W_j}, \nu_{r_{ij}^{'}} + \nu_{W_j} - \nu_{r_{ij}^{'}}\nu_{W_j}) \mid r_{ij}^{'} \in R^{'}\} \quad (6)$$

$$\pi_{r_{ij}^{'}} = (1 - \nu_{r_{ij}^{'}} - \nu_{W_j} - \mu_{r_{ij}^{'}}\mu_{W_j} + \nu_{r_{ij}^{'}}\nu_{W_j}) \quad (7)$$

2) The positive intuitionistic fuzzy ideal solution vector A^+ can be determined as:

$$A^+ = (\mu_{A^-}W_j, \nu_{A^+}W_j) \quad (8)$$

where

$$\mu_{A^+}W_j = \max_i \mu_{r'_{ij}} W_j$$
$$\nu_{A^+}W_j = \min_i \nu_{r'_{ij}} W_j.$$

3) The negative intuitionistic fuzzy ideal solution vector A^- can be determined as:

$$A^- = (\mu_{A^-}W_j, \nu_{A^-}W_j) \quad (9)$$

where

$$\mu_{A^-}W_j = min_i \mu_{r'_{ij}W_j}$$
$$\nu_{A^-}W_j = max_i \nu_{r'_{ij}W_j}.$$

4) Calculate the distance measurement, using the Euclidean distance. The separation of each alternative from the ideal solution is given as:

$$S_i^+ = \sqrt{\frac{1}{2n}\Sigma_{j=1}^n[(\mu_{r'_{ij}}W_j - \mu_{A^+}W_j)^2 + (\nu_{r'_{ij}}W_j - \nu_{A^+}W_j)^2 + (\pi_{r'_{ij}}W_j - \pi_{A^+}W_j)^2]}. \quad (10)$$

5) Similarly, the separation of the negative solution is given as:

$$S_i^- = \sqrt{\frac{1}{2n}\Sigma_{j=1}^n[(\mu_{r'_{ij}}W_j - \mu_{A^-}W_j)^2 + (\nu_{r'_{ij}}W_j - \nu_{A^-}W_j)^2 + (\pi_{r'_{ij}}W_j - \pi_{A^-}W_j)^2]}. \quad (11)$$

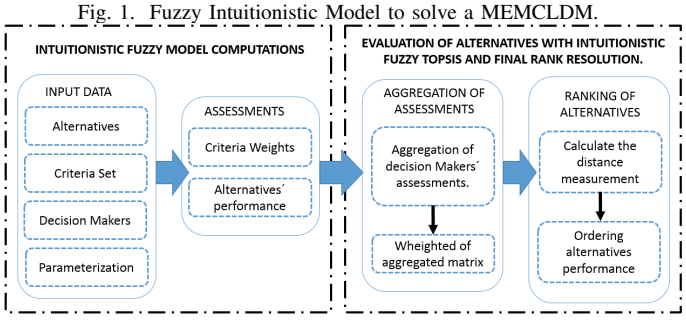
6) Then rank the order of preference by the relative proximity coefficient as:

$$RP_{A_i} = \frac{S_i^-}{S_i^- + S_i^+}. \quad (12)$$

III. A Fuzzy Linguistic Ranking Model

The proposed model for the ranking problem of the list of tools for evaluating Web Accessibility Test tools consists of three basic stages: (1) Representation phase, (2) Aggregation phase and (3) Exploitation phase. Figure (1) presents the proposed phases:

Fig. 1. Fuzzy Intuitionistic Model to solve a MEMCLDM.



A. Representation phase

The first phase consist of the definition of Linguistic Terms Set (LTS) that will be used for decision making. Decision makers denoted as DM_k with $(k = 1, \ldots, d)$. Should be select a set of diverse DM that have experience and knowledge directly related to the problem to evaluate the available alternatives. The set of alternatives A_i with $(i = 1, \ldots, m)$ are evaluated using a set of criteria C_j with $(j = 1, \ldots, n)$. The weight W_j of each criterion C_j assigned by a coordinator using an Intuitionistic Fuzzy Linguistic Set (IFLS). It would be desirable to represent the input linguistic information with a representation able to express uncertainty and subjectivity in judgments.

B. Aggregation phase

The second phase consists of aggregating the decision makers judgments. The IFWA operator presented in Eq. (5) can be used to aggregate them into a matrix of group decision making $R^{'} = (r^{'}_{ij})_{m\times n}$, where m and n denotes the number of evaluated alternatives and criteria respectively. Next, a weighting process of the group decision making matrix $R^{'}$ is performed using the weight vector W_j and applying Eq. (6) and Eq. (7).

C. Exploitation phase

In the last step of the decision-making process, the performance of each alternative should be calculated using the distance measurement. The ideal intuitionistic fuzzy positive and negative solutions are obtained as Eq. (8) and Eq. (9). The distance between each aggregated weighted evaluation of alternatives' performances and the ideal intuitionistic fuzzy positive and negative solution is calculated by Eq. (10) and Eq. (11). The final score of the alternatives performance is calculated by relative proximity as in Eq. (12). Finally, the alternatives are ordered.

IV. A Ranking Model for Web Accessibility Test Tools

It is desired to evaluate the level of accessibility of a web system. There are several tools supported by the World Wide Web Consortium (W3C) with different features. The DM set limits the main set to the six tools commonly used among them. The set of Web Accessibility Test (WAT) tools are evaluated in relation to a set of nine criteria. It must be decided which of this set of six tools is best suited to your needs. The tools considered are the following:

1) Wave[3] (c_1),
2) Achecher[4] (c_2),
3) eXaminator[5] (c_3),
4) AccessMonitor[6] (c_4),
5) Accessibility Check[7] (c_5),
6) TAW[8] (c_6).

A. Representation phase

For this case-study there are $d = 7$ decision makers who have knowledge in web development. The set of $m = 6$ WAT tools are assessed according to a set of $n = 9$ criteria described in Table (I). The linguistic intuitionistic variables in

[3]http://wave.webaim.org/
[4]https://achecker.ca/checker/index.php
[5]http://examinator.ws/
[6]http://www.acessibilidade.gov.pt/accessmonitor/
[7]http://www.etre.com/tools/accessibilitycheck/
[8]https://www.tawdis.net/

TABLE I
DESCRIPTION OF THE CRITERIA USED TO EVALUATE WEB ACCESSIBILITY TOOLS.

Criteria for evaluating accessibility assessment tools.		
Criteria C_j		Definition
c_1	Learnability	Enables simple and efficient learning.
c_2	Scope of application	Allows evaluation on sites with user permissions from an external site.
c_3	Displays element evaluation	Reveals the evaluations of each element to resolve any errors efficiently.
c_4	Accessibility level	Calculates the overall level of accessibility (A, AA, AAA).
c_5	Accuracy	Describes the assessments: (1) failed, 2 (warning) and (3) passed in a similar form as a manual assessment.
c_6	CSS evaluation	Evaluates accessibility of CSS content.
c_7	Reports	Generates reports that are easily interpreted by experts as ordinary users.
c_8	Intuitivity	Indicates inspected items for easy identification of errors, warnings and approvals.
c_9	Standardized output	Provides a report in standardized format: XML, JSON and YAML.

TABLE II
LINGUISTIC VARIABLES FOR THE IMPORTANCE WEIGHT OF EACH CRITERIA EXPRESSED AS IFS

Label	Short	μ	ν
Very High	VH	0.90	0.05
High	H	0.75	0.20
Medium	M	0.50	0.45
Low	L	0.35	0.60
Very Low	VL	0.10	0.90

Table (II) were used by a coordinator to define the weight W_j of each criteria C_j, as presented in Table (III). Also, using Table (II), each DM_k evaluates the performance of each alternative in each criterion. Table (IV) presents decision makers assessments.

B. Aggregation phase

Once the individual matrix of intuitionistic evaluations has been obtained, the matrix must be aggregated using the IFWA operator presented in Eq. (5). In this study-case, the weight of the decision makers were considered the same. The IFWA operator is used to aggregate them into a group decision making matrix. The aggregation results are presented in Table (V). Due to the space, only two assessments are displayed. Next, a weighting process of the group decision matrix $R^{'}$ is performed using the weight vector W_j and applying the Eq. (6) and Eq. (7). The results of the weighted aggregation for the criteria c_1 and c_2 are displayed in Table (VI).

TABLE III
INTUITIONISTIC FUZZY NUMBER (IFN) FOR EACH LINGUISTIC LABEL IN EACH CRITERIA

Intuitionistic Fuzzy Sets				
C_j	Criteria	Assessment	μ	ν
c_1	Learnability	Very High	0.90	0.05
c_2	Scope of application	Very High	0.90	0.05
c_3	Displays element evaluation	High	0.75	0.20
c_4	Accessibility level	Medium	0.50	0.45
c_5	Accurancy	High	0.75	0.20
c_6	Css evaluation	Medium	0.50	0.45
c_7	Reports	High	0.75	0.20
c_8	Intuition	High	0.75	0.20
c_9	Standardized output	Very High	0.90	0.05

C. Exploitation phase

In this step, the performance of each alternative should be calculated using the distance measurement from Fuzzy TOPSIS technique. The intuitionistic fuzzy ideal positive and negative solution are founded using Eq. (8) and Eq. (9). The distance between each aggregate weighted evaluation of the alternatives' results and the intuitionistic fuzzy ideal positive and negative solution is calculated using the Eq. (10) and Eq. (11). The results are presented by Table (VIII) and Table (IX) respectively.

Finally, the alternatives are ordered by relative proximity as in Eq. (12). The resulting order is presented in Table (X) with $a_1 > a_2 > a_6 > a_5 > a_3 > a_4$. Alternative a_1 is selected as the best tool with the best scores in 6 of 9 criteria evaluated. The selected tool can be highlight as very intuitive, since it marks errors and warnings in the html label, due this, it is easy to identify where are the errors.

V. Conclusion

This study proposed and tested a Multi-Expert Multi-Criteria Decision model in order to evaluate and select Web Accessibility Test tools that combines the Intuitionistic fuzzy representation and the TOPSIS technique. It fulfills several important characteristics for a decision making process:

- The use of linguistic variables instead of numerical scales enhances the assessment of alternatives in decision-making problems because the cognitive processes of human beings accept words rather than numbers;
- The use of Intuitionistic Fuzzy Set (ISF) is used due to the imprecision found in the parameterization since there may be a degree of hesitation. IFS takes into account the degree of membership, degree of non-membership and hesitancy;
- Finally, being able to rank the alternatives with fuzzy information allows a better interpretability of results for decision makers.

The Wave tool resulted best valuated in comparison with five tools. Wave is considered an easy learning tool, the plug-in installation to the browser is very simple. Wave has a high degree of intuitiveness and as a toolbar, it allows the evaluation of websites with the users' permissions. The assessment is displayed on each element evaluated, enabling rapid identification of errors and warnings. Experts rank the Wave tool first, considering the set of criteria. As a further research, it is suggested to explore other techniques in combination with linguistic fuzzy representations and compare their results with the proposal presented in this study.

Acknowledgment

This work was partly supported by the research project TIN2017-89517-P of the Ministry of Economy.

References

[1] S. Pohekar and M. Ramachandran, "Application of multi-criteria decision making to sustainable energy planning—a review," *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, vol. 8, no. 4, pp. 365–381, 2004.

TABLE IV
VALUATIONS OF $d = 7$ DECISION MAKERS FOR $m = 6$ ALTERNATIVES ACCORDING TO $n = 9$ CRITERIA

Criteria	Alternatives	dm_1			dm_2			dm_3			dm_4			dm_5			dm_6			dm_7		
		Linguistic label	μ	ν	Linguistic label	μ	ν	Linguistic label	μ	ν	Linguistic label	μ	ν	Linguistic label	μ	ν	Linguistic label	μ	ν	Linguistic label	μ	ν
c_1	a_1	VH	0.90	0.05	VH	0.90	0.05	H	0.75	0.20	VH	0.90	0.05	VH	0.90	0.05	H	0.75	0.20	H	0.75	0.20
	a_2	VH	0.90	0.05	VH	0.90	0.05	H	0.75	0.20	H	0.75	0.20	VH	0.90	0.05	L	0.35	0.60	H	0.75	0.20
	a_3	VH	0.90	0.05	VH	0.90	0.05	H	0.75	0.20	H	0.75	0.20	VH	0.90	0.05	H	0.75	0.20	M	0.50	0.45
	a_4	M	0.50	0.45	VH	0.90	0.05	VH	0.90	0.05	L	0.35	0.60	L	0.35	0.60	L	0.35	0.60	L	0.35	0.60
	a_5	L	0.35	0.60	M	0.50	0.45	VH	0.90	0.05	VH	0.90	0.05	H	0.75	0.20	M	0.50	0.45	L	0.35	0.60
	a_6	VH	0.90	0.05	H	0.75	0.20	H	0.75	0.20	VH	0.90	0.05	H	0.75	0.20	M	0.50	0.45	H	0.75	0.20
c_2	a_1	VH	0.90	0.05	VH	0.90	0.05	M	0.50	0.45	VH	0.90	0.05	VH	0.90	0.05	H	0.75	0.20	VH	0.90	0.05
	a_2	H	0.75	0.20	VL	0.10	0.90	H	0.75	0.20	M	0.50	0.45	M	0.50	0.45	M	0.50	0.45	VL	0.10	0.90
	a_3	H	0.75	0.20	VH	0.90	0.05	M	0.50	0.45	M	0.50	0.45	H	0.75	0.20	VL	0.10	0.90	H	0.75	0.20
	a_4	H	0.75	0.20	L	0.35	0.60	H	0.75	0.20	M	0.50	0.45	H	0.75	0.20	H	0.75	0.20	VL	0.10	0.90
	a_5	M	0.50	0.45	H	0.75	0.20	H	0.75	0.20	M	0.50	0.45	M	0.50	0.45	H	0.75	0.20	M	0.50	0.45
	a_6	VH	0.90	0.05	H	0.75	0.20	H	0.75	0.20	VH	0.90	0.05	H	0.75	0.20	H	0.75	0.20	H	0.75	0.20
c_3	a_1	H	0.75	0.20	VH	0.90	0.05	M	0.50	0.45	VH	0.90	0.05	VH	0.90	0.05	H	0.75	0.20	VH	0.90	0.05
	a_2	VH	0.90	0.05	M	0.50	0.45	M	0.50	0.45	VH	0.90	0.05	VH	0.90	0.05	M	0.50	0.45	H	0.75	0.20
	a_3	H	0.75	0.20	VL	0.10	0.90	M	0.50	0.45	H	0.75	0.20	M	0.50	0.45	M	0.50	0.45	H	0.75	0.20
	a_4	L	0.35	0.60	VL	0.10	0.90	H	0.75	0.20	L	0.35	0.60	L	0.35	0.60	L	0.35	0.60	VL	0.10	0.90
	a_5	M	0.50	0.45	VL	0.10	0.90	H	0.75	0.20	VH	0.90	0.05	H	0.75	0.20	VL	0.10	0.90	M	0.50	0.45
	a_6	M	0.50	0.45	H	0.75	0.20	M	0.50	0.45	M	0.50	0.45	M	0.50	0.45	M	0.50	0.45	H	0.75	0.20
c_4	a_1	H	0.75	0.20	VL	0.10	0.90	VH	0.90	0.05	H	0.75	0.20	H	0.75	0.20	L	0.35	0.60	M	0.50	0.45
	a_2	H	0.75	0.20	H	0.75	0.20	VL	0.10	0.90	VH	0.90	0.05	H	0.75	0.20	VH	0.90	0.05	VL	0.10	0.90
	a_3	H	0.75	0.20	H	0.75	0.20	VL	0.10	0.90	VH	0.90	0.05	H	0.75	0.20	M	0.50	0.45	H	0.75	0.20
	a_4	L	0.35	0.60	VL	0.10	0.90	VL	0.10	0.90	VL	0.10	0.90	VL	0.10	0.90	VL	0.10	0.90	VL	0.10	0.90
	a_5	VL	0.10	0.90	VH	0.90	0.05	VL	0.10	0.90	VH	0.90	0.05	VH	0.90	0.05	VH	0.90	0.05	VL	0.10	0.90
	a_6	VH	0.90	0.05	H	0.75	0.20	VL	0.10	0.90	VH	0.90	0.05	VH	0.90	0.05	VH	0.90	0.05	H	0.75	0.20
c_5	a_1	H	0.75	0.20	VH	0.90	0.05	M	0.50	0.45	H	0.75	0.20	VH	0.90	0.05	H	0.75	0.20	H	0.75	0.20
	a_2	H	0.75	0.20	VH	0.90	0.05	H	0.75	0.20	H	0.75	0.20	H	0.75	0.20	H	0.75	0.20	M	0.50	0.45
	a_3	H	0.75	0.20	VL	0.10	0.90	H	0.75	0.20	H	0.75	0.20	H	0.75	0.20	L	0.35	0.60	M	0.50	0.45
	a_4	L	0.35	0.60	L	0.35	0.60	H	0.75	0.20	L	0.35	0.60	L	0.35	0.60	L	0.35	0.60	L	0.35	0.60
	a_5	M	0.50	0.45	L	0.35	0.60	H	0.75	0.20	VH	0.90	0.05	H	0.75	0.20	L	0.35	0.60	M	0.50	0.45
	a_6	VH	0.90	0.05	H	0.75	0.20	M	0.50	0.45	VH	0.90	0.05	H	0.75	0.20	M	0.50	0.45	H	0.75	0.20
c_6	a_1	H	0.75	0.20	VL	0.10	0.90	M	0.50	0.45	VH	0.90	0.05	VH	0.90	0.05	VL	0.10	0.90	H	0.75	0.20
	a_2	H	0.75	0.20	M	0.50	0.45	VL	0.10	0.90	VH	0.90	0.05	H	0.75	0.20	H	0.75	0.20	L	0.35	0.60
	a_3	H	0.75	0.20	L	0.35	0.60	VL	0.10	0.90	VH	0.90	0.05	M	0.50	0.45	H	0.75	0.20	M	0.50	0.45
	a_4	VL	0.10	0.90	VL	0.10	0.90	M	0.50	0.45	L	0.35	0.60	L	0.35	0.60	L	0.35	0.60	L	0.35	0.60
	a_5	M	0.50	0.45	H	0.75	0.20	M	0.50	0.45	H	0.75	0.20	H	0.75	0.20	H	0.75	0.20	M	0.50	0.45
	a_6	VH	0.90	0.05	M	0.50	0.45	VL	0.10	0.90	VH	0.90	0.05	M	0.50	0.45	H	0.75	0.20	M	0.50	0.45
c_7	a_1	H	0.75	0.20	M	0.50	0.45	M	0.50	0.45	H	0.75	0.20	M	0.50	0.45	H	0.75	0.20	M	0.50	0.45
	a_2	VH	0.90	0.05	M	0.50	0.45	M	0.50	0.45	H	0.75	0.20	M	0.50	0.45	M	0.50	0.45	M	0.50	0.45
	a_3	L	0.35	0.60	VH	0.90	0.05	M	0.50	0.45	H	0.75	0.20	VH	0.90	0.05	L	0.35	0.60	VL	0.10	0.90
	a_4	VL	0.10	0.90	VL	0.10	0.90	M	0.50	0.45	L	0.35	0.60	L	0.35	0.60	L	0.35	0.60	M	0.50	0.45
	a_5	L	0.35	0.60	L	0.35	0.60	M	0.50	0.45	VH	0.90	0.05	H	0.75	0.20	L	0.35	0.60	L	0.35	0.60
	a_6	H	0.75	0.20	M	0.50	0.45	M	0.50	0.45	H	0.75	0.20	VH	0.90	0.05	H	0.75	0.20	M	0.50	0.45
c_8	a_1	VH	0.90	0.05	VH	0.90	0.05	H	0.75	0.20	H	0.75	0.20	H	0.75	0.20	H	0.75	0.20	H	0.75	0.20
	a_2	H	0.75	0.20	M	0.50	0.45	H	0.75	0.20	H	0.75	0.20	H	0.75	0.20	M	0.50	0.45	M	0.50	0.45
	a_3	H	0.75	0.20	VL	0.10	0.90	M	0.50	0.45	H	0.75	0.20	VH	0.90	0.05	L	0.35	0.60	M	0.50	0.45
	a_4	L	0.35	0.60	L	0.35	0.60	M	0.50	0.45	L	0.35	0.60	L	0.35	0.60	L	0.35	0.60	L	0.35	0.60
	a_5	L	0.35	0.60	L	0.35	0.60	M	0.50	0.45	VH	0.90	0.05	VH	0.90	0.05	L	0.35	0.60	M	0.50	0.45
	a_6	H	0.75	0.20	H	0.75	0.20	M	0.50	0.45	H	0.75	0.20	VH	0.90	0.05	M	0.50	0.45	H	0.75	0.20
c_9	a_1	H	0.75	0.20	VL	0.10	0.90	VH	0.90	0.05	VL	0.10	0.90	VL	0.10	0.90	H	0.75	0.20	VL	0.10	0.90
	a_2	H	0.75	0.20	VH	0.90	0.05	L	0.35	0.60	VH	0.90	0.05	H	0.75	0.20	M	0.50	0.45	VL	0.10	0.90
	a_3	M	0.50	0.45	VL	0.10	0.90	L	0.35	0.60	VL	0.10	0.90	VL	0.10	0.90	L	0.35	0.60	VL	0.10	0.90
	a_4	L	0.35	0.60	VL	0.10	0.90	L	0.35	0.60	L	0.35	0.60	L	0.35	0.60	L	0.35	0.60	L	0.35	0.60
	a_5	L	0.35	0.60	L	0.35	0.60	L	0.35	0.60	VL	0.10	0.90	M	0.50	0.45	L	0.35	0.60	VL	0.10	0.90
	a_6	VL	0.10	0.90	M	0.50	0.45	M	0.50	0.45	L	0.35	0.60	M	0.50	0.45	M	0.50	0.45	M	0.50	0.45

TABLE V
AGGREGATION MATRIX OF a_1 AND a_2

	a_1			a_2		
	μ	ν	π	μ	ν	π
c_1	0.85	0.09	0.06	0.81	0.13	0.06
c_2	0.86	0.08	0.06	0.51	0.44	0.05
c_3	0.84	0.10	0.06	0.77	0.16	0.07
c_4	0.67	0.27	0.07	0.72	0.21	0.07
c_5	0.79	0.15	0.06	0.76	0.18	0.06
c_6	0.69	0.23	0.07	0.67	0.27	0.07
c_7	0.63	0.32	0.05	0.64	0.29	0.07
c_8	0.81	0.13	0.06	0.66	0.28	0.05
c_9	0.54	0.39	0.07	0.71	0.22	0.07

TABLE VI
WEIGHTED AGGREGATION MATRIX FOR a_1 AND a_2

	a_1			a_2		
	μ	ν	π	μ	ν	π
c_1	0.77	0.14	0.10	0.73	0.17	0.10
c_2	0.77	0.13	0.10	0.46	0.46	0.07
c_3	0.63	0.28	0.09	0.58	0.33	0.10
c_4	0.33	0.60	0.07	0.36	0.56	0.07
c_5	0.59	0.32	0.09	0.57	0.35	0.08
c_6	0.35	0.58	0.08	0.33	0.60	0.07
c_7	0.47	0.45	0.07	0.48	0.43	0.09
c_8	0.61	0.31	0.09	0.50	0.43	0.08
c_9	0.49	0.42	0.09	0.64	0.26	0.10

TABLE VII
IDEAL INTUITIONISTIC FUZZY POSITIVE AND NEGATIVE SOLUTIONS.

	c_1			c_2			$\cdots$	c_9		
	μ	ν	π	μ	ν	π	$\cdots$	μ	ν	π
A+	0.77	0.14	0.10	0.77	0.13	0.10	$\cdots$	0.64	0.26	0.10
A-	0.57	0.32	0.11	0.46	0.46	0.07	$\cdots$	0.22	0.74	0.04

[2] J.-J. Wang, Y.-Y. Jing, C.-F. Zhang, and J.-H. Zhao, "Review on multi-criteria decision analysis aid in sustainable energy decision-making," *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, vol. 13, no. 9, pp. 2263–2278, 2009.

[3] C.-L. Hwang and K. Yoon, *Methods for Multiple Attribute Decision Making*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1981, pp. 58–191.

[4] L. A. Zadeh, "Information and control," *Fuzzy Sets*, vol. 8, no. 3, pp. 338–353, 1965.

TABLE VIII
POSITIVE DISTANCE OF a_1 AND a_2

	a_1			a_2		
	μ	ν	π	μ	ν	π
c_1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
c_2	0.00	0.00	0.00	0.09	0.11	0.00
c_3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
c_4	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
c_5	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
c_6	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
c_7	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
c_8	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.00
c_9	0.02	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00

TABLE IX
NEGATIVE DISTANCE a_1 AND a_2

	a_1			a_2		
	μ	ν	π	μ	ν	π
c_1	0.04	0.03	0.00	0.02	0.02	0.00
c_2	0.09	0.11	0.00	0.00	0.00	0.00
c_3	0.12	0.14	0.00	0.09	0.11	0.00
c_4	0.07	0.10	0.00	0.08	0.12	0.00
c_5	0.07	0.08	0.00	0.06	0.07	0.00
c_6	0.04	0.05	0.00	0.03	0.04	0.00
c_7	0.05	0.06	0.00	0.05	0.07	0.00
c_8	0.11	0.12	0.00	0.05	0.05	0.00
c_9	0.07	0.10	0.00	0.17	0.23	0.00

[5] ——, "The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning," *Information Sciences*, vol. 8, no. 3, pp. 199–249, 1975.

[6] S. H. Rubin, "Computing with words," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, vol. 29, no. 4, pp. 518–524, 1999.

[7] L. A. Zadeh, "Fuzzy logic= computing with words," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 4, no. 2, pp. 103–111, 1996.

[8] R. Montes, A. Sánchez, P. Villar, and F. Herrera, "A web tool to support decision making in the housing market using hesitant fuzzy linguistic term sets," *Applied Soft Computing*, vol. 35, pp. 949–957, 2015.

[9] R. Montes, A. M. Sanchez, P. Villar, and F. Herrera, "Teranga go!: Carpooling collaborative consumption community with multi-criteria hesitant fuzzy linguistic term set opinions to build confidence and trust," *Applied Soft Computing*, vol. 67, pp. 941–952, 2018.

[10] J. Mendel, L. A. Zadeh, E. Trillas, R. R. Yager, J. Lawry, H. Hagras, and S. Guadarrama, "What computing with words means to me," *IEEE Computational Intelligence Magazine*, vol. 5, pp. 20–26, 2010.

[11] J. Morales, R. Montes, N. Zermeño, J. Duran, and F. Herrera, "The use of fuzzy linguistic information and fuzzy delphi method to validate by consensus a questionnaire in a blended-learning environment," in *Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems. Applications*. Springer International Publishing, 2018, pp. 137–149.

[12] K. T. Atanassov, "Intuitionistic fuzzy sets," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 20, no. 1, pp. 87–96, 1986.

[13] Z. Yue and Y. Jia, "A group decision making model with hybrid intuitionistic fuzzy information," *Computers & Industrial Engineering*, vol. 87, pp. 202–212, 2015.

[14] K. T. Atanassov, "Operators over interval valued intuitionistic fuzzy sets," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 64, no. 2, pp. 159–174, 1994.

[15] Z. Xu, "Intuitionistic fuzzy aggregation operators," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 15, no. 6, pp. 1179–1187, 2007.

[16] F. E. Boran, S. Genç, M. Kurt, and D. Akay, "A multi-criteria intuitionistic fuzzy group decision making for supplier selection with topsis method," *Expert Systems with Applications*, vol. 36, no. 8, pp. 11 363–11 368, 2009.

[17] B. Rouyendegh, "Developing an integrated anp and intuitionistic fuzzy topsis model for supplier selection," *Journal of Testing and Evaluation*, vol. 43, no. 3, pp. 664–672, 2015.

[18] E. Afful-Dadzie, Z. K. Oplatkova, and L. A. B. Prieto, "Comparative state-of-the-art survey of classical fuzzy set and intuitionistic fuzzy sets in multi-criteria decision making," *International Journal of Fuzzy Systems*, vol. 19, no. 3, pp. 726–738, 2017.

[19] S. Shariati, M. Abedi, A. Saedi, A. Yazdani-Chamzini, J. Tamošaitienė, J. Šaparauskas, and S. Stupak, "Critical factors of the application of nanotechnology in construction industry by using anp technique under fuzzy intuitionistic environment," *Journal of Civil Engineering and Management*, vol. 23, no. 7, pp. 914–925, 2017.

[20] Y. Yuan, T. Guan, X. Yan, and Y. Li, "Based on hybrid vikor method decision making model for supplier selection," *Control and Decision*, vol. 29, no. 3, pp. 551–560, 2014.

[21] S. Ebrahimnejad, H. Hashemi, S. Mousavi, and B. Vahdani, "A new interval-valued intuitionistic fuzzy model to group decision making for the selection of outsourcing providers." *Economic Computation & Economic Cybernetics Studies & Research*, vol. 49, no. 2, 2015.

[22] B. Pardha Saradhi, N. R. Shankar, and C. Suryanarayana, "Novel distance measure in fuzzy topsis for supply chain strategy based supplier selection," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2016, 2016.

[23] R. J. Kuo, C. W. Hsu, and Y. L. Chen, "Integration of fuzzy anp and fuzzy topsis for evaluating carbon performance of suppliers," *International Journal of Environmental Science and Technology*, vol. 12, no. 12, pp. 3863–3876, 2015.

TABLE X
RANKING OF WEB ACCESSIBILITY TEST TOOLS

Solution	S^+	S^-	RP_{A_i}	Ranking
a_1	0.062	0.287	0.822	1
a_2	0.118	0.269	0.694	2
a_3	0.185	0.197	0.516	5
a_4	0.303	0.042	0.122	6
a_5	0.175	0.192	0.523	4
a_6	0.115	0.253	0.689	3

Estabilidad de las decisiones en el tiempo, ¿cómo medirla?

R. de Andrés Calle
BORDA Research Unit,
PRESAD Research Group and
Multidisciplinary Institute of Enterprise
University of Salamanca,
E37007 Salamanca, Spain
rocioac@usal.es

J.M. Cascón
Department of Economics
and Economic History
Institute on Fundamental Physics
and Mathematics
University of Salamanca,
E37007 Salamanca, Spain
casbar@usal.es

T. González-Arteaga
BORDA and PRESAD Research Groups
Multidisciplinary Institute of Enterprise
University of Valladolid,
E47011 Valladolid, Spain
teresa.gonzalez.arteaga@uva.es

***Resumen*—En esta contribución se propone un enfoque no tradicional en la medición de la estabilidad de las decisiones tomadas por los agentes a lo largo del tiempo. Esta contribución se centra en medir la estabilidad de las decisiones de los agentes en un contexto intertemporal bajo el supuesto de considerar las decisiones temporales como preordenes completos sobre las alternativas. Con este objetivo principal, se introduce el concepto general de *medida de la estabilidad de las decisiones* intertemporales, así como dos medidas particulares.**

***Index Terms*—Estabilidad de las decisiones en el tiempo, preferencias intertemporales, preordenes, efecto pérdida de memoria**

I. Introducción

El comportamiento humano implica decisiones intertemporales. En estas decisiones la persona debe evaluar los costes y los beneficios de decidir sobre un conjunto de alternativas en diferentes momentos del tiempo. Todos los días, los seres humanos tomamos decisiones intertemporales, por ejemplo cuando seleccionamos entre comer algo a media mañana o comer una comida completa a medio día o entre ir de vacaciones o aumentar la contribución al fondo de pensiones, etc.

El estudio de la elección intertemporal ha recibido atención desde diversas áreas de investigación como Economía, Psicología, Análisis de Decisión, Neurociencia, etc.

En términos generales, en la literatura especializada existen dos enfoques diferentes para tratar la medición de la estabilidad temporal de las decisiones de los individuos. El primero se centra en explorar las causas del comportamiento mediante procesos de optimización general (ver [1], [2] y [3], entre otros). En esta línea, es posible enmarcar los modelos económicos contemporáneos en los que los humanos toman decisiones intertemporales maximizando una función de utilidad de descuento exponencial. El segundo enfoque, proporcionado por los psicólogos, es el empírico. El comportamiento humano en las elecciones intertemporales se estudia mediante datos empíricos recopilados de los laboratorios (ver [4], [5], [6] y [7]).

El objetivo de esta contribución es aportar un nuevo enfoque a la medición de la estabilidad de las decisiones intertemporales. En particular, se pretende desarrollar una nueva herramienta capaz de analizar el comportamiento humano en la toma de decisiones intertemporales y de medir la estabilidad de esas decisiones. Este trabajo está inspirado en la metodologa propuesta por González-Arteaga, de Andrés Calle y Peral [8], [9] donde la noción de estabilidad de las decisiones intertemporales se considera en la misma línea que la noción de cohesión. En [8] los agentes establecen sus preferencias sobre una única alternativa de manera dicotómica. La suposición de opiniones dicotómicas y de considerar una única alternativa en este contexto particular podría limitar y perturbar los resultados del análisis del comportamiento debido a que la evidencia sugiere que los humanos pueden experimentar dificultades para expresar el conocimiento incierto de forma dicotómica [10].

En consecuencia, esta investigación se centra en un problema intertemporal de toma de decisiones bajo un marco general, es decir, los agentes expresan sus decisiones temporales sobre un conjunto finito de alternativas mediante preordenes completos en diferentes momentos de tiempo. Por tanto, el objetivo de esta aportación es determinar cuánto de estables son las decisiones de los agentes a lo largo del tiempo y para ello se define una nuevo concepto general, la *medida de estabilidad de decisiones* en el tiempo. Por otra parte, se proponen dos medidas específicas de estabilidad de las decisiones, la *medida local de estabilidad* y la *medida global de estabilidad*.

La estructura general de esta contribución se divide en tres secciones. La Sección II introduce la notación empleada así como los conceptos básicos utilizados. En la Sección III se define el concepto general de medida de estabilidad de las decisiones intertemporales. Además, en esta sección se introducen las dos clases específicas consideradas. En la Sección IV se incluye un ejemplo real sobre la estabilidad de las decisiones temporales en educación de algunos países basado en los datos procedentes del informe PISA. Finalmente

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad Proyecto ECO2016-77900-P (R. de Andrés Calle y T. González-Arteag) y por la Conserjería de Educación de la Junta de Castilla y León Proyecto SA020U16 (J.M. Cascón).

se proporcionan algunas conclusiones e ideas sobre investigaciones futuras.

II. Notación

Sea $\mathbf{N} = \{1, \ldots, n\}$, $n > 1$ un conjunto de individuos, expertos o miembros de una sociedad. Sea $\mathbf{X} = \{x_1, \ldots, x_k\}$ un conjunto finito de alternativas, $\mid \mathbf{X} \mid \geq 2$. Por simplicidad, en ocasiones la alternativa x_s será denotada por s.

Los miembros de la sociedad establecen sobre el conjunto de alternativas rankings mediante preordenes completos, $\mathcal{R}$. $\mathbf{W}(\mathbf{X})$ denota el conjunto de todos los preordenes completos sobre $\mathbf{X}$.

Sea $\mathcal{R} \in \mathbf{W}(\mathbf{X})$ un preorden completo, entonces $x_i \succ_{\mathcal{R}} x_j$ significa que la alternativa x_i es estrictamente preferida a la alternativa x_j, $x_i \sim_{\mathcal{R}} x_j$ significa que la alternativas son igualmente preferidas y por último $x_i \succcurlyeq_{\mathcal{R}} x_j$ significa que la alternativa x_i es al menos tan preferida como la alternativa x_j.

Denotaremos por $\mathcal{R}_i \in \mathbf{W}(\mathbf{X})$ a la *decisión temporal* que la sociedad toma sobre el conjunto de alternativas $\mathbf{X}$ en el momento del tiempo $t_i \in \mathbf{T}$, $\mathbf{T} = \{t_0, \ldots, t_T\}$. Una permutación π sobre las alternativas $\{x_1, \ldots, x_k\}$ determina otro preorden ${}^{\pi}\mathcal{R}$ tal que: $x_i \succcurlyeq_{{}^{\pi}\mathcal{R}} x_j \iff x_{\pi^{-1}(i)} \succcurlyeq_{\mathcal{R}} x_{\pi^{-1}(j)}$ para $i, j \in \{1, \ldots, k\}$.

Sea $\mathcal{P} = (\mathcal{R}_0, \ldots, \mathcal{R}_T) \in \mathbf{W}(\mathbf{X}) \times \ldots \times \mathbf{W}(\mathbf{X}) = \mathbf{W}(\mathbf{X})^{T+1}$ un *perfil de decisión temporal* sobre el conjunto de alternativas $\mathbf{X}$. El elemento $\mathcal{R}_i \in \mathcal{P}$ representa la decisión temporal de la sociedad sobre el conjunto de alternativas $\mathbf{X}$ en el momento del tiempo t_i, $i \in \{0, \ldots, T\}$. El reverso del perfil de decisión temporal, denotado por P^{-1}, es el perfil $(\mathcal{R}_0^{-1}, \ldots, \mathcal{R}_T^{-1})$ donde $x_i \succcurlyeq_{\mathcal{R}^{-1}} x_j \iff x_j \succcurlyeq_{\mathcal{R}} x_i$.

Una permutación π de las alternativas $\{x_1, \ldots, x_k\}$ determina un perfil de decisión temporal ${}^{\pi}\mathcal{P}$ donde cada decisión temporal es permutada de acuerdo a π. Una permutación σ de los momentos del tiempo $\{t_0, \ldots, t_T\}$ determina una permutación sobre el perfil de decisión temporal $\mathcal{P}^{\sigma}$ mediante la permutación de las decisiones temporales de acuerdo a σ.

Tratar con información ordinal implica necesariamente establecer de manera precisa la forma en que se representa. La primera discusión y análisis formal sobre la transformación de información ordinal en valores numéricos surgió con el trabajo de Borda [11]. Posteriormente, se han propuesto diversos procedimientos para este fin como [12], [13] y [14], entre otros.

La elección de un procedimiento de codificación robusto es un aspecto esencial para trabajar con información ordinal y obtener resultados consistentes. En esta contribución se utiliza el método de codificación propuesto en [15], el cuál está caracterizado.

Dada una decisión temporal $\mathcal{R}_i \in \mathbf{W}(\mathbf{X})$, su *vector de codificación canónica* es

$$\mathbf{c}_{\mathcal{R}_i} = (c_1^{\mathcal{R}_i}, \ldots, c_k^{\mathcal{R}_i}) \in (\{1, \ldots, k\})^k$$

donde $c_j^{\mathcal{R}_i}$ es el número de alternativas que son clasificadas al menos tan buenas como x_j en el momento del tiempo t_i, esto es $c_j^{\mathcal{R}_i} = \mid \{q : x_j \succcurlyeq_{\mathcal{R}_i} x_q\}$.

El conjunto de todas las posibles codificaciones canónicas asociadas a $\mathbf{W}(\mathbf{X})$ es denotado por $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{W}(\mathbf{X}))$.

Dado un perfil de decisión temporal $\mathcal{P} = (\mathcal{R}_0, \ldots, \mathcal{R}_T) \in \mathbf{W}(\mathbf{X})^{T+1}$, su *perfil de codificación canónica* es una matriz $k \times (T+1)$, $\mathcal{M}_{\mathcal{P}} = (\mathbf{c}_{\mathcal{R}_0}, \ldots, \mathbf{c}_{\mathcal{R}_T}) \in \mathbb{M}_{k \times (T+1)}$ donde la columna i-ésima, denotada por $\mathbf{c}_{\mathcal{R}_i}$ representa la codificación canónica de la decisión temporal $\mathcal{R}_i$ en el momento $t_i \in \mathbf{T}$.

Una permutación π de las alternativas $\{x_1, \ldots, x_k\}$ determina un perfil de codificación canonica ${}^{\pi}M_{\mathcal{P}}$ mediante la permutación de las filas de $M_{\mathcal{P}}$: la fila i del perfil ${}^{\pi}M_{\mathcal{P}}$ es la fila $\pi(i)$ del perfil $M_{\mathcal{P}}$. Una permutación σ de los momentos del tiempo $\{t_0, \ldots, t_T\}$ determina una permutación sobre el perfil de de codificación canonica $M_{\mathcal{P}}^{\sigma}$ mediante la permutación de las columnas de $M_{\mathcal{P}}$: la columna i del perfil $M_{\mathcal{P}}^{\sigma}$ es la columna $\sigma(i)$ del perfil $M_{\mathcal{P}}$.

III. Medición de la estabilidad de las decisiones en el tiempo

Esta sección está dedicada a introducir nuestra propuesta general para la medición de estabilidad de las decisiones a lo largo del tiempo, así como dos medias particulares.

Definición 1: Sea $\mathcal{P} \in \mathbf{W}(\mathbf{X})^{T+1}$ un perfil de decisión temporal. Una *medida de estabilidad de las decisiones* en el tiempo sobre $\mathcal{P} \in \mathbf{W}(\mathbf{X})^{T+1}$ es una función $\mu : \mathbf{W}(\mathbf{X})^{T+1} \longrightarrow [0, 1]$ que asigna a cada perfil de decisión temporal un valor en el intervalo unidad $\mu(\mathcal{P})$ con las siguientes propiedades:

i. Estabilidad máxima de la decisión:

$$\mu(\mathcal{P}) = 1 \iff \mathcal{R}_0 = \ldots = \mathcal{R}_T$$

ii. Neutralidad de la decisión sobre las alternativas:

$$\mu({}^{\pi}\mathcal{P}) = \mu(\mathcal{P})$$

para cada permutación π sobre el conjunto de las alternativas.

Definición 2: Sea $\mathcal{P} = (\mathcal{R}_0, \ldots, \mathcal{R}_T) \in \mathbf{W}(\mathbf{X})^{T+1}$ un perfil de decisión temporal y $\mathcal{M}_{\mathcal{P}} = (\mathbf{c}_{\mathcal{R}_0}, \ldots, \mathbf{c}_{\mathcal{R}_T}) \in \mathbb{M}_{k \times (T+1)}$ su correspondiente matriz de codificación canónica. La *medida local de estabilidad* entre las decisiones temporales $\mathcal{R}_{i-1}$ y $\mathcal{R}_i$ es una aplicación $\theta_i : \mathbf{W}(\mathbf{X})^2 \longrightarrow [0, 1]$ tal que

$$\theta_i(\mathcal{P}) = \theta_{[i-1,i]}\ (\mathcal{P}) = 1 - \frac{\parallel \mathbf{c}_{\mathcal{R}_{i-1}} - \mathbf{c}_{\mathcal{R}_i} \parallel_1}{r}$$

donde $\mathbf{c}_{\mathcal{R}_{i-1}}$ y $\mathbf{c}_{\mathcal{R}_i}$ son los vectores de codificación canónica asociados a las decisiones temporales tomadas en t_{i-1} y t_i, respectivamente; $\parallel \cdot \parallel_1$ denota la norma l_1, y por tanto $\parallel \mathbf{c}_{\mathcal{R}_{i-1}} - \mathbf{c}_{\mathcal{R}_i} \parallel_1 = \sum_{h=1}^{k} \mid c_h^{\mathcal{R}_{i-1}} - c_h^{\mathcal{R}_i} \mid$, finalmente $r = \max_{\mathbf{c}, \mathbf{c}' \in \mathbf{F}} \parallel \mathbf{c} - \mathbf{c}' \parallel_1$.

Por consiguiente:

$$\theta_i(\mathcal{P}) = \theta_{[i-1,i]}\ (\mathcal{P}) = 1 - \frac{\sum_{h=1}^{k} \mid c_h^{\mathcal{R}_{i-1}} - c_h^{\mathcal{R}_i} \mid}{\max\limits_{\mathbf{c},\mathbf{c}' \in \mathbf{F}} \parallel \mathbf{c} - \mathbf{c}^{'} \parallel_1}$$

La medida local de estabilidad entre dos decisiones es una medida de estabilidad dado que verifica las propiedades:

i. Estabilidad máxima de la decisión:

$$\theta_i(\mathcal{P}) = \theta_{[i-1,i]}\ (\mathcal{P}) = 1 \Longleftrightarrow \mathcal{R}_{i-1} = \mathcal{R}_i$$

ii. Neutralidad de la decisión sobre las alternativas:

$$\theta_i({}^{\pi}\mathcal{P}) = \theta_{[i-1,i]}\ ({}^{\pi}\mathcal{P}) = \theta_{i-1,i}\ (\mathcal{P}) = \theta_i(\mathcal{P})$$

para cada permutación π sobre las alternativas $\{1,\ldots,k\}$.

Proposición 1: La máxima inestabilidad entre dos decisiones temporales viene dada por el diámetro de la envolvente convexa del conjunto de todas las codificaciones canónicas asociadas a $\mathbf{W}(\mathbf{X})$, i.e., $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$ para la norma l_1:

$$r = \max_{u,v \in Conv(\mathbf{F})} \parallel u - v \parallel_1$$

donde

$$Conv(\mathbf{F}) = \left\{ \sum_{j=1}^{|\mathbf{F}|} \alpha_j \cdot \mathbf{c}_j :\ 0 \leq \alpha_j \leq 1,\ \sum_{j=1}^{|\mathbf{F}|} \alpha_j = 1 \right\}.$$

Proposición 2: La máxima inestabilidad entre dos decisiones temporales esta determinada por las siguientes expresiones:

- Para $\mathbf{X} = \{x_1,\ldots,x_k\}$ con k par:

$$r = \frac{3}{4}k^2 - \frac{k}{2}$$

- Para $\mathbf{X} = \{x_1,\ldots,x_k\}$ con k impar:

$$r = \frac{3}{4}k^2 - \frac{k}{2} - \frac{1}{4}$$

Con el objetivo de mejorar la comprensión de la notación y de las definiciones introducidas, se presenta el siguiente ejemplo ilustrativo.

Ejemplo 1: Sea $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, x_3\}$ un conjunto de tres alternativas ($k = 3$). Todos los posibles preordenes, $\mathcal{R} \in \mathbf{W}(\mathbf{X})$, para esas tres alternativas están recogidos en la primera columna de la Tabla 1. La segunda columna incluye la codificación canónica de estos preordenes, $\mathbf{c}_{\mathcal{R}}$.

Supongamos ahora dos momentos en el tiempo t_1 y t_2 donde se han tomado las decisiones temporales $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$, respectivamente.

$$\mathcal{R}_1 : x_1 \sim x_2 \succ x_3$$

$$\mathcal{R}_2 : x_1 \succ x_2 \succ x_3$$

$\mathcal{R}$	$\mathbf{c}_{\mathcal{R}}$
$x_1 \sim x_2 \sim x_3$	$(3,3,3)$
$x_1 \sim x_2 \succ x_3$	$(3,3,1)$
$x_1 \succ x_2 \sim x_3$	$(3,2,2)$
$x_2 \succ x_1 \sim x_3$	$(2,3,2)$
$x_3 \succ x_1 \sim x_2$	$(2,2,3)$
$x_1 \succ x_2 \succ x_3$	$(3,2,1)$
$x_1 \succ x_3 \succ x_2$	$(3,1,2)$
$x_2 \succ x_1 \succ x_3$	$(2,3,1)$
$x_2 \succ x_3 \succ x_1$	$(1,3,2)$
$x_3 \succ x_1 \succ x_2$	$(2,1,3)$
$x_3 \succ x_2 \succ x_1$	$(1,2,3)$

Cuadro I: Preordenes y codificación canónica para $k = 3$.

Para analizar el nivel de estabilidad de las decisiones tomadas en t_1 y t_2 se utiliza la medida local de estabilidad proporcionada por la Definición 2:

$$\theta_2(\mathcal{P}) = \theta_{[1,2]}\ (\mathcal{P}) = 1 - \frac{\sum_{h=1}^{3} \mid c_h^{\mathcal{R}_1} - c_h^{\mathcal{R}_2} \mid}{\max\limits_{\mathbf{c},\mathbf{c}' \in \mathbf{F}} \parallel \mathbf{c} - \mathbf{c}^{'} \parallel_1}$$

En este caso, la envolvente convexa del conjunto de todas las codificaciones canónicas está representada desde diferentes perspectivas en las Figuras 1 y 2.

Aplicando los resultados de las Proposiciones 1 y 2, el diámetro de esta envolvente convexa viene dado por la expresión:

$$r = \frac{3}{4}k^2 - \frac{k}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \cdot 3^2 - \frac{3}{2} - \frac{1}{4} = 5$$

Por tanto la estabilidad local de las decisiones $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ es:

$$\theta_2(\mathcal{P}) = 1 - \frac{\mid 3-3 \mid + \mid 3-2 \mid + \mid 1-1 \mid}{5} = 0.8$$

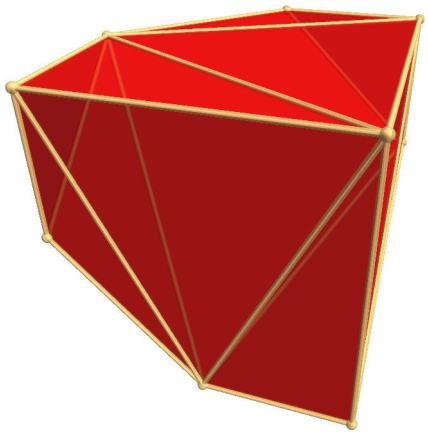


Figura 1: Representación de la envolvente convexa para $k = 3$

Definición 3: Sea $\mathcal{P} = (\mathcal{R}_0,\ldots,\mathcal{R}_T) \in \mathbf{W}(\mathbf{X})^T$ un perfil de decisión temporal y $\mathcal{M}_{\mathcal{P}} = (\mathbf{c}_{\mathcal{R}_0},\ldots,\mathbf{c}_{\mathcal{R}_T}) \in \mathbb{M}_{k\times(T+1)}$

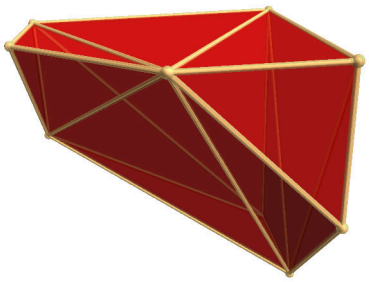


Figura 2: Representación de la envolvente convexa para $k = 3$

su correspondiente matriz de codificación canónica. La *medida global de estabilidad de las decisiones* en el tiempo sobre $\mathcal{P} \in \mathbf{W}(\mathbf{X})^{T+1}$ es una función $\Theta : W(x)^{T+1} \times R^{+} \longrightarrow [0, 1]$ definida por:

$$\Theta(\mathcal{P}, \lambda) = \sum_{i=1}^{T} w_i \cdot \theta_i(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{T} w_{[i-1,i]} \cdot \theta_{[i-1,i]} \ (\mathcal{P})$$

donde $w_i = w_{[i-1,i]} = A \cdot e^{-\lambda(T-i+1)}$, $A = \dfrac{e^{\lambda} - 1}{1 - e^{-\lambda T}}$ con $\sum_{i=1}^{T} w_i = 1$ y $\lambda \geq 0$.

El parámetro λ recoge el efecto pérdida de memoria. Cuando $\lambda = 0$ los agentes recuerdan las decisiones tomadas en todos los momentos del tiempo con la misma intensidad. Mientras que cuando $\lambda > 0$, los agentes tienen un efecto pérdida de memoria positivo, esto es, los agentes recuerdan con mayor intensidad las últimas decisiones.

La medida globlal de estabilidad de las decisiones es una medida de estabilidad de decisiones dado que verifica las propiedades:

i. Estabilidad máxima de la decisión:

$$\Theta(\mathcal{P}, \lambda) = 1 \Longleftrightarrow \mathcal{R}_0 = \ldots = \mathcal{R}_T$$

ii. Neutralidad de la decisión sobre las alternativas:

$$\Theta({}^{\pi}\mathcal{P}, \lambda) = \Theta(\mathcal{P}, \lambda)$$

para cada permutación π sobre las alternativas $\{1, \ldots, k\}$.

El cumplimiento de estas propiedades por parte de la medida global es consecuencia directa del cumplimiento de las mismas por parte de la medida local.

IV. Caso de estudio: Estabilidad de decisiones en Educación

Con el objetivo de poner en relieve la aplicabilidad de la metodología propuesta, en esta sección se presenta un caso real de estudio. En concreto, se analiza y se mide la estabilidad a lo largo del tiempo de los rankings sobre rendimiento académico proporcionados por el informe PISA[1] cada tres años a nivel mundial.

El informe PISA es un estudio realizado por la OCDE desde el año 2000 cuyo objetivo principal es evaluar el rendimiento académico de estudiantes en Matemáticas, Ciencias y comprensión lectora[2]. Mediante la realización de este informe la OCDE proporciona datos comparables que permiten a los diversos países mejorar sus políticas de educación.

Para realizar el estudio de caso sobre la estabilidad de las decisiones temporales de los paises en Educación se han utilizado los datos proporcionados por el informe PISA para los años 2000, 2003, 2006, 2009, 2012 y 2015 para 25 países[3].

En las Tablas II, IV y III se muestran los rankings sobre los países analizados en las tres habilidades incluidas en el informe: Matemáticas, comprensión lectora y Ciencias, respectivamente. Estos rankings constituyen los distintos perfiles de decisión temporal teniendo en cuenta la totalidad de estudiantes.

Además de considerar estos rankings, en esta contribución se ha analizado la estabilidad intertemporal de los rankings proporcionados por el informe PISA según el sexo de los estudiantes aunque los perfiles correspondientes no se detallan en esta contribución.

Por otra parte y para analizar como el efecto pérdida de memoria afecta a la estabilidad de las decisiones intertemporales se han considerado cinco valores diferentes del parámetro λ: $0, 0.25, 0.5, 0.75$ y 1. Los resultados se muestran en la Tabla V y en las Figuras IV, IV y IV.

Tal y como se puede comprobar en la Tabla V y en las Figuras IV, IV y IV, la medida de estabilidad toma valores bastante altos en todos los países situándose entorno al $(0.8 - 0.9)$ independientemente del valor de λ. La independencia de los resultados con respecto al parámetro puede deberse a que los cambios que afectan al nivel educativo de los países se perciben de forma lenta y no drástica, lo que es un claro indicativo de la estabilidad de las mediciones.

V. Conclusiones y trabajos futuros

La investigación sobre la estabilidad de las decisiones intertemporales se ha realizado principalmente en Economía. El objetivo del presente trabajo es proporcionar una nueva metodología desde una perspectiva no tradicional al problema de medir la estabilidad de las decisiones a lo largo del tiempo. La contribución se centra en un marco de evaluación donde los agentes expresan sus opiniones sobre diferentes alternativas en diferentes momentos del tiempo mediante preordenes completos. Se introduce la noción general de medida de

[1] Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes.

[2] El estudio se basa en el análisis del rendimiento de estudiantes de 15 años a partir exámenes estandarizados.

[3] AUS= Australia, BEL = Bélgica, BRA = Brasil, CAN = Canada, CHE = Suiza, CZE = Repblica Checa, DEU = Alemania, DNK = Dinamarca, ESP = España, FIN = Finalancia, FRA = Francia, GRC = Grecia, HUN = Hungría, IDN = Indonesia, IRL = Irlanda, ISL = Islandia, ITA = Italia, JPN = Japón, KOR = Corea del Sur, MEX = México, NOR = Noruega, NZL = Nueva Zelanda, POL = Polonia, PRT = Portugal, SWE = Suecia.

2003	2006	2009	2012	2015
FIN	FIN	KOR	KOR	JPN
KOR	KOR	FIN	JPN	KOR
JPN	CHE	CHE	CHE	CHE
CAN	CAN	JPN	FIN	CAN
BEL	JPN	CAN	CAN, POL	DNK, FIN
CHE	NZL	NZL	BEL	BEL
AUS	AUS, BEL	BEL	DEU	DEU
NZL	DNK	AUS	AUS	IRL, POL
CZE	CZE	DEU	IRL	NOR
ISL	ISL	ISL	DNK, NZL	NZL
DNK	DEU	DNK	CZE	AUS, SWE
FRA	SWE	NOR	FRA	FRA
SWE	IRL	FRA	ISL	CZE, PRT
DEU, IRL	FRA	POL	NOR	ITA
NOR	POL	SWE	PRT	ISL
HUN, HUN	POL	CZE	ITA	ESP
ESP	NOR	HUN	ESP	HUN
ITA, PRT	ESP	IRL, PRT	SWE	GRC
GRC	PRT	ESP, ITA	HUN	MEX
MEX	ITA	GRC	GRC	IDN
IDN	GRC	MEX	MEX	BRA
BRA	MEX	BRA	BRA	
	IDN	MEX	IDN	
	BRA			

Cuadro II: Rankings de los países en distintos años en Matemáticas

2006	2009	2012	2015
FIN	FIN	JPN	JPN
CAN	JPN	FIN	FIN
JPN	KOR	KOR	CAN
NZL	NZL	POL	KOR
AUS	CAN	CAN	NZL
KOR	AUS	DEU	AUS
DEU	DEU	IRL	DEU
CZE	CHE	AUS	CHE
CHE	IRL, POL	NZL	IRL
BEL	BEL	CHE	BEL, DNK
IRL	HUN	CZE	POL, PRT
HUN	CZE	BEL	NOR
SWE	NOR	FRA	FRA
POL	DNK	DNK	CZE, ESP, SWE
DNK	FRA	ESP	ITA
FRA	ISL	NOR	HUN
ISL	SWE	HUN, ITA	ISL
ESP	PRT	PRT	GRC
NOR	ITA	SWE	MEX
ITA	ESP	ISL	IDN
PRT	GRC	GRC	BRA
GRC	MEX	MEX	
MEX	BRA	BRA	
IDN	IDN	IDN	
BRA			

Cuadro III: Rankings de los países en distintos años en Ciencias

2000	2003	2006	2009	2012	2015
FIN	FIN	KOR	KOR	JPN	CAN
CAN	KOR	FIN	FIN	KOR	FIN
NZL	CAN	CAN	CAN	FIN	IRL
AUS	AUS	NZL	NZL	CAN, IRL	KOR
IRL	NZL	IRL	JPN	pol	JPN
KOR	IRL	AUS	AUS	AUS, NZL	NOR
JPN	SWE	POL	BEL	BEL, CHE	DEU, NZL
SWE	BEL	SWE	NOR	DEU	POL
BEL, ISL	NOR	BEL	CHE	FRA	AUS
FRA, NOR	CHE	CHE	ISL, POL	NOR	DNK, SWE
DNK	JPN	JPN	DEU, SWE	DNK	BEL, FRA
CHE	POL	DEU	FRA, IRL	CZE	PRT
ESP	FRA	DNK	DNK	ITA	ESP
CZE	DNK, ISL	FRA	HUN	ESP, HUN, PRT	CHE
ITA	DEU	ISL, NOR	PRT	ISL, SWE	CZE
DEU	CZE	CZE	ITA	GRC	ITA
HUN	HUN	HUN	GRC	MEX	ISL
POL	ESP	PRT	ESP	BRA	HUN
GRC	PRT	ITA	CZE	IDN	GRC
PRT	ITA	ESP	MEX		MEX
MEX	GRC	GRC	BRA		BRA
BRA	BRA	MEX	IDN		IDN
IDN	MEX	BRA			
	IDN	IDN			

Cuadro IV: Rankings de los países en distintos años en comprensión lectora

	$\lambda = 0$		
	Total	Chicas	Chicos
Matemáticas	0.912829	0.893640	0.887610
Ciencias	0.894006	0.879386	0.886696
Lectura	0.879386	0.867105	0.868860
	$\lambda = 0.25$		
	Total	Chicas	Chicos
Matemáticas	0.907834	0.890512	0.884263
Ciencias	0.891127	0.875995	0.883674
Lectura	0.872121	0.864099	0.859995
	$\lambda = 0.5$		
	Total	Niñas	Niños
Matemáticas	0.904190	0.888388	0.882652
Ciencias	0.888446	0.872551	0.880929
Lectura	0.865605	0.861989	0.852755
	$\lambda = 0.75$		
	Total	Chicas	Chicos
Matemáticas	0.901939	0.887243	0.882537
Ciencias	0.886087	0.869262	0.878575
Lectura	0.860759	0.860896	0.847942
	$\lambda = 1$		
	Total	Chicas	Chicos
Matemáticas	0.900816	0.886851	0.883424
Ciencias	0.884109	0.866284	0.876654
Lectura	0.857641	0.860587	0.845295

Cuadro V: Valores de la medida global de estabilidad de las decisiones intertemporales

estabilidad de las decisiones intertemporales así como dos formulaciones específicas, una de ellas prestando especial atención a cualesquiera dos sucesivos momentos de tiempo. Finalmente la metodología propuesta se aplica al caso de la estabilidad de las decisiones de los países respecto a la Educación según informes de la OCDE.

En cuanto a las futuras líneas de investigación, existen diversos aspectos que podrían ser analizados. Por una parte, la línea de actuación más inmediata sería la aplicación de la novedosa propuesta de esta contribución a una amplia gama de campos tales como la estabilidad de las decisiones de los consumidores, decisiones de inversión, etc. Por otra parte, la metodología propuesta podría ser extendida a un horizonte temporal infinito.

Referencias

[1] P. Samuelson, "A note on measurement of utility," *The Review of Economic Studies*, vol. 4, no. 2, pp. 155–161, 1937.

[2] M. Bateson and A. Kacelnik, "Rate currencies and the foraging starling: the fallacy of the averages revisited," *Behavioral Ecology*, vol. 7, no. 3, pp. 341–352, 1996.

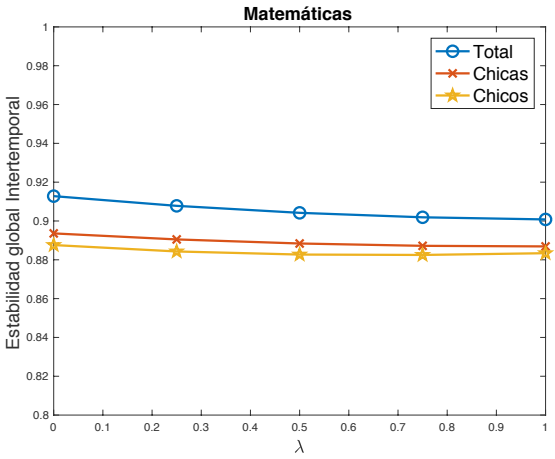


Figura 3: Estabilidad global intertemporal de las decisiones en Matemáticas para diferentes valores de λ

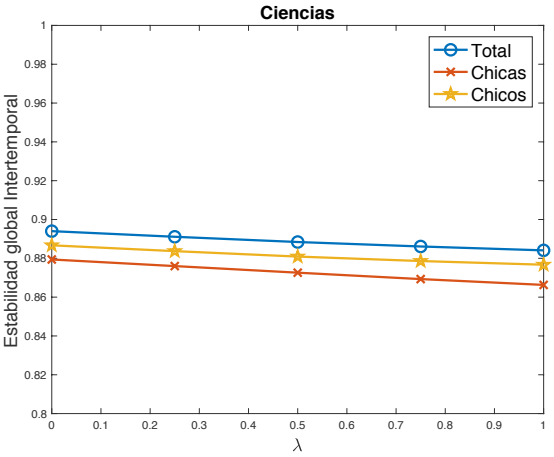


Figura 4: Estabilidad global intertemporal de las decisiones en Ciencias para diferentes valores de λ

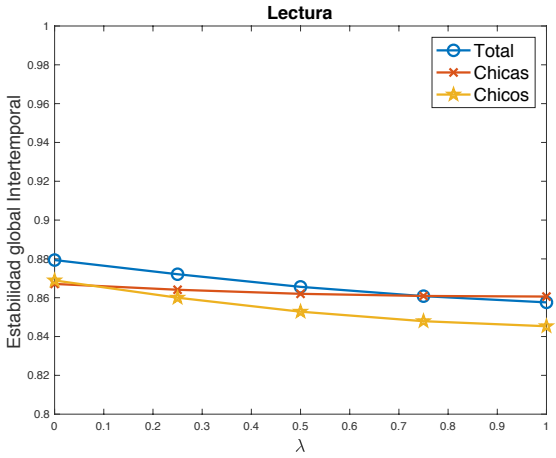


Figura 5: Estabilidad global intertemporal de las decisiones en comprensión lectora para diferentes valores de λ

[3] D. Stephens and D. Anderson, "The adaptive value of preference for immediacy: when shortsighted rules have farsighted consequences," *Behavioral Ecology*, vol. 12, no. 3, pp. 330–339, 2001.
[4] J. Alcock and P. Sherman, "The utility of the proximate-ultimate dichotomy in ethology," *Ethology*, vol. 96, no. 1, pp. 58–62, 1994.
[5] S. Kim, J. Hwang, and D. Lee, "Prefrontal coding of temporally discounted values during intertemporal choice," *Neuron*, vol. 59, no. 1, pp. 161 – 172, 2008.
[6] J. Peters and C. Büchel, "Overlapping and distinct neural systems code for subjective value during intertemporal and risky decision making," *Journal of Neuroscience*, vol. 29, no. 50, pp. 15 727–15 734, 2009.
[7] S. Kim and D. Lee, "Prefrontal cortex and impulsive decision making," *Biological Psychiatry*, vol. 69, no. 12, pp. 1140 – 1146, 2011, prefrontal Cortical Circuits Regulating Attention, Behavior and Emotion.
[8] T. González-Artega, R. de Andrés Calle, and M. Peral, "Preference stability along time: the time cohesiveness measure," *Progress in Artificial Intelligence*, vol. 6, no. 3, pp. 235–244, 2017.
[9] T. González-Arteaga and R. de Andrés Calle, "New approach to measure preference stability," in *2017 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*, July 2017, pp. 1–6.
[10] L. Zadeh, "Fuzzy sets," *Information and Control*, vol. 8, pp. 338–375, 1965.
[11] J. Borda, *Mémoire sur les Elections au Scrutin*. Paris: Histoire de l'Academie Royale des Sciences, 1781.
[12] D. Black, "Partial justification of the Borda count," *Public Choice*, vol. 28, pp. 1–16, 1976.
[13] W. Cook and L. Seiford, "On the Borda–Kendall consensus method for priority ranking problems," *Management Science*, vol. 28, pp. 621–637, 1982.
[14] J. L. García-Lapresta and D. Pérez-Román, "Measuring consensus in weak orders," in *Consensual Processes*, ser. Studies in Fuzziness and Soft Computing, E. Herrera-Viedma, J. L. García-Lapresta, J. Kacprzyk, M. Fedrizzi, H. Nurmi, and S. Zadrozny, Eds. Springer Berlin Heidelberg, 2011, vol. 267, pp. 213–234.
[15] T. González-Arteaga, R. de Andrés Calle, and J. Alcantud, "A new consensus ranking approach for correlated ordinal information based on Mahalanobis distance," *Information Sciences*, vol. 372, no. Supplement C, pp. 546 – 564, 2016.

Some remarks on "Preference stability over time: The time cohesiveness measure"

Teresa González-Arteaga
BORDA and PRESAD Research Groups
University of Valladolid
E47011 Valladolid, Spain
teresa.gonzalez.arteaga@uva.es

Rocío de Andrés Calle
BORDA Research Unit
PRESAD Research Group
Multidisciplinary Institute of Enterprise
University of Salamanca
E37007 Salamanca, Spain
rocioac@usal.es

***Abstract*—This work introduces a non-traditional approach about the problem of measuring the stability of agents' preferences over time under the assumption of considering dichotomous opinions. The general concept of *time cohesiveness measure* is introduced as well as a particular formulation based on the consideration of any two successive moments of time, *the sequential time cohesiveness measure*. Moreover, some properties of the novel measure are also provided. Finally, a case of study is presented. This essay presents the main contributions of the paper entitled "*Preference stability along time: The time cohesiveness measure*" published in the journal *Progress in Artificial Intelligence*.**

***Index Terms*—Time cohesiveness measure; Dichotomous opinions; Preference stability; Patients' preferences**

I. Introduction

Intertemporal decision making is an important research area and it has been obtaining attention from several research fields such as Economics, Health Economics, Social Choice, Psychology, Marketing, Decision Analysis, Neuroscience, and so on. One of the main topics of this area is the study of preference stability over time. Traditionally, intertemporal preferences have ussually been considered permanent by theoretical and empirical studies (see [1], [2] and [3], among other) and the research to date has tend to explore preference stability over time by means of statistical methods.

In order to enhance the preference stability topic, the aim of this contribution is to develop a new tool capable of measuring preference stability from a non-traditional perspective. For this purpose, the notion of preference stability is considered in the same vein that the notion of cohesiveness. This seems natural because the measurement of preference stability resembles the notion of measurement of cohesiveness over time in the sense that the maximum value captures the notion of full stability, that is, unanimity along time, while the minimum value captures the notion of total lack of stability, that is, total disagreement along time.

Taking into account the previous contributions on preference stability and cohesiveness measure, this paper is focused on an intertemporal decision-making problem where a set of agents express their opinions on an alternative along different moments of time. To be precise, agents have to approve or disapprove the alternative under study at diverse points of time. Thus, the paper objective is to determine how much stability or cohesiveness agents opinions conveys to the group on the alternative along time. In order to measure such stability, a new general approach is defined, the *time cohesiveness measure*. Moreover, an specific formulation of the time cohesiveness measure is introduced, the *sequential time cohesiveness measure* as well as a study of its analytic properties. Under this approach, the stability of preferences is understood like the probability that for a randomly chosen moment of time, two randomly chosen agents have the same opinion at such a time and its consecutive.

Furthermore, the measurement proposed is put in practice in a real case of study to emphasize its applicability. In particular, the stability of preferences for life-sustaining treatments in terminally cancer patients' last year of life is analysed.

This contribution is structured as follows. Section 2 introduces the notation and the novel proposals to measure preference stability. Section 3 includes a brief description of the paper application. Finally, some closing comments are provided.

II. The time cohesiveness measure: Notation and definitions

Let $\mathbf{N} = \{1, 2, ..., N\}$ a set of agents or experts. Agents express their opinions on an alternative, x, at different time moments $\mathbf{T} = \{t_1, \ldots, t_T\}$ by means of dichotomous opinions.

A *time preference profile* of a set of agents $\mathbf{N}$ on an alternative x at T different time moments is a matrix $\mathbf{P} = \left(P_{it_j}\right)_{N\times T}$ where P_{it_j} is the opinion of the agent i over alternative x at t_j moment, in the sense

$$P_{it_j} = \begin{cases} 1 & \text{if agent } i \text{ approves } x \text{ at the } t_j \text{ time,} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Let $\mathbb{P}_{N\times T}$ denote the set of all such $N \times T$ matrices.

A time preference profile $\mathbf{P}$ is *unanimous* if alternative x is approved (resp. disapproved) over $\mathbf{T}$ by all agents. In matrix terms, if the time preference profile $\mathbf{P} \in \mathbb{P}_{N\times T}$ is constant, $\mathbf{P} = (1)_{N\times T}$ (resp. $\mathbf{P} =$

The authors acknowledge financial support by the Spanish Ministerio de Ciencia e Innovación under Project Project ECO2016-77900-P.

$(0)_{N\times T}$). Any permutation σ of the agents $\{1,2,...,N\}$ determines a time preference profile $\mathbf{P}^\sigma$ by permutation of the rows of $\mathbf{P}$, that is, row i of the profile $\mathbf{P}^\sigma$ is row $\sigma(i)$ of the profile $\mathbf{P}$.

Definition 1: A *time cohesiveness measure* for a group of agents $\mathbf{N} = \{1,...,N\}$ on an alternative x is a mapping $\tau : \mathbb{P}_{N\times T} \to [0,1]$ that assigns a number $\tau(\mathbf{P}) \in [0,1]$ to each time preference profile $\mathbf{P}$, with the properties:

i) $\tau(\mathbf{P}) = 1$ if and only if $\mathbf{P}$ is unanimous (full stability).
ii) $\tau(\mathbf{P}^\sigma) = \tau(\mathbf{P})$ for each permutation σ of the agents and $\mathbf{P} \in \mathbb{P}_{N\times T}$ (anonymity).

Definition 2: The *sequential time cohesiveness measure* for a group of agents $\mathbf{N} = \{1,...,N\}$ on an alternative x is the mapping $\tau_S : \mathbb{P}_{N\times T} \to [0,1]$ given by

$$\tau_S(\mathbf{P}) = \sum_{b\in\{0,1\}} \frac{1}{T-1} \cdot \frac{\sum_{j=1}^{j=T-1} n_{b,b}^{t_j,t_{j+1}} \cdot (n_{b,b}^{t_j,t_{j+1}} - 1)}{N(N-1)}$$

where $n_{0,0}^{t_j,t_{j+1}}$ denotes the number of agents that disapprove alternative x at t_j and keep their opinion at the following point of time t_{j+1}. Similarly, $n_{1,1}^{t_j,t_{j+1}}$ denotes the number of agents that approve alternative x at t_j and keep their opinion at the following point of time t_{j+1}.

Intuitively, it measures the probability that for a randomly chosen moment of time, two randomly chosen agents of a group have the same opinion upon an alternative at the moment of time selected and its consecutive.

The sequential cohesiveness measure verifies the following meaningful properties: reversal invariance, time-reducibility, replication monotonicity, minimum time stability, leaving minimum time stability, time monotonicity and convergence to full stability.

III. A case study of preference stability in Clinical Decision Making

So as to implement our proposal for measuring the stability of preferences over time of a group of agents, this contribution is inspired and motivated by the study of Tang et al. [4]. In [4], the authors examined the stability of life-sustaining treatment preferences at end of life of cancer patient's last year by means of an statistical approach. Authors collected patients' preferences about life support choices by the *Life Support Preferences Questionnaire* (LSPQ) [5].

Based on this study, a finite set of 257 patients is considered in this contribution. Theses patients expressed their opinions by dichotomous opinions on a finite set of 3 treatments for life-sustaining at end of life being: cardiopulmonary resuscitation (CPR), dying in an intensive care unit (ICU) and mechanical ventilation support (MSV). Patients expressed their preferences about approving o disapproving the aforementioned treatments at four different time moments along their illness. Thus, patients' opinions can be formalized by means of a time preference profile for each treatment $\mathbf{P}^{CPR}$, $\mathbf{P}^{ICU}$ and $\mathbf{P}^{MSV}$. The information provided by the three previous time preference profiles can be group in Table I.

Treatment	$n_{0,0}^{t_1,t_2}$	$n_{1,1}^{t_1,t_2}$	$n_{0,0}^{t_2,t_3}$	$n_{1,1}^{t_2,t_3}$	$n_{0,0}^{t_3,t_4}$	$n_{1,1}^{t_3,t_4}$
CPR	190	34	210	24	228	15
ICU	142	79	156	63	184	26
MSV	170	44	187	38	209	25

Table I: Number of patients that approve and disapprove different treatments at different moments of time

Using Definition 2, the sequential time cohesiveness measure for each profile, that is, for each treatment can be computed. Table II shows such values including all moments of time and all patients.

Treatment	Profile	$\tau_S(\mathbf{P})$
CPR	$\mathbf{P}^{CPR}$	0.676
ICU	$\mathbf{P}^{ICU}$	0.449
MVS	$\mathbf{P}^{MVS}$	0.562

Table II: Values of the sequential time cohesiveness measure for each treatment

Moreover, these results were explored in depth in [6]. The set of patients was partitioned, differentiating between patients with and without metastases.

IV. Closing comments

In this work, a non-traditional perspective on preference stability topic is set out. The problem of measuring the degree of cohesiveness in a setting where agents express their opinions on an alternative at different times by means of an approval or disapproval evaluation is explored. A general concept of *time cohesiveness measure* is introduced and a particular formulation based on the consideration of any two successive times is proposed, namely *the sequential time cohesiveness measure*. Some properties which make our proposal appealing are also provided. The applicability of our proposal to real situations is emphasized by means of adapting a factual problem in Clinical Decision Making. Concretely, the case of terminally cancer patients' last year of life is studied using the new sequential time cohesiveness measure.

References

[1] G. Loewenstein and E. Angner, *Predicting and indulging changing preferences*, 2003.
[2] S. Meier and C. Sprenger, "Temporal stability of time preferences," *Review of Economics and Statistics*, vol. 97, no. 2, pp. 273–286, 2015.
[3] A. Reynaud and S. Couture, "Stability of risk preference measures: Results from a field experiment on french farmers," *Theory and Decision*, vol. 73, no. 2, pp. 203–221, 2012.
[4] S. T. Tang, F.-H. Wen, C.-H. Hsieh, W.-C. Chou, W.-C. Chang, J.-S. Chen, and M.-C. Chiang, "Preferences for life-sustaining treatments and associations with accurate prognostic awareness and depressive symptoms in terminally ill cancer patients' last year of life," *Journal of Pain and Symptom Management*, vol. 51, no. 1, pp. 41–51, 2016.
[5] D. K. Beland and R. D. Froman, "Preliminary validation of a measure of life support preferences," *Journal of Nursing Scholarship*, vol. 27, no. 4, pp. 307–310, 1995.
[6] T. González-Artega, R. de Andrés Calle, and M. Peral, "Preference stability along time: the time cohesiveness measure," *Progress in Artificial Intelligence*, vol. 6, no. 3, pp. 235–244, 2017.

XIX Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy (XIX ESTYLF)

ESTYLF 11: Sesión Especial Soft Computing y Generación del Lenguaje Natural I

Organizadores:

Alberto Bugarín, Nicolás Marín,
Alejandro Ramos, Daniel Sánchez

Modelado borroso de referencias geográficas textuales sobre datos de expertos

A. Ramos-Soto*†, Jose M. Alonso*, Ehud Reiter†, Kees van Deemter†‡, Albert Gatt§

* Centro Singular de Investigación en Tecnoloxías da Información (CiTIUS), Universidade de Santiago de Compostela
alejandro.ramos@usc.es
josemaria.alonso.moral@usc.es

† Department of Computing Science, University of Aberdeen
alejandro.soto@abdn.ac.uk
e.reiter@abdn.ac.uk
k.vdeemter@abdn.ac.uk

‡ Department of Information and Computing Sciences, Utrecht University
k.vandeemter@uu.nl

§ Institute of Linguistics and Language Technology, University of Malta
albert.gatt@um.edu.mt

***Resumen*—Describimos una metodología para la construcción de modelos borrosos de expresiones geográficas sobre interpretaciones individuales de dichas expresiones por parte de expertos. Esta metodología aborda una tarea de modelado de lenguaje encuadrado dentro del desarrollo de un sistema *data-to-text* que generará descripciones textuales sobre mapas con información meteorológica en tiempo real. Para ello, recogimos datos proporcionados por meteorólogos en una encuesta y, sobre los mismos, creamos modelos borrosos consistentes que agregan las diferencias de interpretación de los expertos. Estos modelos permitirán generar expresiones de referencia geográfica sobre eventos meteorológicos georreferenciados, que formarán parte de los textos generados por el sistema *data-to-text* que desarrollaremos en un trabajo futuro.**

***Términos clave*—vaguedad, generación de lenguaje natural, conjuntos borrosos, modelado de lenguaje, sistemas de información geográfica, descripciones lingüísticas de datos**

I. Introducción

La ingente cantidad de datos que se producen en todo tipo de ámbitos ha favorecido la aparición de varias disciplinas centradas en investigar cómo proporcionar a las personas la información relevante que permanece latente en dichos datos. Una de estas disciplinas es la generación de lenguaje natural (NLG), que estudia el problema de cómo generar textos a partir de datos, que puedan resultar útiles a lectores humanos [1], [2]. Dentro de este campo, los sistemas que generan textos a partir de datos no lingüísticos se conocen como *data-to-text* (D2T). En los últimos tiempos este tipo de sistemas gozan de cierta popularidad, gracias a su amplio uso comercial [2], [3] en una gran variedad de dominios.

Gran parte de los sistemas D2T proporcionan textos o informes que describen series de datos temporales, y ciertamente se pueden encontrar muchos ejemplos en el estado del arte, e.g., en predicción meteorológica [4]–[7], salud [8]–[10], o industria [11], entre muchos otros [1], [12]. Así mismo, también existen sistemas D2T que tratan datos caracterizados geográficamente, aunque su número es mucho más reducido respecto a los alimentados por series temporales de datos [13].

Una de las tareas esenciales en la concepción de un sistema D2T es el modelado del lenguaje, i.e., definir la semántica de los términos y expresiones a usar para describir los datos [14], [15]. Existen distintas formas de resolver esta tarea, tales como usar algoritmos heurísticos o de aprendizaje máquina sobre un conjunto de *corpus* paralelo de texto y datos [16] para crear modelos de las expresiones de interés [17], conseguir que los expertos proporcionen dichos modelos, o recolectar datos de escritores o lectores que puedan ser usados para la aplicación de algoritmos de mapeado.

Por ejemplo, los sistemas D2T que generan textos a partir de series temporales de datos incluyen generalmente expresiones temporales para referirse a eventos o patrones relevantes encontrados en los datos. Realizar la tarea de modelado de lenguaje sobre expresiones temporales en este tipo de sistemas permite asegurarnos de que los textos generados incluyen términos cuyo significado se alinea con la interpretación de los expertos o las expectativas de los lectores, [17], [18]. Del mismo modo, disponer de un buen modelo geográfico en sistemas que generan textos sobre datos geográficos es esencial para generar expresiones que se refieran a localizaciones concretas y a regiones de interés.

Al mismo tiempo, es bastante frecuente que las expresiones temporales y geográficas que deben ser incluidas en los textos generados por sistemas D2T sean vagas, como “por la tarde” [4] o “áreas del suroeste” [19]. En situaciones donde la vaguedad aparece (y con ella, casos fronterizos y conceptos graduales), se ha propuesto el uso de conjuntos borrosos para modelar expresiones lingüísticas en sistemas D2T [2], [20], [21]. Sin embargo, no existen sistemas de este tipo en el estado del arte que hagan uso de dichas técnicas, con la excepción de GALiWeather [5], que hace un uso básico de conjuntos borrosos para modelar expresiones temporales y cuantificadores.

En este contexto, este trabajo describe la metodología que hemos seguido para llevar a cabo una tarea de modelado de lenguaje de expresiones geográficas vagas. Esta tarea forma parte de un proyecto más amplio cuyo objetivo es la creación de un sistema D2T que genere descripciones textuales de mapas con información meteorológica en tiempo real. Nuestra aproximación se compone de una tarea de recogida de datos, proporcionados por expertos, y de un algoritmo heurístico que agrega dichos datos para crear modelos borrosos.

II. Trabajo relacionado

El campo de NLG es amplio y existen gran cantidad de tipos de sistemas existentes con distintos propósitos como la gen-

eración de informes a partir de datos, creación de resúmenes a partir de distintas fuentes textuales, o generación de diálogo, narrativas e incluso poesía [1]. En nuestro caso, nos centramos en un problema muy específico, aquellos sistemas D2T cuyos datos de entrada están caracterizados geográficamente y cuyos textos a generar incluyen expresiones geográficas que se refieren a la ocurrencia de ciertos eventos registrados en los datos (e.g., "lluvia en el norte de España", "inundaciones en la Costa del Sol" o "vientos fuertes en el noroeste de Escocia").

Aunque este tipo de referencias fueron introducidas hace décadas en los textos generados por el sistema FoG [6], RoadSafe es quizás el ejemplo más representativo y reciente de este tipo de sistemas [19], [22]. RoadSafe usaba datos de predicción meteorológica para generar predicciones textuales orientadas al mantenimiento de carreteras. Estos informes incluían expresiones temporales y geográficas para ayudar a identificar dónde y cuándo ciertos fenómenos relevantes tendrían lugar, con el objetivo de ayudar a los equipos de mantenimiento a mantener las condiciones de las vías afectadas en buen estado (ver ejemplos de dichas expresiones en Fig. 1). Así pues, desarrollar RoadSafe supuso también un estudio profundo de cómo generar buenas expresiones geográficas que se refiriesen de forma adecuada a la geografía subyacente a la información relevante extraída de los datos de entrada.

Concretamente, la aproximación de RoadSafe para modelar la generación de expresiones de referencia geográficas se basaba en técnicas estándar del campo de sistemas de información geográfica (GIS), en el que particionan la geografía subyacente de los eventos utilizando distintos esquemas, o *marcos de referencia* espaciales [23], que a su vez se componen de particiones no solapables (conocidas como *descriptores*). Por ejemplo, el marco de referencia *Dirección* se compone de los descriptores "nordeste", "suroeste", etc., y el marco "Proximidad Costera" se compone de los descriptores "costa" e "interior".

Una vez que los límites numéricos de cada descriptor se definen para cada marco usando coordenadas de latitud-longitud, cada punto de datos puede ser caracterizado por un conjunto de descriptores (ej. "suroeste" y "costa") y el generador de expresiones de referencia geográficas se encarga de seleccionar el mejor conjunto de descriptores que describan el área formada por el subconjunto de puntos que representan el evento.

En trabajos más recientes, el modelo geográfico utilizado en RoadSafe fue ampliado mediante la inclusión de referencias espaciales de nombres propios, que según un estudio de varios conjuntos de *corpus* en distintos dominios, son las más predominantes [13]. Además, se plantea el desarrollo de un algoritmo de generación de expresiones de referencia geográficas que integre el marco de referencia de nombres propios con los ya existentes en RoadSafe. Por otro lado, en [24] se tratan las diferencias entre referencias absolutas y relativas y se proporciona un modelo basado en la mereología, en la que los descriptores de nombre propio se combinan con descriptores de otros marcos de referencia.

Las referencias descritas hasta el momento proporcionan buenas aproximaciones que permiten generar expresiones de referencia geográfica apropiadas sobre un conjunto de marcos de referencia. Sin embargo, en todos los casos los modelos descritos fueron desarrollados basados en un particionado nítido de la geografía a tratar. Tomar límites exactos entre descriptores geográficos puede considerarse una asunción poco intuitiva, especialmente si tenemos en cuenta cómo las personas entendemos y usamos incluso las referencias geográficas más simples como "norte" u "oeste", en los que realmente las fronteras no suelen estar bien definidas, sino que son vagas. Por ejemplo, usando cualquiera de las aproximaciones anteriores, si una aldea se encuentra situada en la frontera entre dos descriptores, dependiendo de la granularidad espacial de nuestros datos es posible asignar descriptores opuestos (como "norte" y "sur") a dos puntos dentro de la misma localidad.

Por ello, las limitaciones que en este sentido presentan los modelos descritos anteriormente suponen un fuerte incentivo a la hora de buscar otro tipo de aproximaciones que permitan modelar la imprecisión o la incerteza en el uso de referencias geográficas vagas. De hecho, el problema del tratamiento de la vaguedad en referencias geográficas no se limita únicamente a sistemas D2T, sino que existe una discusión más amplia dentro del ámbito de GIS, desde hace ya varias décadas [25]. En este sentido, la teoría de conjuntos borrosos ha sido aplicada en numerosos casos para tratar la vaguedad en conceptos geográficos y relaciones espaciales [26], [27].

Del mismo modo, como se ha descrito en la Sec. I, de una manera más general también se ha propuesto el uso de conjuntos borrosos en sistemas D2T para modelar términos vagos [2], [20], [21]. A día de hoy, el único sistema D2T desplegado en un entorno real que hace un uso básico de este tipo de técnicas es GALiWeather [5], si bien existe un número importante de casos de uso de aplicación de conjuntos borrosos para extracción de información lingüística (descripciones lingüísticas de datos), que en ocasiones se acompaña de generación textual basada en plantillas [2], [12].

Road surface temperatures will fall below zero **during the late evening and tonight** except in **areas below 100M**.

SW 10-25 gusts **this afternoon in southwestern areas**, veering WSW and increasing 15-35 after midnight, gusts 55-60 **during the evening and tonight** except **in areas above 500M**, increasing 20-45 then veering W **by early morning**, gusts 70-75 **tomorrow morning in most southern and central places**.

Wintry precipitation will affect most routes at first, falling as snow flurries **in some places above 300M** at first. Snow spreading **throughout the forecast period** to **all areas** and persisting **in some places above 300M** until end of period.

Fig. 1. Ejemplos de textos generados por RoadSafe [19]

III. Motivación

Partiendo de las limitaciones que presentan los desarrollos previos de sistemas D2T que generan expresiones de referencia geográfica, la principal motivación de este trabajo es mejorar el modelado de conceptos geográficos vagos para fines de generación de lenguaje natural. Concretamente, nuestro objetivo es establecer una metodología de creación de modelos de

referencias geográficas vagas y de algoritmos de generación de expresiones de referencia sobre dichos modelos, basados en el uso de técnicas de conjuntos borrosos.

Puesto que D2T es un campo eminentemente aplicado, en el que los avances a nivel de investigación vienen dados por una necesidad real, en nuestro caso la metodología que proponemos se enmarca dentro del desarrollo de un sistema D2T para la generación de descripciones del estado meteorológico en tiempo real, sobre datos proporcionados por la Agencia de Meteorología de la Xunta de Galicia, MeteoGalicia [28]. Dichas descripciones incluirán expresiones de referencia geográfica que permitirán identificar fenómenos meteorológicos relevantes en el mapa, tales como temperatura, viento y estado del cielo.

En el marco del desarrollo del sistema D2T propuesto, este trabajo describe la tarea de modelado de lenguaje de las expresiones geográficas de interés a incluir en los textos generados por el sistema. Por otro lado, la metodología aquí descrita se basa en las ideas propuestas en [29] y [30], lo que permitirá consolidar nuevas formas de aplicar la teoría de conjuntos borrosos en sistemas D2T de forma práctica.

IV. Recogida de datos de expertos

Aunque es corriente realizar el modelado de lenguaje partiendo de un conjunto paralelo de textos y datos, con el fin de analizar el significado de las palabras y expresiones a modelar, en nuestro caso este tipo de recurso no se encontraba disponible. Por un lado, no disponíamos de acceso a un conjunto de datos extenso (ej. predicciones textuales y datos de predicción) en los que realizar tal análisis. Por otro, nuestro plan es desarrollar un nuevo sistema D2T para proporcionar descripciones textuales de datos meteorológicos en tiempo real. Así pues, la aproximación que tomamos consistió en interactuar de forma directa con los expertos.

A. La encuesta

Dado que nuestro propósito es el modelado de expresiones geográficas, pedimos directamente al director del departamento de predicción de *MeteoGalicia* una lista con las expresiones geográficas más usadas por los meteorólogos a la hora de escribir predicciones textuales. Tomando esta lista como base, preparamos una encuesta web que fue distribuida entre los expertos de la agencia meteorológica. En dicha encuesta, se pidió a los participantes que, sobre un mapa de la región de Galicia (mostrada bajo una proyección *Mercator*), dibujasen un polígono que representase una referencia geográfica dada (ver la Figura 2).

Fig. 2. Captura de pantalla de la encuesta realizada por los meteorólogos.

Marco de referencia		Descriptores
Dirección cardinal		Norte de Galicia, Sur de Galicia, Oeste de Galicia, Este de Galicia, Tercio norte, Extremo norte, Noroeste de Galicia, Noreste de Galicia, Suroeste de Galicia, Sureste de Galicia
Costa / Interior		Interior de Galicia
Nombre propio		Rías Baixas, Comarcas atlánticas
Mixto	Nombre y dirección	Oeste de A Coruña, Oeste de Ourense, Sur de Ourense, Sur de Lugo
	Nombre y costa	Litoral Atlántico, Litoral Cantábrico, Litoral norte, Interior de Coruña, Interior de Pontevedra
	Nombre y elevación	Áreas de montaña de Lugo, Áreas de montaña de Ourense

TABLA I
Lista de referencias geográficas de la encuesta.

En la encuesta se proporcionó a los participantes una lista de 24 descriptores, que aparecían en orden aleatorio. En esta lista, 20 de los 24 descriptores componen la lista original proporcionada por el director de predicción operativa, e incluyen direcciones cardinales, nombres propios y otro tipo de referencias como áreas montañosas, partes de provincias, etc. (ver la Tabla I para una taxonomía completa de los descriptores). Los restantes cuatro fueron añadidos para estudiar la combinación de direcciones cardinales mediante intersección (ej. explorar formas de combinar "norte" y "oeste" para obtener un modelo similar a "noroeste"), pero para nuestro propósito actual nos interesan sólo aquellos utilizados por los meteorólogos a la hora de escribir predicciones.

B. Resultados

La encuesta fue contestada por ocho expertos, obteniéndose 192 polígonos en total (160 sin considerar las intersecciones cardinales). A un nivel general, habíamos hipotetizado que los expertos serían bastante consistentes, dada su experiencia profesional. Así mismo, esperábamos también cierta variación entre las distintas respuestas.

Observamos que dichas hipótesis se han cumplido con claridad; los polígonos dibujados por los expertos se encuentran bastante concentrados y por tanto existe un gran acuerdo entre ellos. Por ejemplo, la Fig. 3 muestra una representación de las respuestas dadas por los meteorólogos para la dirección cardinal "oeste de Galicia" y un mapa de contornos que ilustra el porcentaje de respuestas que se solapan.

V. Creación de descriptores geográficos borrosos

En la Figura 3, la gráfica de contornos puede tomarse como la base de la semántica de su expresión correspondiente,

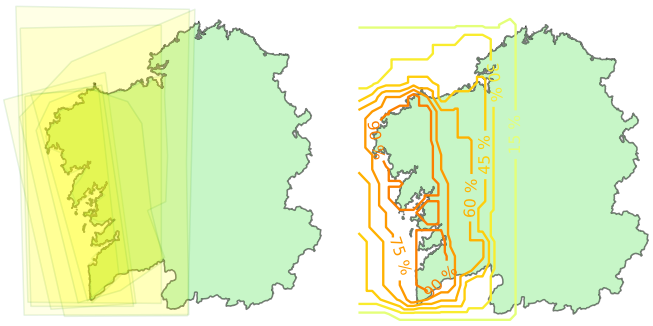


Fig. 3. Representación gráfica de los polígonos dibujados por los expertos y gráfica de contornos para "oeste de Galicia".

con una región nuclear que es aceptda por la mayoría, y un decaimiento gradual a medida que se avanza hacia la periferia exterior de las líneas de contorno. Así pues, en nuestro caso, la imprecisión surge de las diferencias interpersonales entre los meteorólogos.

Siguiendo esta noción, hemos creado modelos borrosos que agregan las opiniones de los expertos para cada descriptor. El método que usamos para esta tarea de modelado es una mejora del algoritmo heurístico descrito en [30], que producía modelos básicos basado en un muestreo de puntos y el conteo de intersecciones de polígonos, sin la inclusión de ninguna condición previa. Nuestro algoritmo va precedido además por un filtrado simple de los polígonos.

A. Filtrado de datos atípicos

Como comentamos anteriormente, los polígonos dibujados por los meteorólogos son muy consistentes visualmente, pero en algunos casos hemos observado pequeñas inconsistencias. Para mantener la elevada consistencia entre las respuestas obtenidas para los descriptores, aplicamos un filtrado simple de los trazados, consistente en descartar respuestas fuera del intervalo [media $\pm$ 2*desviación típica] en términos de tamaño y localización del centroide.

B. Caracterización de un descriptor geográfico borroso

Usando los datos filtrados, pretendemos construir descriptores geográficos borrosos que sean simples y consistentes.

Definition 1. Descriptor geográfico borroso, G:

$$G = \{S, K, \mu_G\} \tag{1}$$

Formalmente, definimos un descriptor geográfico borroso G (ej. "sur de Galicia") como un conjunto de 3 elementos: un área de soporte S, un área de núcleo K, y una función de pertenencia borrosa μ_G, que evalúa el grado en el que un punto en un mapa ($p = (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}$) puede considerarse parte de G:

$$\mu_G : \{\mathbb{R}, \mathbb{R}\} \rightarrow [0, 1] \tag{2}$$

Tomando μ_G[1] como base, K y S pueden definirse como:

$$K = \{p\} \mid \mu_G(p) = 1 \tag{3}$$

$$S = \{p\} \mid \mu_G(p) > 0 \tag{4}$$

Así pues, K es el conjunto de puntos (o región) cuyos grados de pertenencia son máximos con respecto a G, mientras que el soporte incluye a todos los puntos con un grado de pertenencia mayor que cero. Sin embargo, para la consecución de modelos consistentes, necesitamos aplicar las siguientes restricciones a G:

$$\forall\ G, K \subseteq S \tag{5}$$

$$\begin{gathered} \forall\ \{p_i, p_j\} \mid p_i, p_j \in S,\ p_i, p_j \notin K \text{ y } p_i \neq p_j \\ d(p_i, K) > d(p_j, K) \Longleftrightarrow \mu_G(p_i) < \mu_G(p_j) \end{gathered} \tag{6}$$

Estas condiciones aseguran que los modelos borrosos sean consistentes, al evitar la posibilidad de obtener Ks y Ss disjuntos, y asegurar la monotonicidad para μ_G, donde $d(p, K)$ es la distancia euclídea a K desde un punto p en S.

C. Construyendo descriptores sobre los datos de expertos

Un descriptor geográfico borroso G, como "norte de Galicia", se modela de acuerdo con los polígonos dibujados por los expertos para dicha expresión. Formalmente, la colección de polígonos dibujados para un G específico se define como:

$$R_G = \{P_1, P_2, ..., P_n\} \tag{7}$$

Cada P representa un polígono, y n es el número total de polígonos restantes tras el filtrado inicial. Cada polígono se compone de un conjunto de vértices, definidos bajo una proyección *plate carrée* (pares de valores de longitud y latitud).

La primera tarea para modelar un G dado consiste en determinar sus constituyentes (S y K), puesto que calcular ambos nos permitirá caracterizar μ_G posteriormente. Para ello, en primer lugar se transforman las coordenadas de los polígonos en R_G desde una proyección *plate carrée* a una proyección *Mercator*. A continuación, se define una malla de puntos equidistantes sobre ambos ejes cartesianos, $D = (p_1, ..., p_i, ..., p_{|D|})$, que se encuentra delimitada por la extensión máxima de la geografía subyacente (en nuestro caso, la región de Galicia). La distancia entre los puntos de la malla viene determinada por un parámetro δ, que especifica un porcentaje de la extensión total del mapa. Por ejemplo, $\delta = 1$ significa que la distancia entre un par de puntos de la malla contiguous es igual al 1% de la distancia entre límites opuestos del map sobre uno de los ejes.

Como se especifica en el Algoritmo 1, usando D y la colección de trazados expertos R_G, calculamos el número de veces que cada p en D está contenido en un polígono P en R_G, para determinar el porcentaje de polígonos que se solapan en un p dado. Basándonos en los porcentajes calculados para todos los puntos en D, determinamos K usando una aproximación de mayoría simple. Por tanto, PK está compuesto de

[1]Por simplicidad, nos referiremos a $\mu_G(p)$ en vez de $\mu_G(x, y)$.

Algorithm 1 Cálculo de K y S para un descriptor G

Entrada: D, R_G
Salida: K, S

$PCS \leftarrow ()$
for all $p_i \in D$ **do**
  $count \leftarrow 0$
  for all $P_j \in R_G$ **do**
    if $p_i \in P_j$ **then**
      $count \leftarrow count + 1$
    end if
  end for
  $pcs_i \leftarrow count/|R_G|$
  $PCS \leftarrow PCS \cup pcs_i$
end for
$PK \leftarrow \{p_i \in D \mid pcs_i > 0.5\}$
$PS \leftarrow \{p_i \in D \mid pcs_i > 0\}$
$K \leftarrow ConvexHull(PK)$
$S \leftarrow ConvexHull(PS)$
$bp \leftarrow \text{argmax}_{p_i \in S}(d(p_i, K))$
$op \leftarrow \text{argmin}_{p_i \in D \text{ y } p_i \notin S}(d(p_i, bp))$
$od \leftarrow d(K, op)$
return K, S, od

aquellos puntos cuyos porcentajes son $> 50\%$, y PS cubre todos los puntos donde el porcentaje es $> 0\%$. En vez de considerar S y K como colecciones de puntos en D (lo que PK y PS son), calculamos sus envolventes convexas, esto es, los polígonos convexos que delimitan sus áreas. Este proceso elimina cualquier área disjunta perteneciente a K que pueda aparecer por divergencias entre los polígonos dibujados, ya que el envolvente las agrega bajo una única área. Finalmente, calculamos od, la suma de la distancia del vértice de S más lejano a K (bp) y la distancia mínima de ese punto a otro externo a S (op), que será usada en la definición de μ_G, junto con K y S.

D. Evaluación de un descriptor geográfico borroso

Tomando como base los tres elementos devueltos por el Algoritmo 1, la función μ_G que evalúa un punto p se define como:

$$\mu_G(p) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \in K \\ 1 - d(p, K)/od & \text{si } p \in S \text{ y } p \notin K \\ 0 & \text{si } p \notin S \end{cases} \quad (8)$$

La función de pertenencia μ_G se define siguiendo la condición de monotonicidad. Bajo dicha definición, todos los puntos en S tienen grados de pertenencia > 0 y este grado decrece a medida que el punto evaluado se aleja de K. En estas condiciones, la caracterización de un descriptor geográfico borroso G mediante la definición de su soporte y su núcleo nos permite crear modelos simples que son consistentes y fáciles de interpretar.

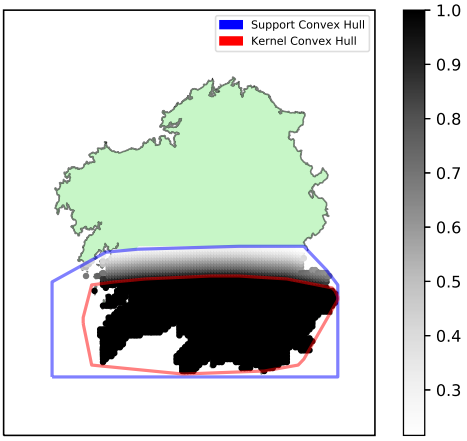


Fig. 4. Representación gráfica del descriptor geográfico borroso "Sur de Galicia".

E. Ejemplos

Con el fin de ilustrar los resultados del algoritmo de modelado y explicar algunas de las decisiones integradas en el Algoritmo 1 y en la definición de μ_G, describimos a continuación dos modelos borrosos distintos que resultan de la agregación de los polígonos dibujados por los meteorólogos para dos expresiones geográficas bajo distintas categorías o marcos de referencia en la Tabla I.

El primer descriptor, mostrado en la Figura 4, modela la expresión "sur de Galicia". Este modelo puede considerarse muy regular, tanto para K como para S. La condición de mayoría simple asegura además un mayor consenso a la hora de definir el significado de "sur". Este descriptor proporciona un área extensa en el que los puntos interiores pueden considerarse como parte del "sur de Galicia" en distintos grados.

Otros descriptores adoptan distintas formas, donde S varía en ancho respecto a K. Este es el caso, por ejemplo de "áreas de montaña de Lugo". Como muestra la Figura 5, la forma de este descriptor es en cierto modo elipsoidal y la distancia

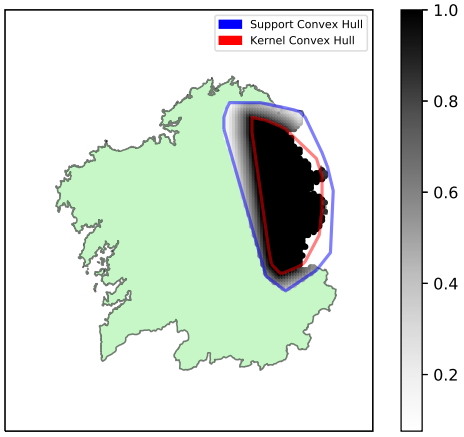


Fig. 5. Representación gráfica del descriptor geográfico borroso "Áreas montañosas de Lugo".

entre los límites de S y K no es constante, comparada con la Figura 4. Este caso ilustra bien cómo algunos puntos en S más cercanos a su periferia tienen grados de pertenencia más elevados que otros más lejanos, debido a su cercanía a K.

VI. Conclusiones

En este trabajo hemos descrito una metodología basada en la aplicación de conjuntos borrosos para la realización de una tarea de modelado de lenguaje, en el contexto del desarrollo de un sistema D2T que generará descripciones meteorológicas georreferenciadas. Esta metodología incluye la recogida de datos expertos sobre referencias geográficas y su agregación mediante la construcción de descriptores borrosos. Como trabajo futuro, desarrollaremos un algoritmo de generación de expresiones de referencia geográficas que utilice los descriptores descritos en este trabajo, que constituirá además el núcleo del sistema D2T.

Agradecimientos

A. Ramos-Soto es investigador postdoctoral financiado por la "Consellería de Cultura, Educación e Ordenación Universitaria" (481B 2017/030) y J.M. Alonso es Investigador Ramón y Cajal (RYC-2016-19802). Además, este trabajo está parcialmente financiado por los proyectos TIN2017-90773-REDT (iGLN), TIN2017-84796-C2-1-R (BIGBISC), TIN2014-56633-C3-1-R (BAI4SOW) y TIN2014-56633-C3-3-R (ABS4SOW) cofinanciados por el "Ministerio de Economía y Competitividad." También reconocemos el apoyo de la Xunta de Galicia (Centro singular de investigación de Galicia acreditació 2016-2019) y la Unión Europea (Fondo FEDER - European Regional Development Fund - ERDF).

Referencias

[1] A. Gatt and E. Krahmer, "Survey of the state of the art in natural language generation: Core tasks, applications and evaluation," *Journal of Artificial Intelligence Research*, vol. 61, pp. 65–170, 2018.

[2] A. Ramos-Soto, A. Bugarín, and S. Barro, "On the role of linguistic descriptions of data in the building of natural language generation systems," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 285, pp. 31–51, 2016.

[3] Gartner, "Neural Networks and Modern BI Platforms Will Evolve Data and Analytics," http://www.gartner.com/smarterwithgartner/nueral-networks-and-modern-bi-platforms-will-evolve-data-and-analytics/, accessed: 2017-03-14.

[4] S. Sripada, E. Reiter, and I. Davy, "Sumtime-mousam: Configurable marine weather forecast generator," *Expert Update*, vol. 6, no. 3, pp. 4–10, 2003.

[5] A. Ramos-Soto, A. Bugarín, S. Barro, and J. Taboada, "Linguistic descriptions for automatic generation of textual short-term weather forecasts on real prediction data," *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, vol. 23, no. 1, pp. 44–57, Feb 2015.

[6] E. Goldberg, N. Driedger, and R. Kittredge, "Using natural-language processing to produce weather forecasts," *IEEE Expert*, vol. 9, no. 2, pp. 45–53, 1994.

[7] J. Coch, "Interactive generation and knowledge administration in multimeteo," in *Proceedings of the Ninth International Workshop on Natural Language Generation*, Niagara-on-the-lake, Ontario, Canada, 1998, pp. 300–303, software demonstration.

[8] J. Hunter, Y. Freer, A. Gatt, E. Reiter, S. Sripada, and C. Sykes, "Automatic generation of natural language nursing shift summaries in neonatal intensive care: Bt-nurse," *Artificial Intelligence in Medicine*, vol. 56, no. 3, pp. 157 – 172, 2012.

[9] E. Reiter, R. Robertson, and L. Osman, "Types of knowledge required to personalise smoking cessation letters," in *Artifical Intelligence and Medicine: Proceedings of AIMDM-1999*, W. Horn, Ed. Berlin, New York: Springer, 1999, pp. 398–399.

[10] A. Goldstein and Y. Shahar, "An automated knowledge-based textual summarization system for longitudinal, multivariate clinical data," *Journal of biomedical informatics*, vol. 61, pp. 159–175, 2016.

[11] J. Yu, E. Reiter, J. Hunter, and S. Sripada, "Sumtime-turbine: A knowledge-based system to communicate gas turbine time-series data," in *Developments in Applied Artificial Intelligence*, ser. Lecture Notes in Computer Science, P. Chung, C. Hinde, and M. Ali, Eds. Springer Berlin Heidelberg, 2003, vol. 2718, pp. 379–384.

[12] N. Marín and D. Sánchez, "On generating linguistic descriptions of time series," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 285, pp. 6 – 30, 2016, special Issue on Linguistic Description of Time Series.

[13] R. de Oliveira, Y. Sripada, and E. Reiter, *Proceedings of the 15th European Workshop on Natural Language Generation (ENLG)*. Association for Computational Linguistics, 2015, ch. Designing an Algorithm for Generating Named Spatial References, pp. 127–135.

[14] D. Roy and E. Reiter, "Connecting language to the world," *Artificial Intelligence*, vol. 167, no. 1-2, pp. 1–12, 2005.

[15] E. Reiter, "An architecture for data-to-text systems," in *Proceedings of the 11th European Workshop on Natural Language Generation*, S. Busemann, Ed., 2007, pp. 97–104.

[16] J. Novikova, O. Dušek, and V. Rieser, "The E2E dataset: New challenges for end-to-end generation," in *Proceedings of the 18th Annual Meeting of the Special Interest Group on Discourse and Dialogue*, Saarbrücken, Germany, 2017, arXiv:1706.09254. [Online]. Available: https://arxiv.org/abs/1706.09254

[17] E. Reiter, S. Sripada, J. Hunter, and I. Davy, "Choosing words in computer-generated weather forecasts," *Artificial Intelligence*, vol. 167, pp. 137–169, 2005.

[18] E. Reiter and S. Sripada, "Should corpora texts be gold standards for nlg?" in *Proceedings of the International Natural Language Generation Conference*, 2002, pp. 97–104.

[19] R. Turner, S. Sripada, E. Reiter, and I. P. Davy, "Selecting the content of textual descriptions of geographically located events in spatio-temporal weather data," *Applications and Innovations in Intelligent Systems*, vol. XV, pp. 75–88, 2007.

[20] J. Kacprzyk, "Computing with words is an implementable paradigm: Fuzzy queries, linguistic data summaries, and natural-language generation," *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, pp. 451–472, 2010.

[21] A. Ramos-Soto, A. Bugarín, and S. Barro, "Fuzzy sets across the natural language generation pipeline," *Progress in Artificial Intelligence*, pp. 1–16, 2016.

[22] R. Turner, S. Sripada, E. Reiter, and I. P. D. Davy, "Using spatial reference frames to generate grounded textual summaries of georeferenced data," in *Proceedings of the 2008 International Conference on Natural Language Generation (INLG08)*, Salt Fork, Ohio, 12-14 June 2008.

[23] S. C. Levinson, *Space in language and cognition: Explorations in cognitive diversity*. Cambridge University Press, 2003, vol. 5.

[24] R. de Oliveira, S. Sripada, and E. Reiter, "Absolute and relative properties in geographic referring expressions," in *Proceedings of the 9th International Natural Language Generation conference*, 2016, pp. 256–264.

[25] P. Fisher, "Sorites paradox and vague geographies," *Fuzzy sets and systems*, vol. 113, no. 1, pp. 7–18, 2000.

[26] V. B. Robinson, "A perspective on the fundamentals of fuzzy sets and their use in geographic information systems," *Transactions in GIS*, vol. 7, no. 1, pp. 3–30, 2003.

[27] P. Fisher, A. Comber, and R. Wadsworth, "Approaches to uncertainty in spatial data," *Fundamentals of spatial data quality*, pp. 43–59, 2006.

[28] MeteoGalicia, "Meteogalicia's web site." http://www.meteogalicia.es, 2018.

[29] A. Ramos-Soto, N. Tintarev, R. de Oliveira, E. Reiter, and K. van Deemter, "Natural language generation and fuzzy sets: An exploratory study on geographical referring expression generation," in *IEEE World Congress on Computational Intelligence, 2016 IEEE International Conference on Fuzzy Systems,*, 2016.

[30] A. Ramos-Soto, J. M. Alonso, E. Reiter, K. van Deemter, and A. Gatt, "An empirical approach for modeling fuzzy geographical descriptors," in *Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE), 2017 IEEE International Conference on*. IEEE, 2017, pp. 1–6.

Indistinguibilidad y Modelado de Tamaño en Sistemas *Data-to-text*

Nicolás Marín, Gustavo Rivas-Gervilla y Daniel Sánchez,
Departmento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Granada, 18071 Granada, España
Email: {nicm, griger, daniel}@decsai.ugr.es

***Abstract*—En este trabajo extendemos nuestra propuesta previa de modelado de tamaño en base al contexto, incluyendo el tratamiento de la indistinguibilidad en la percepción del tamaño. Ilustramos la importancia de este aspecto con una experimentación que, adicionalmente, muestra una forma de determinar experimentalmente los parámetros del método.**

Index Terms*—Tamaño, modelado difuso, descripción lingüística de datos, sistemas *data-to-text

I. Introducción

El lenguaje natural es una herramienta cada vez más imprescindible en el desarrollo de interfaces de comunicación hombre-máquina amigables. Prueba de ello es la importancia, cada vez más marcada, de la investigación en el ámbito de Generación de Lenguaje Natural, en general, y en el ámbito de los sistemas *data-to-text* en particular. Este tipo de sistemas tienen como objetivo elaborar información textual a partir del análisis de datos [1]. Particularmente, se pretende que dichos textos sean similares a los que escribiría un experto humano.

Uno de los problemas más importantes en este ámbito es determinar la semántica de los términos lingüísticos empleados en los textos, así como el grado de correspondencia entre dichos términos y los datos. Dado que dichos términos suelen representar conceptos difusos, es natural considerar conjuntos difusos como modelos de dicha semántica [2]–[5]. Estos conjuntos difieren de los conjuntos clásicos (o *crisp*) en que cada elemento del dominio pertenece al conjunto con un grado en el intervalo $[0, 1]$. La función que asocia a cada elemento este grado se denomina función de pertenencia. Uno de los usos más importantes de estos términos es la identificación de objetos en un conjunto, para lo cual se utilizan *expresiones de referencia*, que son sintagmas nominales formados habitualmente por una conjunción de términos que expresan propiedades de los objetos.

En [6] hemos propuesto un enfoque para la determinación de las funciones de pertenencia que modelan la semántica de conceptos difusos relativos al tamaño. Dicha propuesta considera funciones que son dependientes y condicionadas por el contexto de la aplicación donde se van a usar los términos lingüísticos.

Este trabajo ha sido financiado en parte por el Gobierno de España y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional - FEDER a través del proyecto TIN2014-58227-P. Así como por la beca del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte de España, FPU16/05199. Corresponding author: G. Rivas-Gervilla.

En este trabajo avanzamos un paso más en nuestra propuesta incluyendo en la misma el tratamiento de la indistinguibilidad. Este problema surje debido a que las computadoras son capaces de almacenar información sobre los objetos (sobre su tamaño en este caso) de manera más precisa de lo que nosotros somos capaces de percibir visualmente, lo cual afecta a nuestro método.

En la siguiente sección describimos la importancia del contexto en el modelado de términos relativos al tamaño y resumimos la propuesta presentada en [6]. En la sección III describimos el problema de la indistinguibilidad y cómo afecta a nuestro método, y detallamos los cambios en la misma que nos permitirán adaptarnos al grado de indistinguibilidad del tamaño de los objetos en un contexto concreto. En la sección IV se presenta un experimento con usuarios para ilustrar nuestra discusión. En esa misma sección se muestra una posible forma de determinar experimentalmente uno de los parámetros clave en nuestra propuesta. Finalmente, las dos últimas secciones contienen una breve discusión de los resultados y las conclusiones de nuestro trabajo, respectivamente.

II. Modelado del tamaño

A. Modelado y contexto

Como ya hemos indicado, uno de los aspectos clave en el desarrollo de sistemas *data-to-text* es la definición de la semántica de los términos lingüísticos que se van a emplear en los textos generados. En el caso particular de conceptos relativos a propiedades de los objetos, dicha semántica debe establecer una correspondencia entre características y valores de los datos asociados a dichos objetos y el cumplimiento de la propiedad. En el caso particular de propiedades difusas (como puede ser el tamaño, ya que un objeto puede ser grande en un cierto grado), este objetivo se cumple mediante la definición de las funciones de pertenencia asociadas a dichos conceptos difusos, como es bien conocido. Determinar las funciones de pertenencia es uno de los problemas clave en el uso de conjuntos difusos en éste y otros dominios de aplicación.

Sin embargo, la determinación de la función de pertenencia no plantea únicamente el problema de cómo obtener la asignación de grados a elementos de un referencial. En muchas ocasiones ocurre que la función de pertenencia no es única, sino que depende del contexto de aplicación (datos concretos, usuario, objetivos, etc.). Es decir, la definición de la función de pertenencia es relativa al contexto.

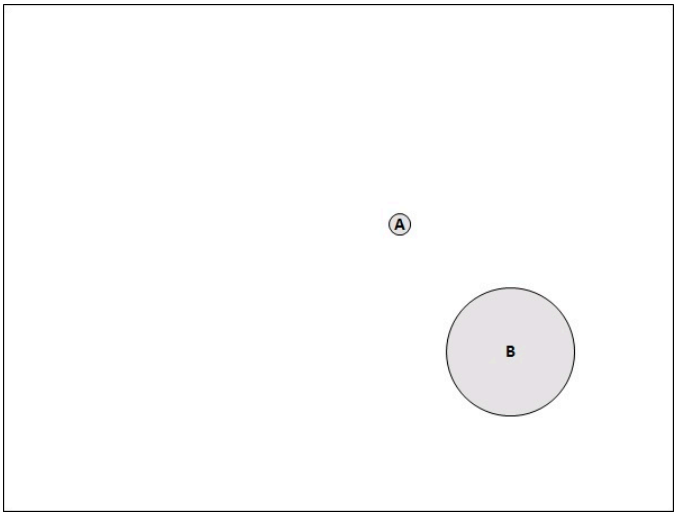


Fig. 1. Escena con objetos A y B

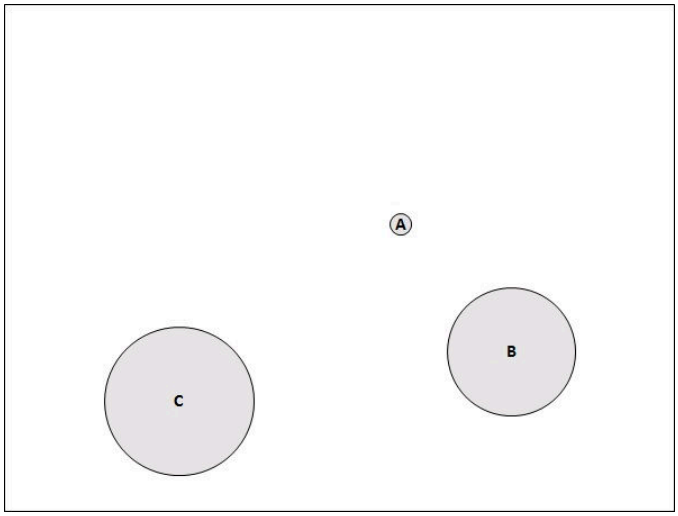


Fig. 2. Escena con objetos A, B y C

Para ilustrar esta situación en el contexto de sistemas *data-to-text*, vamos a considerar el ejemplo de las Figuras 1 y 2, extraido de [6]. En la escena de la Figura 1, para referirnos al objeto B es suficiente decir *el objeto grande*. Sin embargo, en la escena de la Figura 2, que contiene los mismos objetos de la Figura 1 más un objeto adicional, la referencia *el objeto grande* no llevaría a un usuario hipotético a señalar el objeto B, sino el C. Es decir, el contexto (en este caso, la aparición de nuevos datos, concretamente el objeto C) hace que el cumplimiento de la propiedad "tamaño" cambie, particularmente porque el rango de valores de tamaño que consideramos ha cambiado con la aparición de un nuevo tamaño (el tamaño de C). En este caso, el objeto B pasa a encajar mejor con la etiqueta *mediano*, siendo por tanto más adecuado en la Figura 2 referirse a B como *el objeto mediano* de cara a conseguir que un hipotético usuario lo identifique correctamente. Por lo tanto, queda claro que la definición de las funciones de pertenencia para las etiquetas *grande* y *mediano* es dependiente del contexto, por lo que fijar un conjunto de funciones de pertenencia independiente del contexto a priori no nos permite interactuar correctamente con el usuario en la mayoría de los casos, como demostramos en [6].

B. Una propuesta de modelado basada en contexto

En [6] aportamos una primera aproximación a la solución de este problema. La propuesta consiste en determinar las funciones de pertenencia para las etiquetas *grande*, *mediano* y *pequeño* asociadas a la propiedad "tamaño" de forma dependiente del contexto asociado a los datos, teniendo en cuenta los distintos tamaños precisos de los objetos presentes en el conjunto de datos/escena. Asumiendo que el conjunto de tamaños es $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$, $n > 1$, con $s_i \in \mathbb{R}^+$ y $0 < s_1 \leq \cdots \leq s_n \ \forall 1 \leq i \leq n$, la propuesta puede resumirse como sigue:

- En primer lugar, determinamos los tamaños que van a ser totalmente representativos de cada una de las etiquetas consideradas, es decir, van a tener grado 1 de pertenencia a las mismas. De manera natural establecemos por definición $\textit{pequeño}(s_1) = \textit{grande}(s_n) = 1$ y $\textit{pequeño}(s_n) = \textit{grande}(s_1) = \textit{mediano}(s_1) = \textit{mediano}(s_n) = 0$. Nótese que esta definición es independiente de los valores concretos de s_1 y s_n, así como de la diferencia $|s_1 - s_n|$ entre ambos (volveremos sobre este último punto más adelante, puesto que es una de las motivaciones del presente trabajo). En el caso $n > 2$ tendremos también representantes de la propiedad *mediano*. Si n es impar hay un único representante: $s' = s'' = s_{(\lceil n/2 \rceil)}$. En caso contrario tenemos dos representantes: $s' = s_{(n/2)}$ y $s'' = s_{(n/2+1)}$. Para todo representante $s \in \{s', s''\}$ de mediano tenemos $\textit{mediano}(s) = 1$ y $\textit{pequeño}(s) = \textit{grande}(s) = 0$ por definición.
- El grado de pertenencia a las tres etiquetas de los tamaños en S que no son representativos de ninguna de ellas se determina mediante un proceso de *clustering*, centrado en los valores representativos de cada etiqueta, y en base a las distancias de dichos tamaños con respecto a los representativos. Como método de *clustering* empleamos el método definido en [7] en base a representaciones por niveles [8]. Este método toma como punto de partida una relación difusa reflexiva y simétrica de semejanza en el conjunto de tamaños S. En el caso particular de los tamaños, esta relación se obtiene en base a las distancias a través de un parámetro d_m que define la máxima distancia a la que pueden estar dos valores para que su semejanza sea mayor que 0. Sean $s_i, s_j \in S$ y sea $d(s_i, s_j) = |s_i - s_j|$ la distancia Euclidea entre ellos. La semejanza entre s_i y s_j en base al parámetro d_m, $R^{d_m}(s_i, s_j)$, se calcula mediante la siguiente expresión:

$$R^{d_m}(s_i, s_j) = \max\left\{1 - \frac{d(s_i, s_j)}{d_m}, 0\right\} \qquad (1)$$

Como se demuestra en [6], para garantizar las condiciones que hemos expuesto anteriormente sobre los grados de pertenencia de s_1, s', s'' y s_n a las tres etiquetas de tamaño, es suficiente con elegir un d_m que satisfaga las siguientes condiciones:

- En el caso $n = 2$ se requiere $d_m \leq s_n - s_1$.
- En el caso $n > 2$ se requiere $0 < d_m \leq min(d(s_1, s'), d(s'', s_n))$. Esta condición implica asimismo $d_m \leq s_n - s_1$ en este caso.

A partir de una relación de semejanza difusa como ésta, el proceso de *clustering* basado en representación por niveles se basa en la realización de un *clustering crisp* en los diferentes niveles $\Lambda(R^{d_m}) = \{R^{d_m}(s_i, s_j) \mid s_i, s_j \in S\}\backslash\{0\}$. Este conjunto es finito, $\Lambda(R^{d_m}) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ con $k \geq 1$ y $1 = \alpha_1 > \cdots > \alpha_{k+1} = 0$. Para cada $\alpha_k \in \Lambda(R^{d_m})$ puede obtenerse un *clustering crisp* basado en recubrimientos de S de la siguiente forma:

1) Calcular el α_k-corte de R^{d_m}, que es una relación *crisp* reflexiva y simétrica.
2) Calcular el *clustering* de S a nivel α_k como el conjunto de cliques maximales del α_k-corte de R^{d_m}. Sea $\mathcal{C}_{\alpha_k} \subset \{0,1\}^S$ el conjunto de *clusters* obtenidos, cada uno de ellos asociado biunívocamente a un clique maximal. Nótese que estos *clusters* pueden solaparse, formando un recubrimiento de S.

Como consecuencia de las restricciones impuestas sobre d_m se da $R^{d_m}(s_1, s_n) = 0$ para todo d_m que las cumpla, y por tanto $|\mathcal{C}_{\alpha_k}| \geq 2$, dado que s_1 y s_n estarán siempre en distintos *clusters*. Además es fácil demostrar que existe un solo *cluster* $C^p_{\alpha_k} \in \mathcal{C}_{\alpha_k}$, verificando $s_1 \in C^p_{\alpha_k}$, y un solo *cluster* $C^g_{\alpha_k} \in \mathcal{C}_{\alpha_k}$, cumpliéndose $s_n \in C^g_{\alpha_k}$, siendo como ya hemos comentado $C^p_{\alpha_k} \neq C^g_{\alpha_k}$. Además, en el caso $n > 2$ definimos:

$$C^m_{\alpha_k} = \bigcup \{C^i_{\alpha_k} \mid C^i_{\alpha_k} \cap \{s', s''\} \neq \emptyset\} \qquad (2)$$

Es decir, $C^m_{\alpha_k}$ es la unión de todos los *clusters* que contienen al menos a uno de los representantes de la categoría *mediano*. Nótese que $C^m_{\alpha_k}$ puede ser vacío, algo que ocurre en todos los niveles particularmente cuando $n = 2$.

A partir del *clustering* en cada nivel, los *clusters* difusos que modelan las funciones de pertenencia para las tres propiedades *pequeño*, *mediano* y *grande* se obtienen, siguiendo las ideas expuestas en [7], [8], como sigue: $\forall s_i \in S$,

$$\textit{pequeño}(s_i) = \sum_{\alpha_k \mid s_i \in C^p_{\alpha_k}} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) \qquad (3)$$

$$\textit{mediano}(s_i) = \sum_{\alpha_k \mid s_i \in C^m_{\alpha_k}} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) \qquad (4)$$

$$\textit{grande}(s_i) = \sum_{\alpha_k \mid s_i \in C^g_{\alpha_k}} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) \qquad (5)$$

α_k	$C^p_{\alpha_k}$	$C^m_{\alpha_k}$	$C^g_{\alpha_k}$
1	$\{10\}$	$\{25\}$	$\{40\}$
2/3	$\{10\}$	$\{20, 25, 30\}$	$\{40\}$
1/3	$\{10, 20\}$	$\{20, 25, 30\}$	$\{30, 40\}$

TABLE I
Clusters crisp por niveles para $d_m = 15$.

Como ejemplo, sea $S = \{10, 20, 25, 30, 40\}$ ($n = 5$). En este contexto tenemos que $s_1 = 10$ es el tamaño representativo para *pequeño*, $s_5 = 40$ para *grande*, y $s_3 = 25$ es el (único) representante para *mediano*. Sea $d_m = 15$, que es el máximo valor posible en este ejemplo. Dado que el conjunto de distancias entre tamaños es $\{0, 5, 10, 15, 20, 30\}$ tenemos que $\Lambda(R^{15}) = \{1, 2/3, 1/3\}$. La Tabla I muestra los *clusters crisp* en cada nivel. En base a esta información y las Ecuaciones (3)-(5), se tiene finalmente:

$$\begin{aligned} \textit{pequeño} &= 1/10 + (1/3)/20 \\ \textit{mediano} &= (2/3)/20 + 1/25 + (2/3)/30 \\ \textit{grande} &= (1/3)/30 + 1/40 \end{aligned}$$

III. Indistinguibilidad y modelado

A. Influencia de la indistinguibilidad

Uno de los grandes problemas en la interacción con datos a través de las computadoras es lo que se denomina *hueco semántico*[1]. La principal forma en que se manifiesta este problema es que, mientras que los ordenadores almacenan datos descritos mediante valores de variables en dominios que suelen ser muy precisos y contener muchos valores distintos (por ejemplo, mediante números reales), los seres humanos solemos utilizar información descrita en base a conceptos expresados de forma lingüística. Hemos podido ver distintos ejemplos claros de esta diferencia en las secciones anteriores: mientras que para el ordenador el tamaño de un objeto se describe mediante un valor real numérico, los seres humanos utilizamos términos lingüísticos como *grande*, etc. Cada uno de estos términos se corresponde con un grupo o intervalo de valores precisos, grupo o intervalo que suele tener una frontera imprecisa, y por tanto una forma adecuada de modelar dicha correspondencia es mediante el uso de conjuntos difusos, como hemos visto y es bien conocido en nuestro ámbito.

Sin embargo, existe un problema adicional asociado al *hueco semántico* que recibe menos atención en la literatura, y que tiene que ver con la distinguibilidad. Este problema es típico en, aunque no exclusivo de, aplicaciones que involucran la percepción humana, como lo es el problema del tamaño que nos ocupa en este trabajo, y puede expresarse de manera informal como sigue: el ser humano no es capaz de percibir diferencias en el valor de propiedades de objetos al mismo nivel que una computadora.

Podemos ilustrar el problema que supone la indistinguibilidad para nuestro método de modelado sensible al contexto con

[1]Del inglés *semantic gap*.

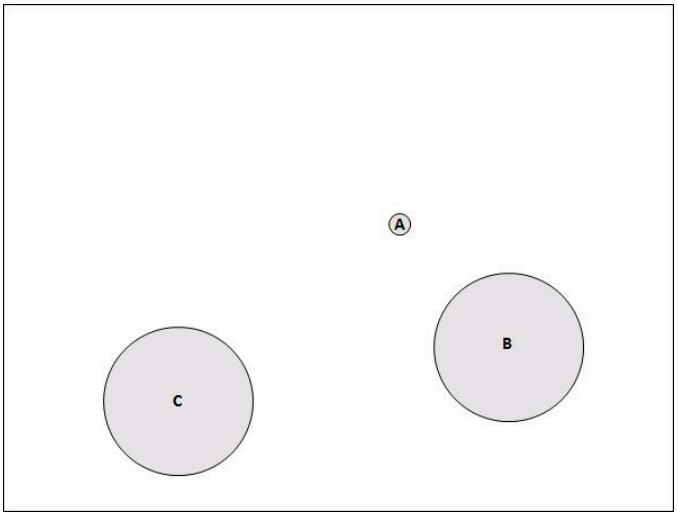


Fig. 3. Modificación de la escena de la Figura 2: tamaño del objeto B distinto pero indistinguible del tamaño del objeto C

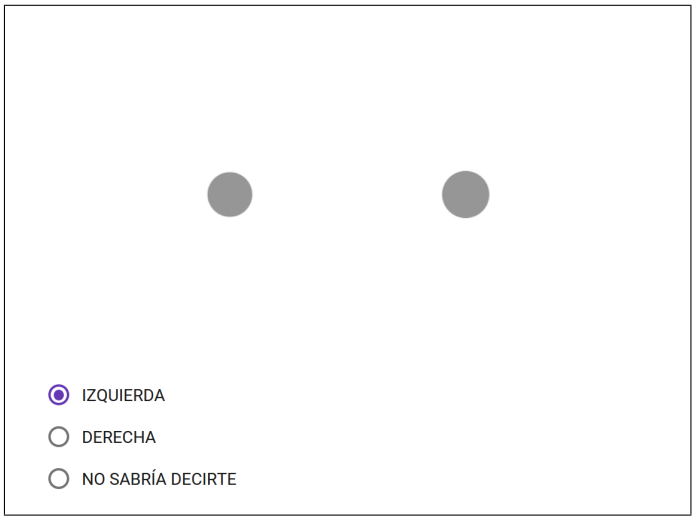


Fig. 4. Ejemplo de pregunta del cuestionario.

un ejemplo. Consideremos la escena de la Figura 3, que se ha obtenido a partir de la escena de la Figura 2 aumentando el tamaño del objeto B hasta ser indistinguible (pero no igual) del tamaño del objeto C. En este caso, dado que para una computadora los tamaños de C y B son distintos, nuestro método diría que el objeto B es *mediano* con grado 1, mientras que los objetos A y C son medianos con grado 0. En base a este modelado sensible al contexto, un algoritmo de generación de expresiones de referencia propondría *el objeto mediano* como una forma de identificar claramente al objeto B. Sin embargo, al ser los tamaños de B y C indistinguibles visualmente para el usuario, éste no tendría claro a cuál de los dos objetos (B ó C) estamos haciendo referencia con dicha expresión (dado que A es claramente el pequeño en este caso).

Para solventar este problema es necesario modificar nuestra propuesta para tener en cuenta la distinguibilidad de objetos. Para ello vamos a considerar las siguientes hipótesis:

- Es posible determinar un umbral de distancia d_s tal que los tamaños s_i y s_j son distinguibles si, y solo si, $d(s_i, s_j) > d_s$.
- El umbral d_s puede ser sensible a distintos aspectos del contexto, tales como distancia entre los objetos, etc. Más adelante prestaremos atención a este problema.

En la siguiente sección detallamos la modificación que proponemos a nuestro método de modelado sensible al contexto para resolver el problema de la indistinguibilidad de objetos.

B. Método propuesto

Nuestra propuesta consta de los siguientes pasos:

1) Determinación del umbral de distinguibilidad d_s adecuado para el modelado en el contexto concreto de aplicación. Es posible obtener d_s de distintas formas. En la Sección IV veremos un sencillo ejemplo de obtención de d_s de forma experimental bajo ciertos supuestos. El estudio y propuesta de otras técnicas se plantea como trabajo futuro.
2) Determinación del umbral de similitud d_m para el contexto concreto de aplicación, teniendo en cuenta el valor de d_s en dicho contexto. Es importante determinar d_m después de d_s dado que el valor de este último afecta a las condiciones que se imponen sobre d_m. En primer lugar, por la semántica de ambos umbrales, es evidente que debe cumplirse $d_s < d_m$, dado que dos tamaños son indistinguibles cuando la distancia entre los mismos está por debajo de d_s, mientras que son absolutamente diferentes cuando la distancia está por encima de d_m. Pero además, el valor de d_s afecta a la forma en que se obtiene d_m, dado que, como hemos visto, este último viene restringido por condiciones que tienen que ver con la distancia entre objetos representativos de cada una de las etiquetas para los cuales, tras la discusión y el ejemplo que hemos visto en la sección anterior, debemos exigir que sean distinguibles. Más concretamente:
   - Si s_1 y s_n son indistinguibles entonces no podemos modelar tamaños de forma sensible al contexto.
   - Supongamos s_1 y s_n distinguibles y sea $S_m \subset S$ el subconjunto de tamaños que son distinguibles tanto de s_1 como de s_n (obviamente $s_1, s_n \notin S_m$). Entonces:
     - Si $S_m = \emptyset$ solo podemos modelar dos tamaños, *pequeño* y *grande*, siendo sus representantes s_1 y s_n, respectivamente.
     - Si $s_m \neq \emptyset$ entonces podemos modelar también *mediano*, siendo su(s) representante(s) el valor o valores centrales de S_m (dependiendo de que S_m tenga un número impar o par de valores).

   Una vez determinados los representantes de las etiquetas se seleccionará un valor de d_m adecuado que cumpla con los requisitos ya expuestos anteriormente: $d_m \leq s_n - s_1$ para dos etiquetas, y $0 < d_m \leq$

$min(d(s_1, s'), d(s'', s_n))$ para las tres.

3) Aplicar nuestra técnica de *clustering* para determinar las funciones de pertenencia para las tres etiquetas. Para ello utilizaremos una relación de semejanza que introduce una modificación con respecto a la de la Ecuación (1), dado que queremos que cuando la distancia entre dos tamaños sea menor o igual a d_s, su semejanza sea 1. La nueva relación de semejanza viene dada por

$$R^{d_m}(s_i, s_j) = \begin{cases} 1 & d(s_i, s_j) \leq d_s \\ 1 - \frac{d(s_i, s_j)}{d_m} & d_s < d(s_i, s_j) < d_m \\ 0 & d_m \leq d(s_i, s_j) \end{cases} \quad (6)$$

Es fácil demostrar que cuando $d_s = 0$ (lo cual implica que todo par de tamaños distintos son distinguibles), nuestra propuesta se reduce a la propuesta expuesta en la Sección II-B.

IV. Ejemplo de aplicación

Para ilustrar la influencia de la indistinguibilidad y su dependencia del contexto se ha realizado una sencilla experimentación. Concretamente, se ha elaborado una encuesta con diferentes escenas en las que cada escena consta de dos objetos de distinto tamaño a una distancia determinada. Al usuario se le pregunta que identifique el más pequeño de los dos, permitiéndole elegir entre tres respuestas posibles: *el que está a la derecha*, *el que está a la izquierda* y *no sabría decirte*. La figura 4 muestra un ejemplo de escena de la encuesta (aparece marcada la respuesta correcta).

Para elaborar el conjunto de escenas de la encuesta, se ha trabajado con tres granos de tamaño $C < B < A$ (elegidos en los extremos y centro del referencial), con cinco niveles de distancia (0, 0.3, 0.5, 0.7 y 1), también relativos, y configurando ejemplos en el que el ratio de parecido en tamaño va desde 0.95 hasta 0.995. La experimentación se ha realizado en la misma computadora con seis usuarios distintos a los que se les presenta el mismo conjunto de escenas con orden aleatorio.

El objetivo de la encuesta es señalar la posible dependencia del contexto de la indistinguibilidad, comprobando la variabilidad de respuestas entre usuarios, tamaños y distancias, e ilustrar una forma experimental para fijar el umbral d_s para una configuración de contexto dada.

A. Resultados

La tabla II muestra, para cada pareja distancia/grano de tamaño, los umbrales de ratio entre tamaños a partir de los cuales se ha obtenido una respuesta distinta de la correcta. Se resalta en negrita el valor mínimo obtenido en cada columna. Las distancias se muestran en valor relativo, representando el 1 la máxima distancia utilizada y el 0 la mínima distancia utilizada.

La figura 5 ilustra los datos de la tabla de manera gráfica. Como se puede observar, en la experimentación realizada, conforme desciende el tamaño, en general, baja también el umbral, es decir, el usuario necesita una mayor distancia en tamaño relativo para acertar. No se aprecia dicha tendencia en el caso de la distancia. Los mismos datos, agregando los valores de umbral obtenidos en cada usuario con una media en lugar de con el mínimo, se muestran en la tabla III.

TABLE II
Umbrales agregando con el mínimo

Distancia (rel.)	Tamaño		
	A	***B***	***C***
1	**98**	98,5	**95**
0,7	98,5	98,5	96
0,5	98	**98**	95
0,3	98	98,5	97
0	98,5	98	96

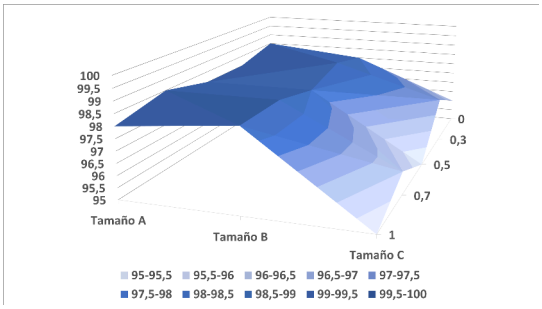


Fig. 5. Umbrales por tamaño y distancia, agregando con el mínimo.

La figura 6 ilustra los datos de la tabla de manera gráfica. Se observan similares tendencias, pero menos acusadas, dado que la media limita el efecto de los usuarios con menor precisión en la percepción del tamaño.

Por último, se muestran los datos de dos usuarios a título de ejemplo. La tabla IV y la figura 7, muestran los datos de un usuario con alta precisión en la percepción del tamaño, mientras que la tabla V y la figura 8 muestran los datos de un usuario con menor precisión.

V. Discusión

A la vista de la anterior experimentación, se pone de manifiesto que la *indistinguibilidad* es un elemento variable altamente dependiente del contexto. Por tanto, es importante que el sistema de generación de expresiones de referencia sea capaz de ajustar su funcionamiento a la capacidad de distinguibilidad propia del contexto en el que se ejecuta.

La experimentación que hemos desarrollado aquí, aunque simple, sirve para ilustrar que el ajuste de la indistinguibilidad es complejo. Nótese que la experimentación realizada utiliza solo tres variables para caracterizar el contexto, a saber, el *usuario*, el *tamaño* del objeto y la *distancia* entre ellos. El resto de variables se fijan: el *tipo* de objeto, el *color*, la *posición* en la pantalla, el *dispositivo*, ... por enumerar solo algunas variables de una lista que puede ser muy extensa dependiendo del sistema y del tipo de escenas con las que trabaje. Por citar solo un ejemplo, piénsese que se varía el color de los objetos: es bien conocido por todos que el color influye en la percepción del tamaño de los objetos.

TABLE III
UMBRALES AGREGANDO CON LA MEDIA

Distancia (rel.)	Tamaño		
	A	*B*	*C*
1	**98,7**	99,1	98,0
0,7	99,2	99,3	**97,8**
0,5	99,2	**99,0**	97,8
0,3	98,7	99,3	98,5
0	99,2	99,0	98,1

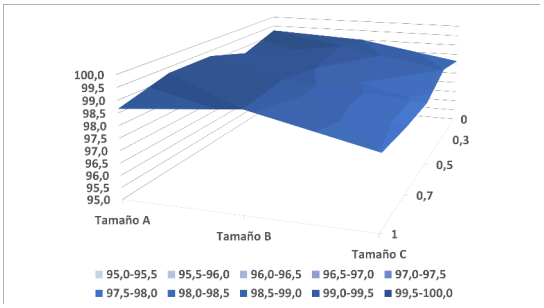


Fig. 6. Umbrales por tamaño y distancia, agregando con la media.

Por tanto, un sistema de generación de expresiones de referencia será mejor cuanto mayor sea el ajuste al contexto que tiene en cuenta para producir sus expresiones.

VI. Conclusiones

Una de las contribuciones más reconocidas de la Teoría de Conjuntos Difusos en el ámbito de los sistemas *data-to-text* es el modelado de propiedades difusas. Este trabajo contribuye a facilitar dicha tarea proponiendo una metodología para determinar de forma automática la semántica de propiedades difusas en base al contexto y teniendo en cuenta la distinguibilidad de las propiedades de los objetos, que es uno de los problemas más arduos que surgen en este tipo de sistemas.

References

[1] E. Reiter and R. Dale, *Building Natural Language Generation Systems*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2000.
[2] N. Marín and D. Sánchez, "On generating linguistic descriptions of time series," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 285, pp. 6–30, 2016.
[3] A. Ramos-Soto, A. Bugarín, and S. Barro, "On the role of linguistic descriptions of data in the building of natural language generation systems," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 285, pp. 31–51, 2016.
[4] K. van Deemter, *Not Exactly: In Praise of Vagueness*. New York, NY, USA: Oxford University Press, Inc., 2012.
[5] A. Gatt, N. Marín, F. Portet, and D. Sánchez, "The role of graduality for referring expression generation in visual scenes," in *Proceedings IPMU 2016, Part I, CCIS 610*, J. Carvalho, M.-J. Lesot, U. Kaymak, S. Vieira, B. Bouchon-Meunier, and R. R. Yager, Eds. Springer, 2016, pp. 191–203.
[6] N. Marín, G. Rivas-Gervilla, and D. Sánchez, "An approximation to context-aware size modeling for referring expression generation," in *IEEE International Conference on Fuzzy Systems, FUZZ-IEEE*, 2018.
[7] D. Dubois and D. Sanchez, "Fuzzy Clustering based on Coverings," in *Towards Advanced Data Analysis by Combining Soft Computing and Statistics*, ser. Studies in Fuzziness and Soft Computing, C. Borgelt, M. A. Gil, J. M. C. Sousa, and M. Verleysen, Eds. Springer, 2013, vol. 285, pp. 319–330.
[8] D. Sánchez, M. Delgado, M. Vila, and J. Chamorro-Martínez, "On a non-nested level-based representation of fuzziness," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 192, pp. 159–175, 2012.

TABLE IV
UMBRALES PARA USUARIO CON ALTA PRECISIÓN EN LA PERCEPCIÓN DEL TAMAÑO

Distancia (rel.)	Tamaño		
	A	*B*	*C*
1	**98,7**	99,1	98,0
0,7	99,2	99,3	**97,8**
0,5	99,2	**99,0**	97,8
0,3	98,7	99,3	98,5
0	99,2	99,0	98,1

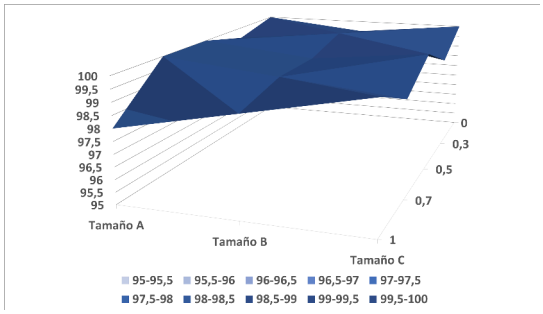


Fig. 7. Umbrales para usuario con alta precisión en la percepción del tamaño.

TABLE V
UMBRALES PARA USUARIO CON MENOR PRECISIÓN EN LA PERCEPCIÓN DEL TAMAÑO

Distancia (rel.)	Tamaño		
	A	*B*	*C*
1	**98,7**	99,1	98,0
0,7	99,2	99,3	**97,8**
0,5	99,2	**99,0**	97,8
0,3	98,7	99,3	98,5
0	99,2	99,0	98,1

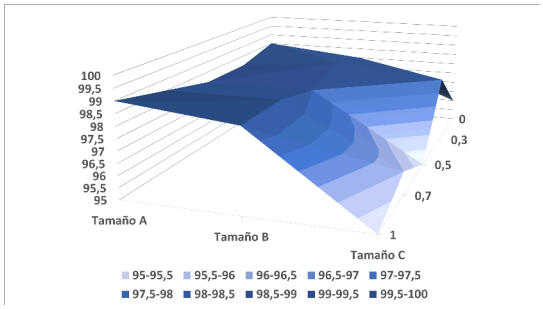


Fig. 8. Umbrales para usuario con menor precisión en la percepción del tamaño.

Método para medir la credibilidad de los agentes en videojuegos empleando Descripción Lingüística de de Fenómenos Complejos y su aplicación como herramienta de apoyo en el proceso de enseñanza-aprendizaje en un curso de Inteligencia Artificial *†‡

Clemente Rubio-Manzano, Tomás Lermanda, Alejandra Segura, Claudia Martínez-Araneda y Christian Vidal
SOMOS Research Group - Universidad del Bío-Bío & MCIS Research Group - Universidad de Cádiz

Resumen

El objetivo de este trabajo es proponer un nuevo método para medir la credibilidad de los agentes artificiales que actúan en un mundo virtual empleando la Descripción Lingüística de Fenómenos Complejos y las Funciones de Equivalencia Restringidas. La combinación de ambas técnicas computacionales permite generar y comparar informes de comportamiento en lenguaje natural generados automáticamente. Con el fin de mostrar y explorar las posibilidades de este nuevo método, se desarrolló una aplicación web que puede emplearse como herramienta de apoyo a la docencia de Inteligencia Artificial y donde cada alumno puede evaluar por sí mismo la calidad de su implementación en los respectivos proyectos.

Palabras Clave: Inteligencia Artificial, Videojuegos, Descripción Lingüística de Datos, Funciones de Equivalencia Restringidas, Lógica Difusa.

I. Introducción

La Inteligencia Artificial (IA) tiene como objetivo lograr que una máquina tenga una inteligencia similar a la humana [7]. Sin embargo, históricamente, han coexistido dos visiones (IA fuerte e IA débil) que se corresponden con las siguientes definiciones dadas por Marvin Minsky y John McCarthy, respectivamente: *"IA es la ciencia de crear máquinas capaces de realizar tareas que requerirían inteligencia si las tuviera que hacer un humano"*; *"IA es la ciencia y la ingeniería de crear máquinas inteligentes"*. Como se indica en [7]: *"Todos lo avances logrados hasta ahora en el campo de la IA son manifestaciones de la IA débil"*, es decir, dotar a las máquinas de la capacidad de realizar tareas específicas mejor que las personas se puede realizar con éxito, incluso, una IA específica puede superar a la pericia humana.

Por otro lado, un aspecto fundamental en el campo de la IA es determinar si las máquinas son realmente inteligentes, entonces dicha evaluación dependerá de la visión de IA que se tenga. En el caso de la IA fuerte, Alan Turing propuso su famoso test para determinar si un computador exhibía inteligencia humana. En el caso de la IA débil se optó por chequear si las máquinas realizan correctamente las tareas para las cuales fueron diseñadas y programadas.

La IA débil se ha aplicado con éxito en numerosas disciplinas. En el ámbito de los videojuegos, la IA se centra en crear entidades software (creadas mediante algoritmos/programas de computador que actúan sobre un entorno virtual) que produzcan en el espectador la ilusión de inteligencia. Por otro lado, se ha comprobado que los agentes (también llamados NPCs, por sus siglas en inglés Non-player Characters, o Bots) más divertidos y "jugables" son aquellos que se comportan como los jugadores humanos [13]. Surge así el desafío de tratar de desarrollar NPCs que posean un buen grado de imitación y, al mismo tiempo, diseñar e implementar instrumentos que permitan medirlo y evaluarlo [6]. No solo se trata en evaluar que un NPC realice las tareas específicas como un jugador humano, además, queremos que la IA se parezca a la IA del jugador humano lo más posible, debe ser creíble, cuanto más, mejor.

Esta característica se conoce como "credibilidad" ("believability") y habitualmente se evalúa empleando una extensión el mencionado Test de Turing [5]: *"Supongamos que estamos jugando e interactuamos con algún agente, ¿se podría distinguir observándolo al agente si es un*

*Clemente Rubio-Manzano. Departamento de Matemáticas, Universidad de Cádiz, España

†Clemente Rubio-Manzano, Tomás Lermanda, Christian Vidal y Alejandra Segura, Departamento de Sistemas de Información, Universidad del Bío-Bío, Chile

‡Claudia Martínez-Araneda. Departamento de Ingeniería Informática, Universidad Católica Santísima Concepción, Chile

jugador humano o un bot? Si no se puede distinguir, entonces se considera que el bot ha pasado el test ". Esta prueba se diseñó para evaluar las habilidades de los bots para suplantar a un jugador humano.

El test anterior se puede considerar una evaluación basada en el chequeo visual de una determinada funcionalidad. Este hecho tiene como principal limitación a la subjetividad del proceso porque la observación visual es una tarea compleja al requerir procesar una gran cantidad de información generada durante las partidas. Incluso, cabe la posibilidad, de perdida información debido a la rapidez de ejecución de los algoritmos de IA.

Nuestro trabajo consiste en enriquecer estos test alternativos para reducir la subjetividad mediante la captura de todos los datos posibles generados durante las partidas y entregar automáticamente un conjunto de descripciones lingüísticas en lenguaje natural que proporcionen información sobre el comportamiento de los agentes. Para ello, emplearemos la Descripción Lingüística de Fenómenos Complejos (DLFC)[14] y las Funciones de Equivalencia Restringidas (REFs, de sus siglas en inglés) [1]. En este sentido, el "comportamiento de un agente" está relacionado directamente con el comportamiento del algoritmo IA elegido para su implementación, en este caso, algoritmos de búsqueda en un espacio de estados.

La estructura del trabajo es como sigue, en la Sección II se realiza una introducción desde el punto de vista del proceso de enseñanza-aprendizaje al ser éste el fin último de su aplicación. La Sección III detalla un método para medir la credibilidad de los agentes implementados y comparar el comportamiento de los jugadores humanos con los agentes. Posteriormente, en la Sección IV se explica la experimentación y la evaluación implementadas sobre los proyectos de los estudiantes. Finalmente, la Sección de conclusiones y trabajo futuro proporciona algunas comentarios finales sobre el presente trabajo y el futuro del mismo.

II. Motivación

Desde el año 2011 se ha implementado una nueva metodología de enseñanza-aprendizaje basada en videojuegos en el curso de IA de la Universidad del Bío-Bío (Chile). Su objetivo es proporcionar a los estudiantes una herramienta de ayuda en el proceso de comprensión de los diferentes algoritmos heurísticos que se enseñan en las clases de teoría.

En particular, en el año 2017, el proyecto consistió en desarrollar un videojuego cuyo agente protagonista tenía que capturar un conjunto de recompensas (que proporcionan energía) distribuidas por el escenario. El agente, que pierde energía cada cinco segundos, debía mantenerse en el escenario durante el mayor tiempo posible sin agotar energía. Tres agentes adversarios (también programados por los estudiantes) tratarán de robarle la energía, en el caso de que ésta se agote la partida termina.

En este contexto, un agente (y su algoritmo de comportamiento asociado) está correctamente implementado cuando es capaz de imitar a un jugador experto humano (ver sección III) . El proceso de evaluación consiste en chequear la calidad de la imitación desde dos puntos de vista: visualmente, observando el comportamiento del agente artificial en una partida; formalmente, analizando el código del proyecto del alumno. Este proceso tiene algunas limitaciones:

1) Tiempo excesivo que se requiere para chequear de forma visual la funcionalidad de los proyectos. Se podría convertir en un problema cuando el número de estudiantes es alto y hay un único profesor.
2) Tarea compleja debido a la dificultad de evaluar un gran número parámetros importantes en el proyecto: cantidad (memoria utilizada, iteraciones realizadas, estructuras de datos usadas) y calidad (como es la IA, es decir, que habilidad tiene a la hora de realizar ciertas acciones)
3) Se pueden perder numerosos detalles en la inspección visual al transcurrir las partidas muy rápidamente: el depurador genera mucha información que es difícil de entender; gran cantidad de datos que se generan en la ejecución.
4) Imposibilidad (dificultad) de realizar una evaluación individual

Para superar estas limitaciones se propone incorporar la DLFC al proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura IA y, en particular, a su evaluación basada en proyectos. Utilizando DLFC los estudiantes pueden obtener retroalimentación inmediata, técnica y personalizada sobre los fallos cometidos durante el desarrollo de sus proyectos y conseguir más información sobre todos los detalles de ejecución de los algoritmos heurísticos empleados para programar los agentes inteligentes. En la literatura, existen trabajos que han estudiado la aplicación de la DLFC (y en la algunos casos de la Descripción Lingüística de Datos-LDD) al proceso de enseñanza-aprendizaje [9], [3], [2] y [12].

Por otro lado, esta propuesta es muy beneficiosa para los profesores ya que les permitirá:

- Ahorrar tiempo al permitirles centrarse en otros aspectos a evaluar lo que implicará un mejor entendimiento de la implementación de los algoritmos.
- Mejorar el proceso clásico de evaluación proporcionando retroalimentación personalizada a los estudiantes.
- Apoyar el desarrollo individual de proyectos al permitir un seguimiento más cercano y la oportunidad

de centrarse en los aspectos más debilidades de los estudiantes.

Con el fin de mostrar y explorar las posibilidades de esta herramienta se ha desarrollado una plataforma web y se ha incorporado al proceso de enseñanza aprendizaje de la asignatura. Ahora cada estudiante puede obtener, en tiempo real, retroalimentación sobre su proyecto, además establecer su propio plan de aprendizaje. Adicionalmente, los perfiles de comportamiento para tales agentes y jugadores humanos se pueden utilizar para medir la calidad de las IA mediante una adaptación del test Turing al contexto de los videojuegos.

III. Un método para medir la credibilidad de los agentes y compararlo con jugadores humanos

En esta sección se presenta un método para medir la credibilidad de los agentes basado en cuatro pasos.

Paso 1. Generación de la traza de ejecución.

Se ha empleado una traza de ejecución para capturar y almacenar los datos generados a partir de los movimientos de los humanos, agentes y oponentes. Una traza de ejecución es una técnica empleada habitualmente para capturar y almacenar los valores de las estructuras de datos empleadas en una aplicación. Se emplea, también, como herramienta de depuración y análisis del rendimiento.

Concretamente, la traza de ejecución implica la detección y almacenamiento de eventos relevantes durante la ejecución de un programa para posteriormente realizar un análisis más detallado. En particular, empleamos las trazas de ejecución para almacenar los valores de las métricas a partir de los cuales se pueden analizar el comportamiento de las entidades. Las métricas son las siguientes:

- Distancia entre jugador (P) y adversarios (O) calculada a partir de sus posiciones.
- Distancia entre jugador, adversarios y la recompensa más cercana ($R*$) calculada a partir de sus posiciones.
- Tiempo en llegar a la recompensa.
- Energía del jugador en cada momento.
- Memoria ocupada e iteraciones realizadas.

Paso 2. Definición de la red de percepciones computacionales

Ampliamos la red de percepciones computacionales presentada en [10]. En este caso, la energía, memoria ocupada e iteraciones realizadas se incorporan como nuevas variables. Se extiende la red, reglas y las plantillas de generación de lenguaje natural para soportar los nuevos requisitos.

Las variables lingüísticas se definen a partir de las métricas establecidas previamente. Mediante la agregación de los términos lingüísticos que componen cada una de las variables se definen las reglas de comportamiento. Por ejemplo, la percepción computacional (CP, de sus siglas en inglés) de situación ($CP_{Situation}$) quedaría definida de la siguiente forma:

$$CP_{Situation} = CP_{Protection}(P,O), CP_{Distance}(P,O), CP_{Energy}(P).$$

Esta ecuación establece que la CP de situación se calcula en función de la protección, la distancia entre el jugador-oponente y la energía del jugador. Los valores correspondientes para esta CP se calculan usando las siguientes reglas:

Consecuente (Situación)	Antecedente (Protección,Distancia,Energía)
Risky	Intermediate, Close, Normal
Dangerous	Low, Close, Normal
Safe	Intermediate, Normal, Normal
Easy	Low, Normal, Normal
Dangerous	Low, Normal, Low
Dangerous	Normal, Close, Low
Dangerous	Normal, Normal, Low

El resto de CPs se definen de forma análoga:

- $CP_{Attitude} = CP_{Distance}(P,R*), CP_{Distance}(O,R*)$
- $CP_{Movement} = CP_{Distance}(P,R*), CP_{Distance}(P,O), CP_{Enery}(P)$
- $CP_{Ability} = CP_{Attitude}, CP_{Movement}, CP_{Time}$
- $CP_{Skill} = CP_{Attitude}, CP_{Movement}, CP_{Situation}$
- $CP_{Resources} = CP_{Iterations}, CP_{Memory}$

Paso 3. Generación automática de los perfiles de comportamiento.

En cada periodo de tiempo (habitualmente cada segundo) se calculan los valores para cada una de las CPs instantáneas. Con el fin de agruparlas y resumirlas se emplea el concepto de CP Resumen, denotada por ΣCP y definida como $\Sigma CP = ((a_1,w_1),\ldots,(a_n,w_n))$. El objetivo de cada ΣCP es sintetizar en un vector lingüístico difuso el resultado global obtenido tras la partida para una CP. En nuestro caso, este tipo de CP nos permite obtener el número de veces que un valor $(a_1,\ldots,a_n)$ ocurrió durante la partida.

Estos tipos de CP nos proporcionan un conjunto de variables, su valor asociado y el grado α, que indica la media difusa para un valor determinado. Por ejemplo, un valor para la CP de Situación podría ser $Safe$ con un grado de 0.8 en un instante i, $X = Safe$ con 0.7 en un instante $i+1$, y etc. Por tanto, al final de la ejecución, tendremos que a_i (en el ejemplo "safe") se ha dado N veces con M grados diferentes $\beta_1,\ldots,\beta_m$ (por supuesto, algunos de

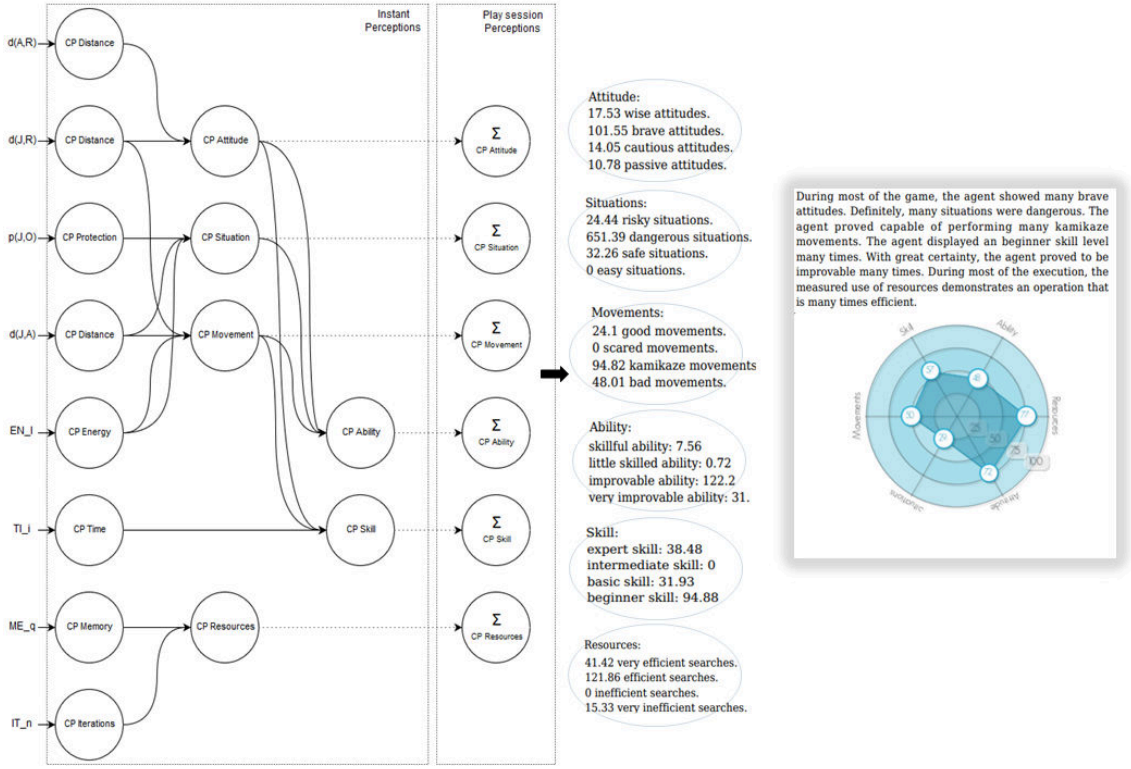


Fig. 1. Generación automática de informe de comportamiento a partir de los valores capturados en la traza de ejecución

estos grados podrían ser iguales). El grado final se calcula como sigue: $\alpha_i = ((\beta_1 + \ldots + \beta_n)/N)$.

Por ejemplo, los siguientes resúmenes pueden obtenerse a partir de diferentes ΣCP (ver Figura 1). La generación del perfil de comportamiento se realiza empleando el conjunto de ΣCP. Para cada CP se crea una descripción lingüística en función del par $(a_i, w_i) \in \Sigma CP$. Los porcentajes se calculan para cada. ΣCP. El porcentaje p_i se transforma en un término lingüístico de cantidad como sigue: "few" cuando $p_i \in [0, 1/3]$; "several" cuando $p_i \in [1/3, 2/3]$ o "many" cuando $p_i \in [2/3, 1]$. Entonces, vamos a considerar cuatro casos:

1) Existe un par $(a_i, p_i) \in \Sigma CP$ cuyo p_i es mayor o igual a 66 por ciento.
2) Existe un par $(a_i, p_i) \in \Sigma CP$ cuyo p_i es mayor o igual a 33 por ciento.
3) Existe dos pares $(a_1, p_1), (a_2, p_2) \in \Sigma CP$ cuyos p_i son mayor o igual a 33 por ciento.
4) No existe ningún par $(a_i, p_i) \in \Sigma CP$ cuyos p_i son mayor a 33 por ciento.

Y generar las siguientes descripciones en función de ellos. Mostramos aquí la tabla de CP de situación. El informe completo se puede ver en la Figura 2.

Casos	Descripción Lingüística
1	Definitely, *degree* situations were *value*
2	*degree* situations were *value*
3	*degree* situations were $value_1$, although *degree* situation also were $value_2$
4	Diverse situations were detected during the most part of the play session

Paso 4. Método para comparar perfiles de comportamiento entre jugadores humanos y agentes.

Como se ha mencionado en la introducción, uno de los objetivos más importantes en IA en el ámbito de los videojuegos es crear agentes que imiten la habilidad de un jugador humano. Por lo tanto, debemos definir la referencia de mejor jugador humano analizando las partidas y obteniendo un perfil de comportamiento referencia. Tras este proceso se obtuvo que:

- La actitud del jugador es valiente durante la mayor parte de la partida;
- Las situaciones por las que pasa son principalmente seguras;
- Los movimientos realizados son principalmente buenos;
- Se obtiene que es experto y hábil con un uso eficiente de tiempo y espacio.

Ahora, se puede proceder a la comparación de los mismos

mediante la definición de una medida de similitud basada en las funciones de equivalencia restringidas (REFs) entre las CPs Resumen obtenidas para cada caso.

Definición 3.1: Una REF, f, es una correspondencia $[0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ que satisface las siguientes condiciones:

1) $f(x,y) = f(y,x)$ para todo $x,y \in [0,1]$
2) $f(x,y) = 1$ si y sólo si $x = y$
3) $f(x,y) = 0$ si y sólo si $x = 1$ y $y = 0$ o $x = 0$ y $y = 1$
4) $f(x,y) = f(c(x),c(y))$ para todo $x,y \in [0,1]$, c siendo una negación fuerte.
5) Para todo x,y,z $\in [0,1]$, si $x \leq y \leq z$, entonces $f(x,y) \geq f(x,z)$ and $f(y,z) \geq f(x,z)$

Por ejemplo, $g(x,y) = 1-|x-y|$ satisface las condiciones (1)-(5) con $c(x) = 1-x$ para todo $x \in [0,1]$. Una medida de similitud basada en REFs entre dos términos lingüísticos para ampliar el motor de inferencia del lenguaje Bousi Prolog se propuso en [11].

Un algoritmo de IA, usado para implementar un agente, tiene un comportamiento cercano al jugador humano cuando sus respectivos perfiles de comportamiento son similares. La puntuación final (de 1 a 7) se calcula mediante una medida de similitud para cada CP. La ecuación para calcular el grado de credibilidad es la siguiente:

$$FG = G_{Min} + S(Actitud) + S(Situacin) + S(Movimiento) + S(Habilidad) + S(Competencia) + S(Eficiencia)$$

$G_{Min} = 1$ punto (mínimo puntuación que un alumno en la Universidad del Bío-Bío puede obtener). Donde $S(Attitude) = S_REF(\Sigma CP^{Human}_{Attitude}, \Sigma CP^{Bot}_{Attitude})$ es la similitud entre la actitud del jugador humano y la actitud del agente. El resto de relaciones de similitud se definen de forma análoga. La siguiente definición formaliza esta media:

Definición 3.2: Dadas dos percepciones computacionales ΣCP_i, ΣCP_j cuyos vectores de porcentajes lingüísticos son $\{(a_1,p_1)\ldots,(a_n,p_n)\}$ y $\{(b_1,q_1)\ldots,(b_n,q_n)\}$ respectivamente. Una medida de similitud entre ΣCP_i y ΣCP_j se define como

$$S_{REF}(\Sigma CP_i, \Sigma CP_i) = \sum_{i=0}^{n}(REF(p_i,q_i))/n$$

siendo $REF(p_i,q_i) = 1-|p_i-q_i|$

Por ejemplo, dadas dos CP Resumen $CP^{Humano}_{Actitud}$, $CP^{Agente}_{Actitud}$, entonces $\Sigma CP^{Humano}_{Actitud}$ = {(wise,122.35), (brave,289), (cautious,87.59), (passive, 8.75) } y $\Sigma CP^{Agente}_{Actitud}$ = {(wise,17.53), (brave,101.55), (cautious,14.05), (passive, 10.78) }. Entonces el vector de porcentaje lingüístico se calcula para cada ΣCP empleando los totales:

$Total_{\Sigma CP^{Humano}_{Actitud}}(507.69)$ $Total_{\Sigma CP^{Agente}_{Actitud}}(143.61)$, respectivamente:

- $\Sigma CP^{Human}_{Attitude}$ = {(wise,0.240), (brave,0.569), (cautious,0.172), (passive,0.017) }
- $\Sigma CP^{Bot}_{Attitude}$ = {(wise,0.122), (brave,0.709), (cautious,0.097), (passive,0.075) }

Ahora, la similitud $S_{REF}(\Sigma CP^{Human}_{Attitude}, \Sigma CP^{Bot}_{Attitude})$ se calcula con: $REF(0.240,0.122) = 1-|0.240-0.122| = 0.882$, $REF(0.569,0.172) = 1-|0.569-0.172| = 0.882$, $REF(0.172,0.097) = 1-|0.172-0.097| = 0.925$ y $REF(0.017,0.075) = 1-|0.017-0.075| = 0.942$ Por tanto, $S_{REF}(\Sigma CP^{Human}_{Attitude}, \Sigma CP^{Bot}_{Attitude}) = \frac{3.402}{4} = 0.838$. El resto de similitudes se calcula de forma similar. La puntuación final, junto al perfil de comportamiento obtenido para el jugador humano y el agente, proporciona al alumno una referencia sobre la calidad de los algoritmos implementados para los agentes actuando en el videojuego.

IV. Hacia una herramienta de apoyo a la docencia y el aprendizaje de algoritmos

Para llevar a cabo las ideas planteadas y definidas en las secciones anteriores se optó por el desarrollo una plataforma web que permite a cada estudiante obtener un informe de evaluación de forma automática que le proporcionará retroalimentación de forma inmediata sobre la calidad de implementación de sus agentes. La herramienta permite realizar una comparación entre el comportamiento de un jugador humano y los agentes desarrollados en los proyectos. De esta forma el alumno obtiene una nota de referencia de credibilidad de los mismos.

Esto puede verse como un test de turing permitiéndole testear a partir de las trazas de ejecución [1] que genera su proyecto un informe sobre el perfil de comportamiento de sus agentes inteligentes. A la herramienta se accede a través de la siguiente URL:

`http://www.youractionsdefineyou.com/assess`

La ventana principal muestra dos opciones: log in y register. El registro de un usuario consiste en introducir el correo electrónico, nombre de usuario, RUT (el equivalente al DNI español) y una clave. Para confirmar que el registro en la aplicación se ha realizado correctamente se enviará un correo electrónico al usuario. Una vez realizado el registro, el usuario puede ingresar introduciendo su usuario y clave. Una vez dentro de la aplicación, el informe de perfil de comportamiento se puede obtener seleccionando y cargando un archivo de traza de ejecución, cuando este archivo se carga el informe se obtiene automáticamente.

V. Agradecimientos

Al proyecto interno de la Universidad del Bío-Bío 170915

[1] http://youractionsdefineyou.com/assess/web/examples_traces

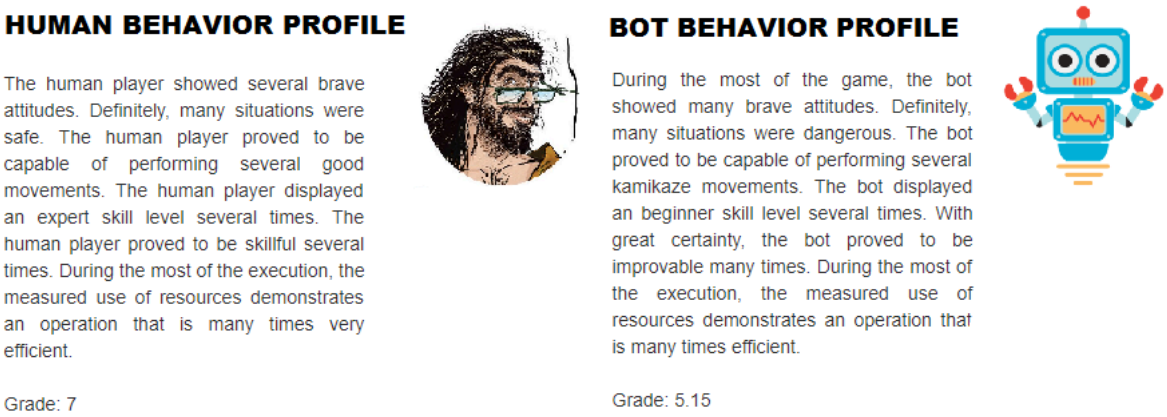


Fig. 2. Similitud entre los informes de comportamiento generados para el jugador humano y los agentes

2/R. Al grupo de investigación SOMOS (SOftware-MOdelling-Science) con referencia GI170315/EF

VI. Conclusiones y trabajo futuro

En este trabajo se ha tratado el tema de la evaluación de los sistemas de Inteligencia Artificial (fuerte y débil) en el ámbito de los videojuegos. Se ha planteado la idea de evaluar la "inteligencia humana" de los agentes artificiales y se ha presentado un método para medir la "credibilidad" de los mismos analizando su comportamiento y comparándolo con el de los jugadores humanos. El método permite obtener de forma automática un informe sobre el comportamiento del jugador humano que puede compararse con la del agente. Para ello, se ha definido una medida de similitud entre las percepciones computacionales resumen encargadas de capturar y sintetizar los eventos ocurridos durante las partidas.

Esta es una primera aproximación hacia un marco más amplio y aún queda mucho trabajo por hacer. Nos gustaría incorporar en un futuro más detalles que enriquezcan la evaluación de los proyectos. Permitir que el sistema pueda entregar recomendaciones más ricas y detalladas sobre los fallos cometidos por los alumnos durante el diseño e implementación de los algoritmos de Inteligencia Artificial.

References

[1] Bustice, H., Barrenechea, E., Pagola, M. Restricted Equivalence Functions. Fuzzy Sets and Systems 157, pp. 2333-2346 (2006).

[2] García-Honrado, I., Fortuny, J. M., Ferrer, M., Morera, L. (2016). Análisis del aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje generadas en la discusión en gran grupo de un problema de transformaciones geométricas Investigación en Educación Matemática XX, 253-264.

[3] Gkatzia, D., Hastie, H., Janarthanam, S., & Lemon, O. Generating student feedback from time-series data using Reinforcement Learning. In Proceedings of the 14th European Workshop on Natural Language Generation (pp. 115-124).

[4] Hernández-Orallo, J. (2017). Evaluation in artificial intelligence: from task-oriented to ability-oriented measurement. Artificial Intelligence Review, 48(3), 397-447.

[5] Hingston, P. (2009). A turing test for computer game bots. IEEE Transactions on Computational Intelligence and AI in Games, 1(3), 169-186.

[6] Livingstone, D. (2006). Turing's test and believable AI in games. Computers in Entertainment (CIE), 4(1), 6.

[7] López de Mantaras Badia, R., Mesenguer González, P. (2017) ¿Qué sabemos de? Inteligencia Artificial Editorial: CSIC y Catarata

[8] Phedes 2017 Phedes Lab: Linguistic Description of Complex Phenomena. http://phedes.com/

[9] Ramos-Soto, A., Vazquez-Barreiros, B., Bugarín, A., Gewerc, A., & Barro, S. Evaluation of a Data To Text System for Verbalizing a Learning Analytics Dashboard. International Journal of Intelligent Systems, 32(2), 177-193.

[10] Rubio-Manzano, C., & Trivino, G. Improving player experience in Computer Games by using players' behavior analysis and linguistic descriptions. International Journal of Human-Computer Studies, 95, 27-38.

[11] Rubio-Manzano, C. Similarity measure between linguistic terms by using restricted equivalence functions and its application to expert systems 9th European Symposium on Computational Intelligence and Mathematics. Faro (Portugal), October 4th-7th, 2017.

[12] Sánchez-Torrubia, M. G., Torres-Blanc, C., & Trivino, G. (2012). An approach to automatic learning assessment based on the computational theory of perceptions. Expert Systems with Applications, 39(15), 12177-12191.

[13] Soni, P. & Hingston, P. (2008, June). Bots trained to play like a human are more fun. In Neural Networks, 2008. IJCNN 2008.(IEEE World Congress on Computational Intelligence). IEEE International Joint Conference on (pp. 363-369). IEEE.

[14] Trivino, G & Sugeno, M. Towards linguistic descriptions of phenomena. International Journal of Approximate Reasoning, 54(1), 22-34.

Statistical Language Modelling for Automatic Story Generation

Marta Vicente, Cristina Barros and Elena Lloret
University of Alicante
{mvicente,cbarros,elloret}@dlsi.ua.es

***Abstract*—This abstract summarises the research work published in the Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, vol. 34 (5), 2018. In this publication, we proposed and analysed an end-to-end Natural Language Generation approach to automatically create fiction stories using statistical language models, both in the macroplanning and surface realisation stages. The results obtained from the evaluation conducted showed that the combination of the aforementioned stages in an end-to-end approach was appropriate and had positive effects in the resulting generated text. Specifically, the use of language models allows the generation task to be more flexible, as far as the adaptation of the approach to different languages, domains and textual genres is concerned.**

I. Introduction

The generation of stories is a difficult task in which complex cognitive processes are involved. The process of creating a story requires both knowledge of the world and ability to perform tasks such as planning events or resolving situations [8]. Natural Language Generation (NLG), as a subarea of Natural Language Processing, can provide, in turn, useful mechanisms to create a story automatically. In order to generate a text, the responsibilities of NLG include, to determine *"what to say"* and *"how to say it"*. This dual purpose can be addressed as a pipeline of two stages: macroplanning and surface realisation. Macroplanning is in charge of determining the structure of the text to be produced, as well as deciding the content it will have. Surface realisation is focused on taking that content as input, and transforming it into human language, using the appropriate vocabulary, syntactic structures, etc.

In this research work, we studied the problem of whether a story could be automatically generated from scratch without having any clue about the characters, topics, or facts to describe, just having some previous information from other existing stories that could serve as an inspiration source.

To achieve this, a statistical perspective was adopted. Specifically, macroplanning was addressed using Positional Language Models (PLM) while, in the surface realisation stage, Factored Language Models (FLM) were employed. As output, the approach produced a set of sentences in the form of a story, inspired by the structure and linguistic elements of an existing one, but with a different realisation (different events, actions and vocabulary).

The preliminary results showed that statistical language models can definitely contribute to the development of more adaptive and flexible story generation systems, thus providing mechanisms that can be extended to other kind of domains, languages and textual genres.

II. Background

Recent work in narrative and storytelling has been focused on regenerating stories from graphs of intentions [4] or approaching the task working with discourse and story planning simultaneously to differentiate levels of narrative [9]. Regarding the statistical models used in this research, on the one hand, PLMs have been successfully employed in some language-related areas such as summarisation [2] or information retrieval [5]. However, they have not been directly implemented within the generation framework. Also, in recent years, FLM have been employed for NLG, such in BAGEL [6] or in [7]. The main novelty of our approach is that human intervention in the NLG process is not necessary at any stage, so we avoid the hand-coding of the story constraints, and we increase the automation of the generation process.

III. End-to-end story generation approach

The NLG approach consists of a macroplanning and a surface realisation stage that are sequentially executed.

A. Macroplanning.

In the NLG process, macroplanning is responsible for both selecting the content and providing the structure that articulates the output.

Different from the common bag-of-words perspective, PLMs are able to take into account the positions of words together with the number of their occurrences. On this basis, for each position *i* of a text, we computed a model $P(w \mid i)$ by which every word *w* of the vocabulary gets a value for that location *i* conditioned by the distance to other appearances of that word within the text.

Using this model, we could obtain the distribution of the elements along the text, considering those with higher values the most relevant ones. We translated this information into a document plan.

B. Surface realisation.

From the document plan provided by the macroplanning stage, the realisation of the final output was performed relying on FLMs. For this type of models, a word w is seen as a collection of K parallel factors, they can be any linguistic feature related to the word, from whose combination a statistical model is built.

We used over-generation and ranking, where a set of candidate sentences is generated and ranked according to the probabilities given by the model. We took into account a simple grammar and prioritised the information specified in the document plan to select the words belonging to each candidate.

IV. Experimental scenario

Some experiments were conducted to analyse the performance of the approach. Each stage was empirically adjusted to achieve an optimal configuration and afterwards, a subset of the corpora was used to produce the document plans. The surface realisation module generated from them the final stories. In this research work, from each document plan only one story was generated.

Regarding the macroplanning, some decisions were made about the vocabulary and the design of the document plan itself. The vocabulary was formed by synsets in order to incorporate grammatical and semantic features to the process and, to conform the document plan, we produced one line per each sentence of the source text, containing synsets of verbs, nouns, adjectives and adverbs.

Once the document plans were created, the surface realisation was in charge of generating the final stories following the guidelines the plans had established while being also consistent with the grammar.

We worked with a collection of English children stories, including the Lobo and Matos corpus [3] and automatically gathered stories[1] from *Bedtime stories* and *Hans Christian Andersen: Fairy Tales and Stories*.

V. Evaluation, results and discussion

In order to evaluate how the document plan impacted in the generated text as well as the quality of the generated fiction story, we performed two tests.

On the one hand, we evaluated how the synsets and their distribution in the document plan were reflected in the resulting stories. To estimate the influence of the document plan in the generation of the new tales, we analysed the relation between both documents, measuring how the elements were shared.

On the other hand, a user evaluation was performed to analyse the general problems and errors of the approach. We used a point score scale, and three users manually read and analysed a set of stories in order to assess the system performance and provide feedback based on the detection of problems. They shed light on the limitations of our approach.

At a word level, the users highlighted the appropriate variety and richness of the vocabulary. Even though, for some examples they remarked that it would be adequate to use more synonyms, in order to prevent finding consecutive sentences repeating exactly the same terms.

At a sentence level, the evaluation revealed that, independently of the relation with their neighbours, sentences, in general, would become more meaningful once inflected. To understand why some excerpts present an oddly shape, we should attend to the grammar beneath, on the one side, and to the semantic aspect, on the other.

Thirdly, at the level of discourse, adapted to our defined framework, the users were able to identify themes and guiding threads. They also noted the presence of characters as being involved in possible actions. They stated that the repetition of elements was essential to detect those underlying features. This reinforces our initial consideration regarding the relevance of a proper distribution of the elements through the text. Along with these comments, the users indicated that in some of the examples the absence of enough information impeded the assumption of any of those elements (themes, characters), but mostly this difficulty was related to the semantics of the generated tales.

[1] https://freestoriesforkids.com/, http://hca.gilead.org.il/

VI. Conclusion

This paper proposed and evaluated a novel end-to-end NLG approach for generating fiction stories that integrates the macroplanning and the surface realisation stages within a statistical framework.

Evaluation showed that all the sentences generated by the approach contained elements from the document plan, 81% of the sentences having at least one of the highest rated elements. Furthermore, as there were not only one type of element within the document plan, on average, 83% of the content of each generated tale came from the document plan. Concerning the results of the user evaluation, we received positive feedback from 47% of the generated stories. We consider these results to be an indicator of the positive effects of combining the two stages (i.e. macroplanning and surface realisation).

Although the results are still preliminary, there are some issues which need to be improved and some interesting research lines opening new directions for future work.

Acknowledgment

Funded by the Generalitat Valenciana (ACIF/2016/501) and Spanish Government (TIN2015-65100-R,TIN2015-65136-C2-2-R).

References

[1] C. Baker, C.J. Fillmore, and J.B. Lowe, *The Berkeley FrameNet Project*, in: Procs. of the 36th Meeting of the ACL – Volume 1,1998, 86–90.
[2] S. Liu et al, *Positional Language Modelling for Extractive Broadcast News Speech Summarization*, in: INTERSPEECH,2015, 2729–33.
[3] P.V. Lobo, and D.M. De Matos, *Fairy Tale Corpus Organization Using Latent Semantic Mapping and an Item-to-Item Top-N Recommendation Algorithm*, in: LREC,2010.
[4] S.M. Lukin, L.I. Reed and M.A. Walker, *Generating Sentence Planning Variations for Story Telling*, in: 16th SIGdial,2015,188.
[5] Y. Lv, Yuanhua, and C. Zhai, *Positional Language Models for Information Retrieval*, in: Procs. of the 32Nd ACM SIGIR, New York,2009, 299–306.
[6] F. Mairesse and S. Young, *Stochastic Language Generation in Dialogue Using Factored Language Models*, Computational Linguistics, 40(4),2014,763–99.
[7] E.M. Novais, and I. Paraboni, *Portuguese Text Generation Using Factored Language Models*, Journal of the Brazilian Computer Society 19(2),2012,135–46.
[8] S.R. Turner, *Minstrel: A Computer Model of Creativity and Storytelling*, Ph.D. Dissertation. University of California at Los Angeles, 1993.
[9] D.R. Winer and R.M. Young, *Discourse-Driven Narrative Generation with Bipartite Planning*, in: The 9th INLG,2016, 11–20.

XIX Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy (XIX ESTYLF)

ESTYLF 12: Sesión Especial Soft Computing y Generación del Lenguaje Natural II

Organizadores:

Alberto Bugarín, Nicolás Marín,
Alejandro Ramos, Daniel Sánchez

Descripciones lingüísticas de datos de observación meteorológica usando temple simulado

Andrea Cascallar Fuentes, Alejandro Ramos Soto, Alberto J. Bugarín Diz
{andrea.cascallar.fuentes, alejandro.ramos, alberto.bugarin.diz}@usc.es
Centro Singular de Investigación en Tecnoloxías da Información (CiTIUS), Universidade de Santiago de Compostela

***Resumen*—En este trabajo presentamos una aproximación para la generación de descripciones lingüísticas en tiempo real sobre datos de observación meteorológica proporcionados por la Agencia Meteorológica gallega (MeteoGalicia). Las descripciones son sentencias cuantificadas borrosas, que incluyen referencias geográficas imprecisas, y resultan válidas para la etapa de determinación de contenidos de un sistema de Generación de Lenguaje Natural. La generación de las descripciones va guiada por la metaheurística Temple Simulado, que permite seleccionar las descripciones lingüísticas más adecuadas, de acuerdo con un conjunto de criterios objetivos.**

***Index Terms*—Descripciones lingüísticas de datos, Generación de lenguaje natural, Computación con palabras.**

I. Introducción

Ante la ingente cantidad de datos presente actualmente en todas las facetas de la vida, la Inteligencia Artificial provee herramientas que permiten analizar conjuntos de datos con la finalidad de extraer información útil y comprensible para usuarios y expertos, basada en el potencial del lenguaje humano. Por ejemplo, la generación de lenguaje natural (NLG, en inglés) se ocupa de la generación de texto a partir de diversas fuentes de datos [1]. Dentro de este campo son de interés los sistemas *data-to-text* (D2T) [2], que generan textos a partir de conjuntos o series de datos numéricos o simbólicos.

De forma complementaria a los sistemas D2T, las descripciones lingüísticas de datos (LDD, en inglés) proporcionan mecanismos para obtener resúmenes sintéticos de conjuntos de datos numéricos, generalmente basados en el uso de sentencias cuantificadas borrosas [3]. Este tipo de aproximaciones, surgidas a partir del concepto de protoforma definido por Zadeh [4], permiten modelar la imprecisión de los términos lingüísticos inherente al lenguaje humano, aunque su uso en sistemas reales es muy limitada por el momento [5]. Según sus componentes, existen dos tipos de protoformas: tipo I ("Q Y son S") donde Q es un cuantificador, Y es un conjunto de elementos y S es un resumen; y tipo II ("Q KY son S") donde además de los componentes presentes en las de tipo I se añade un calificador K.

Es precisamente en la faceta aplicada de LDD donde se centra el objetivo de este trabajo: la generación de descripciones lingüísticas mediante temple simulado [6] sobre datos meteorológicos en tiempo real proporcionados por MeteoGalicia [7] para el conjunto de los 314 municipios de Galicia, introduciendo además el uso de referencias geográficas.

II. Trabajos relacionados

Actualmente, existen numerosos sistemas NLG, de los cuales una gran mayoría lo componen sistemas D2T [1], [8], [9]. Por ejemplo, uno de los sistemas de mayor impacto en el ámbito de la salud es el sistema BT45, dentro del proyecto BabyTalk [10], que genera informes a partir de datos recogidos durante 45 minutos sobre bebés que se encuentran en la UCI.

En el campo de LDD, la mayor parte de aproximaciones propuestas generan sentencias cuantificadas como "La mayoría de las personas son altas" (tipo I) o "La mayoría de las personas altas son rubias" (tipo II) [3], [9], [11]. Este tipo de propuestas se han aplicado a una gran variedad de casos de uso, principalmente sobre series de datos temporales, como datos de consumo energético [12], fondos de inversión [13], actividad física [14], [15] o el flujo de pacientes en hospitales [16], entre otros. En ámbitos de aplicación real, GALiWeather [5] es un sistema D2T meteorológico que emplea LDD para ciertas tareas de extracción de información, lo que ejemplifica la complementariedad que existe entre ambas disciplinas.

Otro aspecto importante en este campo es la utilización de estrategias de búsqueda, tanto heurísticas [5], [16] como basadas en algoritmos genéticos [17]–[19], para la obtención de sentencias cuantificadas con un nivel de calidad descriptiva suficiente, en problemas donde su número es demasiado grande como para obtenerlas exhaustivamente en su totalidad.

III. Motivación

Nuestro caso de uso consiste en datos de observación meteorológica proporcionados en tiempo cuasi real por MeteoGalicia [7] para las variables estado del cielo, viento y temperatura. Dada la alta frecuencia de actualización de dichos datos, aproximadamente a cada hora, se justifica la necesidad de generar descripciones en el menor tiempo posible. Además, dado que dichos datos se encuentran caracterizados geográficamente, las descripciones en nuestra propuesta contemplan también la inclusión de referencias geográficas vagas como "norte" o "este".

Concretamente, nuestra solución genera descripciones lingüísticas basadas en proposiciones cuantificadas de tipo I, donde Q es un cuantificador, X es una variable lingüística definida a partir de las variables meteorológicas y A es uno de sus valores ("En algunos ayuntamientos el cielo está despejado"); y II donde se añade un descriptor geográfico ("En algunos ayuntamientos en el Norte el cielo está despejado"), que pueden incluir una o más variables meteorológicas.

En nuestro caso, la cantidad de datos disponibles y la necesidad de disponer de una solución computacionalmente poco costosa para la obtención de las descripciones, debido a las restricciones temporales que se deben cumplir, aconsejan la utilización de una estrategia de búsqueda más simple que las de tipo evolutivo comentadas anteriormente. Por ello, proponemos utilizar la metaheurística temple simulado, de muy reducido coste computacional y que ha sido utilizada para abordar diversos problemas [20] [21], obteniendo buenas soluciones en comparación con otras metaheurísticas.

IV. Generación de descripciones meteorológicas

La solución propuesta utiliza datos numéricos para generar descripciones de observación meteorológica en tiempo real de la comunidad autónoma de Galicia.

MeteoGalicia ofrece un servicio web que muestra datos de observación sobre el estado meteorológico actual de los ayuntamientos gallegos [7], actualizados aproximadamente cada hora.

IV-A. Conocimiento del dominio

En base a las variables meteorológicas, se definen las siguientes variables lingüísticas:

- Estado del cielo: sus valores son códigos numéricos que categorizan el la cobertura nubosa y el nivel de precipitación. A partir de esta variable se crea una variable lingüística con el mismo nombre definida del mismo modo.
- Viento: los posibles valores son códigos numéricos que codifican intensidad y dirección del viento. A partir de esta variable se crea una variable lingüística con el mismo nombre que respeta la definición original.
- Temperatura: se crean dos variables lingüísticas, una para las temperaturas máximas y otra para las mínimas. La temperatura actual de un ayuntamiento se compara con las máximas y las mínimas del mes actual del registro de datos históricos. Para la temperatura actual de cada ayuntamiento t_i, las etiquetas que toman las variables lingüísticas se calculan utilizando la media $\bar{x}$ y la desviación típica σ del mes actual de los datos históricos.
  Las protoformas tipo I, siguen la plantilla "En Q ayuntamientos A", donde Q es un cuantificador y A puede ser una o varias de las estructuras definidas en la Tabla I ("En pocos ayuntamientos el estado del cielo es soleado y la temperatura es baja con respecto a las máximas y normal con respecto a las mínimas"). Se han definido siete cuantificadores borrosos ("ninguno", "pocos", "algunos", "aproximadamente la mitad", "bastantes", "casi todos", "todos"), sobre el porcentaje de ayuntamientos (PA) que verifican la sentencia.
  Las protoformas tipo II siguen la plantilla "En Q ayuntamientos en G A", donde Q y A son como en el caso anterior y G es un descriptor geográfico ("En algunos ayuntamientos del Sur el estado del cielo es soleado").

Los descriptores geográficos, definidos de forma borrosa, son {Norte, Sur, Este, Oeste, Centro} definidos de la siguiente forma:

- Sur: definido mediante el conjunto borroso trapezoidal de soporte [41.75, 42.57] y núcleo [41.75, 42.16]
- CentroLatitud: definido mediante el conjunto borroso trapezoidal de soporte [42.16, 43.39] y núcleo [42.57, 42.98]
- Norte: definido mediante el conjunto borroso trapezoidal de soporte [42.98, 43.8] y núcleo [43.39, 43.8]
- Oeste: definido mediante el conjunto borroso trapezoidal de soporte [-9.31, -8.266] y núcleo [-9.31, -8.788]
- CentroLongitud: definido mediante el conjunto borroso trapezoidal de soporte [-8.788, -7.222] y núcleo [-8.266, -7.744]
- Este: definido mediante el conjunto borroso trapezoidal de soporte [-7.744, -6.7] y núcleo [-7.222, -6.7]

Para considerar la parte geográfica de la descripción tenemos datos meteorológicos geolocalizados, es decir, se dispone de la localización de cada ayuntamiento. Para cada localización se toma la etiqueta que mejor la representa calculando el grado de cumplimiento aplicando el modelo de cuantificación de Zadeh.

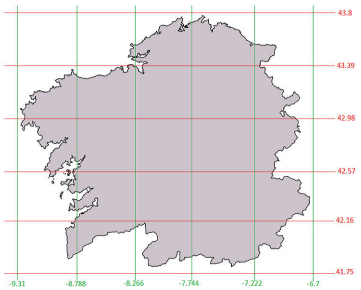


Figura 1: Coordenadas de referencia para la definición de los descriptores geográficos.

Tabla I: Plantillas de texto

Variable lingüística	**Plantilla**
Estado del cielo	el estado del cielo es <valor>
Viento	el viento tiene dirección <valor_dirección> e intensidad <valor_intensidad>
Temperatura	la temperatura es <valor_máx> con respecto a las máximas y <valor_min> con respecto a las mínimas

IV-B. Generación de descripciones lingüísticas

Debido a que el objetivo de nuestra solución es generar sentencias que describan la situación meteorológica en tiempo real, y que la gran mayoría de estaciones meteorológicas sirven datos diezminutales, hemos fijado como restricción que el tiempo de ejecución para la obtención de las descripciones no supere los 5 minutos[1]. Esto se debe a que nuestra solución

[1]Pruebas ejecutadas en un Intel Core i7-6700HQ @2.60GHz 2.59GHz con 16 GB de RAM

se centra en la fase de determinación de contenido de un sistema NLG, por lo tanto, a la hora de abordar las demás fases para desarrollar un sistema completo, el tiempo de ejecución necesario será mayor. Por esta razón y teniendo en cuenta que se busca describir el estado actual en tiempo real, a partir de la versión base hemos introducido una serie de optimizaciones.

En primer lugar, para cada ayuntamiento se calcula el grado de cumplimiento de su temperatura actual con respecto a las etiquetas que pueden tomar las dos variables lingüísticas. Para realizar este cálculo, utilizando el valor de la media y la desviación típica, para cada ayuntamiento se guarda el grado de cumplimiento para cada una de las etiquetas definidas en la Sección III. Además, para cada posible valor de la variable "temperatura" L, se calcula el grado de pertenencia del conjunto de ayuntamientos como se muestra en la expresión 1 siendo n el número de ayuntamientos, μ_L la función que evalúa el grado de cumplimiento y t_i la temperatura actual de cada ayuntamiento.

$$\mu(L) = \frac{\sum_{i=1}^{|n|} \mu_L(t_i)}{n} \tag{1}$$

IV-B1. Generación de sentencias tipo I: Esta parte del sistema se centra en generar las sentencias de tipo I a partir de los datos obtenidos.

Versión inicial. Genera todas las sentencias posibles y, para cada una de ellas, se calcula su grado de cumplimiento. Este cálculo se realiza de forma diferente si la sentencia contiene una única variable lingüística o si está compuesta por más de una.

Para las descripciones D donde solo se describe una variable se aplica el modelo de cuantificación de Zadeh. En el caso de las variables "crisp" el grado de cumplimiento es 1 si el valor actual v_i coincide con la etiqueta S y 0 en caso contrario.

$$\mu(Q\ X\ son\ A) = Q(\frac{\sum_{i=1}^{|n|} \mu_S(v_i)}{n}) \tag{2}$$

Para las descripciones D donde se describe más de una variable, debemos aplicar, siguiendo nuevamente el modelo de cuantificación de Zadeh, la conjunción de todas las variables, utilizando la t-norma mínimo:

$$\mu(Q\ X\ son\ A) = Q(\frac{\sum_{i=1}^{|n|} \mu_{S1}(v_{S1i}) \cap ... \cap \mu_{Sm}(v_{Smi})}{n}) \tag{3}$$

Al ejecutar esta versión se obtiene un total de 63.875 descripciones y la ejecución tarda en completarse aproximadamente 35 minutos.

Optimización 1. La versión anterior no cumple la restricción, por lo tanto es necesario optimizarla.

Por muy diversas que sean las condiciones meteorológicas, no se van a dar todos los posibles valores para las variables contempladas. Esto es debido, en parte, al tamaño reducido de esta región.

Para reducir el coste temporal que supone generar todas las posibles combinaciones, se propone implementar una optimización que descarte los valores no presentes en el panorama actual. De este modo se reduce notoriamente el tiempo necesario para completar una ejecución. El tiempo necesario para obtener las descripciones varía entre 50 y 60 segundos y se obtienen alrededor de 2000. Además, eliminando situaciones meteorológicas que no están presentes se obtienen descripciones más representativas del mapa.

Mejores soluciones. Aplicando esta optimización se consigue una mejora notoria, sin embargo, los resultados obtenidos no son suficientemente representativos. Para solucionar este problema se proponen las siguientes mejoras:

- Eliminar descripciones "Ninguno": este cuantificador es útil en cuanto que aísla las descripciones que no se cumplen, sin embargo, éstas no son, en general, útiles para el usuario, por lo tanto, se descartan.
- Umbral en el grado de cumplimiento: algunas sentencias describen casos poco relevantes, esto es, tienen un grado de cumplimiento muy bajo. Para evitar esta situación se define un umbral $u = 0{,}5$ eliminando aquellas sentencias que tengan un grado de cumplimiento inferior.
- Ordenación: para evaluar las descripciones se propone utilizar dos criterios además del grado de cumplimiento: cobertura del cuantificador, prefiriendo sentencias que abarquen mayor extensión y así evitar describir una misma situación mediante varias sentencias referidas a extensiones más reducidas; y tamaño de la sentencia, prefiriendo sentencias que comprendan un número mayor de variables, ya que de esta forma se reduce el número de sentencias y estas son más específicas. Las sentencias se ordenan según los criterios descritos anteriormente, priorizados por el siguiente orden: grado de cumplimiento, cobertura del cuantificador y longitud de la sentencia. Una excepción en dicho orden son las descripciones del cuantificador "Pocos", que se sitúan después de las de cuantificadores con mayor cobertura de modo que, aunque según la ordenación indicada podrían ser seleccionadas en detrimento de algunas sentencias con mayor cobertura, se colocan después de modo que el usuario obtenga información más general y pueda acceder a éstas si necesita más grado de detalle.

Una vez que se han aplicado estas mejoras, se define un número máximo de descripciones que se van a mostrar ya que un número elevado de descripciones puede provocar que el texto generado no sea útil para el usuario.

En la Tabla II se muestra una comparativa entre las diferentes versiones.

Tabla II: Resumen versiones tipo I

Versión	Tamaño solución	Tiempo de ejecución
Inicial	63875	∼35 minutos
Optimización 1	∼2000	50-60 segundos
Mejores soluciones	un máximo de 100	50-60 segundos

IV-B2. Generación de sentencias tipo II: Se parte de una versión inicial, donde se generan todas las combinaciones posibles, y a partir de ahí se proponen optimizaciones.

Para esta descripciones hay que calcular, para cada ayuntamiento, los grados de pertenencia con respecto a los descriptores geográficos. Este cálculo se realiza utilizando la coordenada correspondiente y calculado su grado de cumplimiento. Los cálculos para "Centro" difieren del resto ya que está formado por dos componentes. El proceso es el siguiente: para cada ayuntamiento se calcula el grado de cumplimiento para cada coordenada, se aplica la t-norma mínimo entre estos dos valores y al valor resultante se le aplica el descriptor geográfico, calculando el grado de cumplimiento.

$$\mu_{Centro(longitud_i,latitud_i)} = \mu_{CentroLongitud(longitud_i)} \cap \mu_{CentroLatitud(latitud_i)} \quad (4)$$

Versión inicial. Genera todas las sentencias posibles y, para cada una de ellas, se calcula su grado de cumplimiento con la finalidad de saber cuáles son las descripciones más representativas.

$$\mu(Q\ X\ son\ A\ en\ G) = Q(\frac{\sum_{i=1}^{|n|} \mu_G(x_i) \cap \mu_{S1}(x_i) \cap ... \cap \mu_{Sm}(x_i)}{\sum_{i=1}^{|n|}(\mu_G(x_i))}) \quad (5)$$

Para obtener todas las descripciones, el sistema necesita aproximadamente 3 días y se generan 1094170 descripciones, incumpliendo la restricción temporal.

Optimización 1. La primera optimización es eliminar los valores no presentes, como en las de tipo I, reduciendo el coste temporal a aproximadamente 8 horas y obteniendo alrededor de 13000 descripciones.

V. Algoritmo de búsqueda meta-heurístico

Debido a la elevada cantidad de descripciones que se generan de tipo II y al coste temporal que esto supone, se propone el uso de un algoritmo de búsqueda metaheurística para la extracción de información relevante consumiendo menos recursos.

En general, los algoritmos basados en poblaciones no parecen la mejor opción para este caso. Los algoritmos metaheurísticos basados en métodos constructivos tampoco son una buena opción ya que, en este caso, la solución inicial debe tener un mínimo de componentes. Las soluciones basadas en trayectorias pueden aplicarse en este caso, ya que utilizan una heurística de búsqueda local que explora posibles soluciones siguiendo una trayectoria en el espacio de búsqueda. Realizando un análisis de los algoritmos más utilizados se concluye que el Temple Simulado [6] es una buena alternativa. Es un algoritmo de búsqueda por entornos con un criterio probabilístico de aceptación de soluciones inspirado en la Termodinámica. En cada iteración se genera un determinado número de vecinos, con cierta probabilidad de aceptar soluciones peores para evitar que el algoritmo no se estanca en un óptimo local.

Este algoritmo cuenta con una serie de parámetros configurables de modo que, realizando un estudio empírico, se puedan establecer valores que obtengan resultados de calidad. A continuación se muestran los valores establecidos después de realizar el estudio.

- Valor inicial del parámetro de control T_0: esta variable se debe inicializar a un valor suficientemente alto ya que, si es muy bajo converge demasiado rápido y si es muy alto tarda en converger. Después de experimentar con diversos valores se inicializa con un valor proporcional al número máximo de descripciones posible, tomando como parámetros $\mu = 0{,}01$ y $\phi = 0{,}999$.

$$T_0 = (\mu / -\ln(\phi))/MAX_SOLUCIONES \quad (6)$$

- Solución inicial S_0: después de probar diversas alternativas, S_0 se inicializa con la mejor sentencia formada por una única variable lingüística obtenida aplicando los criterios de evaluación descritos anteriormente.
- Nueva solución: la forma de generar una nueva solución es modificar [1, 4] componentes aleatoriamente. Con este método en ocasiones el algoritmo se queda estancado, para solucionar esto, se define un parámetro $maxRepeated$, que define el número máximo de soluciones repetidas en una iteración. Si se alcanza este valor, se genera una nueva solución completamente aleatoria, evitando el estancamiento.
- Velocidad y mecanismo de enfriamiento: $MAX_CANDIDATAS = 300$ y $MAX_ACEPTADAS = 30$ se consigue un buen balance en cuanto a soluciones peores aceptadas y la velocidad de enfriamiento. En cuanto al mecanismo de enfriamiento, se utiliza el Esquema de Cauchy.
- Condición de parada: después de experimentar con otras alternativas que no se adecúan a este problema, se experimenta con una condición de parada que está formada por dos condiciones: número máximo de iteraciones y máximo de intentos fallidos de generar nuevas soluciones para cada iteración. Para esto se definen dos parámetros: $MAX_ITER = 2300$, que establece el número máximo de iteraciones que el algoritmo puede hacer y $MAX_NEIGHBOUR_ATTEMPTS = 2000$, que define el número máximo de intentos de generar una nueva solución candidata en una iteración.
- Condición de aceptación: realizamos una experimentación con diferentes opciones concluyendo que la que mejor resultados ofrece es la expresión 7, donde se da preferencia al grado de cumplimiento, aceptando las nuevas soluciones que mejoren el de la actual, y a la cobertura, aceptando soluciones con mayor cobertura aunque el grado de cumplimiento sea inferior.

$$\begin{aligned}(cobertura(S_{cand}) <= cobertura(S_{act})\ \&\&\\ \mu(S_{cand}) >= \mu(S_{act})\ \&\&\ \mu(S_{cand} > 0))\ ||\\ (cobertura(S_{cand}) > cobertura(S_{act})\ \&\&\\ \mu(S_{cand} > 0))\ ||\ (\mu(S_{cand} > 0))\ \&\&\\ aleatorio < e^{-\delta/T_k})\end{aligned} \quad (7)$$

A esta configuración se le aplican las mismas optimizaciones que en las descripciones de tipo I descritas en la Sección IV-B1:

Aplicando este algoritmo, el tiempo de ejecución es de aproximadamente 2 minutos y el conjunto de descripciones que se muestra tiene un tamaño de aproximadamente 400 sentencias ofreciendo una descripción representativa del estado meteorológico.

Tabla III: Resumen versiones tipo II

Versión	Tamaño solución	Tiempo de ejecución
Inicial	1094170	3 días
Optimización 1	∼13000	∼8 horas
SA	∼400	∼2 minutos

VI. Evaluación

Para evaluar el grado de adecuación de las descripciones a diferentes casos hemos generado cuatro mapas, en cada uno de los cuales se representa el estado de una de las variables (estado del cielo, viento, temperatura máxima y temperatura mínima). Se representa un meteoro por cada uno de los 314 ayuntamientos de Galicia.

Para las variables "estado del cielo" y "viento" los mapas se construyen utilizando los iconos que ofrece MeteoGalicia. Para los componentes de la variable "temperatura" se utilizan los siguientes códigos que representan las posibles etiquetas de la variable lingüística "temperatura": "MB" para "muy baja", "B" para "baja", "N" para "normal", "A" para "alta" y "MA" para "muy alta". Cada uno de estos códigos tiene un color desde azul oscuro para "MB" hasta rojo para "MA". Debido al elevado número de iconos, interpretar correctamente la información visual es una tarea difícil.

En las tablas IV y V se muestran las mejores descripciones con respecto a los mapas que se muestran en la Figura 2. Estas descripciones son las 10 mejores obtenidas en cada caso después de ordenarlas siguiendo los tres criterios, descritos en IV-B1. Aunque las descripciones de tipo I proporcionan una idea general sobre el estado meteorológico, por sí solas no son suficientemente informativas. En este sentido, las descripciones de tipo II son de mayor utilidad ya que, al centrarse en regiones más pequeñas tienen en cuenta situaciones que las de tipo I no consideran precisamente por su carácter general.

Para comprobar la calidad de las descripciones se han realizado 20 ejecuciones en momentos del día diferentes durante dos semanas. Las descripciones de tipo I siempre obtuvieron buenos resultados en cuanto a que describen la situación meteorológica informando sobre los valores de las variables meteorológicas que más se repiten. Las descripciones de tipo II, en general también obtuvieron resultados representativos salvo en casos en los que un fenómeno ocurre en un área muy pequeña debido a la definición demasiado amplia del descriptor geográfico (por ejemplo cielos soleados en toda la región salvo en el extremo Norte de Galicia donde está "muy nublado") de modo que no ocupa una posición relevante en el conjunto de soluciones resultante.

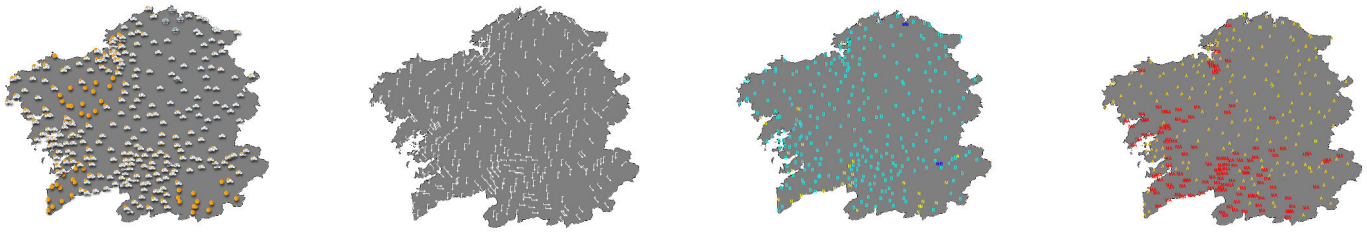
Tabla IV: Mejores 10 descripciones tipo I para 15 de septiembre a las 17:00 (Figura 2).

Descripción
En aproximadamente la mitad de ayuntamientos el estado del cielo es muy nublado
En aproximadamente la mitad de ayuntamientos el viento tiene dirección Norte e intensidad baja
En algunos ayuntamientos el cielo está muy nublado y la temperatura es baja con respecto a las máximas y alta con respecto a las mínimas
En algunos ayuntamientos el viento tiene dirección Norte e intensidad baja y la temperatura es baja con respecto a las máximas y alta con respecto a las mínimas
En algunos ayuntamientos la temperatura es baja con respecto a las máximas y muy alta con respecto a las mínimas
En bastantes ayuntamientos la temperatura es baja con respecto a las máximas y alta con respecto a las mínimas
En algunos ayuntamientos el estado del cielo es nubes y claros
En algunos ayuntamientos el estado del cielo es muy nublado y el viento tiene dirección Norte e intensidad baja
En pocos ayuntamientos el estado del cielo es despejado y el viento tiene dirección Norte e intensidad baja

Tabla V: Mejores 10 descripciones tipo II para 15 de septiembre a las 17:00 (Figura 2).

Descipción
En aproximadamente la mitad de ayuntamientos del Este la temperatura es baja con respecto a las máximas y alta con respecto a las mínimas
En algunos ayuntamientos del Oeste el viento tiene dirección Norte e intensidad baja
En algunos ayuntamientos del Oeste el estado del cielo es nubes y claros
En algunos ayuntamientos del Oeste el estado del cielo es muy nublado
En algunos ayuntamientos del Sur el viento tiene dirección Norte e intensidad baja
En algunos ayuntamientos del Sur la temperatura es baja con respecto a las máximas y alta con respecto a las mínimas
En aproximadamente la mitad de ayuntamientos del Norte la temperatura es baja con respecto a las máximas y alta con respecto a las mínimas
En algunos ayuntamientos del Este el viento tiene dirección Norte e intensidad baja
En algunos ayuntamientos del Este el estado del cielo es cubierto y la temperatura es baja con respecto a las máximas y alta con respecto a las mínimas
En algunos ayuntamientos del Sur el estado del cielo es muy nublado y la temperatura es baja con respecto a las máximas y muy alta con respecto a las mínimas

Hemos analizado cuantitativamente la calidad de las descripciones generadas con la metaheurística frente a la totalidad de descripciones posibles (en casos de uso donde esto último resultaba factible). Los resultados indican que la metaheurística genera: i) el 25 % de las descripciones de mayor calidad (utilizando como métrica de calidad la suma de las tres condiciones de evaluación normalizadas) si descartamos las que incluyen el cuantificador de menor cobertura espacial (el menos específico, "pocos ayuntamientos"), ii) el 40 % de las descripciones que incluyen los tres cuantificadores de mayor cobertura y iii) el 75 % de las descripciones que incluyen los dos cuantificadores de mayor cobertura ("casi todos" y "bastantes"). Por lo tanto, se puede concluir que la metaheurística es efectiva para los cuantificadores que suponen mayor cobertura espacial (los más específicos).



(a) Estado del cielo (b) Viento (c) Temperaturas máximas (d) Temperaturas mínimas

Figura 2: Mapas que definen el estado meteorológico del 15 de septiembre de 2017 a las 17:00 descrito en IV y V.

Por último, hemos evaluado la eficacia de la metaheurística, comparando la calidad de la solución final frente a la solución inicial. Aquí se observa que la media de mejora de las soluciones es del 25 % para cinco ejecuciones realizadas.

VII. Conclusiones

En este trabajo hemos presentado una aproximación basada en fuerza bruta para la generación de descripciones lingüísticas compuestas de sentencias cuantificadas de tipo I y temple simulado para las de tipo II. Dichas descripciones se generan a partir de datos meteorológicos de observación, sobre un conjunto de variables lingüísticas tanto *crisp* como borrosas, entre las que destacan la inclusión de referencias geográficas. Hemos comparado las sentencias obtenidas con mapas para comprobar si eran representativas. Además, para el caso de las sentencias tipo II, se ha evaluado que la metaheurística genera entre el 25 % y el 75 % de las descripciones de mayor calidad de entre todas las posibles. La metaheurística también resulta efectiva, ya que la calidad de la solución final frente a la inicial mejora en un 25 % en promedio.

Como trabajo futuro, ampliaremos el modelo para nuevas metaheurísticas que puedan compararse en cuanto a rendimiento y calidad de las descripciones generadas.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad (proyectos TIN2014-56633-C3-1-R y TIN2017-84796-C2-1-R) y la Consellería de Educación de la Xunta de Galicia (proyectos GRC2014/030 y Acreditación 2016-2019, ED431G/08"). Todos los proyectos fueron cofinanciados por el programa FEDER. A. Ramos-Soto agradece la financiación de la Consellería de Cultura, Educación e Ordenación Universitaria" (Beca Postdoctoral ED481B 2017/030).

Referencias

[1] A. Gatt and E. Krahmer, "Survey of the state of the art in natural language generation: Core tasks, applications and evaluation," *Journal of Artificial Intelligence Research*, vol. 61, pp. 65–170, 2018.

[2] E. Reiter, "An architecture for data-to-text systems," in *Proceedings of the Eleventh European Workshop on Natural Language Generation*. Association for Computational Linguistics, 2007, pp. 97–104.

[3] N. Marín and D. Sánchez, "On generating linguistic descriptions of time series," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 285, pp. 6–30, 2016.

[4] L. A. Zadeh, "A prototype-centered approach to adding deduction capability to search engines-the concept of protoform," in *Intelligent Systems, 2002. Proceedings. 2002 First International IEEE Symposium*, vol. 1. IEEE, 2002, pp. 2–3.

[5] A. Ramos-Soto, A. J. Bugarin, S. Barro, and J. Taboada, "Linguistic descriptions for automatic generation of textual short-term weather forecasts on real prediction data," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 23, no. 1, pp. 44–57, 2015.

[6] P. J. Van Laarhoven and E. H. Aarts, "Simulated annealing," in *Simulated annealing: Theory and applications*. Springer, 1987, pp. 7–15.

[7] MeteoGalicia: servicio de datos de observación en tiempo real. (2017). [Online]. Available: http://servizos.meteogalicia.gal/rss/observacion/observacionConcellos.action

[8] J. Bateman and M.Zock. NLG systems wiki. (2017). [Online]. Available: http://nlg-wiki.org/systems/

[9] A. Ramos-Soto, A. Bugarín, and S. Barro, "On the role of linguistic descriptions of data in the building of natural language generation systems," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 285, pp. 31–51, 2016.

[10] F. Portet, E. Reiter, A. Gatt, J. Hunter, S. Sripada, Y. Freer, and C. Sykes, "Automatic generation of textual summaries from neonatal intensive care data," *Artificial Intelligence*, vol. 173, no. 7-8, pp. 789–816, 2009.

[11] J. Kacprzyk and S. Zadrozny, "Computing with words is an implementable paradigm: fuzzy queries, linguistic data summaries, and natural-language generation," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 18, no. 3, pp. 461–472, 2010.

[12] A. van der Heide and G. Triviño, "Automatically generated linguistic summaries of energy consumption data," in *Intelligent Systems Design and Applications, 2009. ISDA'09. Ninth International Conference on*. IEEE, 2009, pp. 553–559.

[13] J. Kacprzyk and A. Wilbik, "Using fuzzy linguistic summaries for the comparison of time series: an application to the analysis of investment fund quotations." in *IFSA/EUSFLAT Conf.*, 2009, pp. 1321–1326.

[14] D. Sanchez-Valdes, L. Eciolaza, and G. Trivino, "Linguistic description of human activity based on mobile phone's accelerometers." in *IWAAL*. Springer, 2012, pp. 346–353.

[15] A. Alvarez-Alvarez and G. Trivino, "Linguistic description of the human gait quality," *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, vol. 26, no. 1, pp. 13–23, 2013.

[16] R. M. Castillo-Ortega, N. Marín, and D. Sánchez, "A Fuzzy Approach to the Linguistic Summarization of Time Series." *Journal of Multiple-Valued Logic & Soft Computing*, vol. 17, 2011.

[17] R. Castillo-Ortega, N. Marín, D. Sánchez, and A. G. Tettamanzi, "Linguistic summarization of time series data using genetic algorithms," in *EUSFLAT*, vol. 1, no. 1. Atlantis Press, 2011, pp. 416–423.

[18] C. A. Donis-Díaz, R. Bello, and J. Kacprzyk, "Using ant colony optimization and genetic algorithms for the linguistic summarization of creep data," in *Intelligent Systems' 2014*. Springer, 2015, pp. 81–92.

[19] T. Altintop, R. R. Yager, D. Akay, F. E. Boran, and M. Ünal, "Fuzzy linguistic summarization with genetic algorithm: An application with operational and financial healthcare data," *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, vol. 25, no. 04, pp. 599–620, 2017.

[20] R. Tavakkoli-Moghaddam, M.-B. Aryanezhad, N. Safaei, and A. Azaron, "Solving a dynamic cell formation problem using metaheuristics," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 170, no. 2, pp. 761–780, 2005.

[21] S.-W. Lin, J. Gupta, K.-C. Ying, and Z.-J. Lee, "Using simulated annealing to schedule a flowshop manufacturing cell with sequence-dependent family setup times," *International Journal of Production Research*, vol. 47, pp. 3205–3217, june 2009.

Modelado lingüístico y síntesis de series temporales heterogéneas de consumo energético

S. Martínez-Municio*, L. Rodríguez-Benítez*, E. Castillo-Herrera*, J. Giralt-Muiña*, L. Jiménez-Linares*
*Escuela Superior de Informática, Universidad de Castilla-La Mancha, Paseo de la Universidad s/n. 13071. Ciudad Real, España
{sergio.martinez, luis.rodriguez, ester.castillo, juan.giralt, luis.jimenez}@uclm.es

***Resumen*—En la actualidad, gracias a la presencia de sensores o al auge de tecnologías propias del *internet de las cosas*, podemos monitorizar y registrar los consumos energéticos obtenidos en los edificios a lo largo del tiempo. Mediante un análisis efectivo de estos datos que capturen los patrones de consumo, se pueden conseguir reducciones significativas de los mismos, contribuyendo a su sostenibilidad. En este trabajo proponemos un marco de trabajo a partir del cual definir modelos que capturen esta casuística, haciendo acopio de un conjunto de series temporales de consumo eléctrico. El objetivo de estos modelos es obtener un resumen lingüístico que describa en lenguaje natural cual es la situación consumista de un edificio o conjunto de edificios en un periodo temporal concreto. La definición de estas descripciones se ha resuelto mediante resúmenes lingüísticos difusos, y como novedad en este campo, proponemos una extensión de los mismos que capturen situaciones donde la pertenencia a los conjuntos difusos no resulte muy marcada (i.e. que no supere un cierto valor umbral, como por ejemplo, 0.8), obteniendo una semántica enriquecida. Para la experimentación, se hará uso de datos de consumo energético de una organización educativa sobre los que se definirán los modelos propuestos y se obtendrán los resúmenes lingüísticos asociados a los mismos, para demostrar la capacidad que otorgan estas técnicas a la hora de obtener conclusiones sobre los diferentes escenarios de consumo en términos lingüísticos.**

***Palabras Clave*—consumo energético, modelo difuso, resúmenes lingüísticos, series temporales**

I. Introducción

La energía constituye uno de los pilares fundamentales para el desempeño adecuado de las actividades imperantes en la sociedad actual. De acuerdo con la Agencia de la Energía [1], los edificios representan el ámbito de mayor consumo energético, lo que conlleva a una responsabilidad directa en un tercio de las emisiones mundiales de dióxido de carbono. Del mismo modo, se ha reportado que los edificios operan de manera ineficiente [2] y por lo tanto, poder entender los patrones de consumo de los mismos resulta de especial interés para optimizar los recursos de las organizaciones, tanto económicos como de uso de la energía, y ser más sostenibles desde el punto de vista medioambiental [3]. En la actualidad, gracias a las tecnologías existentes así como al auge de otras nuevas, como los sensores inteligentes o redes complejas que configuran el *internet de las cosas*, junto con el interés cada vez más acuciante por las técnicas de aprendizaje máquina [4], se dispone de una cantidad de datos sin precedentes que permiten obtener un conocimiento detallado del uso que se está haciendo de la energía en un instante temporal dado en términos cuantitativos; sin embargo, resulta fundamental incorporar modelos que caractericen estos patrones de consumo energético en términos cualitativos, de modo que permitan aumentar su expresividad mediante descripciones breves en lenguaje natural con el propósito de planificar políticas que contribuyan a una mayor sostenibilidad de los edificios en un marco de revisión y ejecución continua. Dichas descripciones vendrán dadas por medio de resúmenes lingüísticos, ya que han demostrado su utilidad en diferentes ámbitos, como a la hora de describir el tráfico [5] o evaluar la calidad de la forma de andar de las personas [6]. Estos resúmenes están basados en la propuesta de Yager [7], quien proporciona una definición formal basada en el concepto de protoformas introducido por Zadeh [8]:

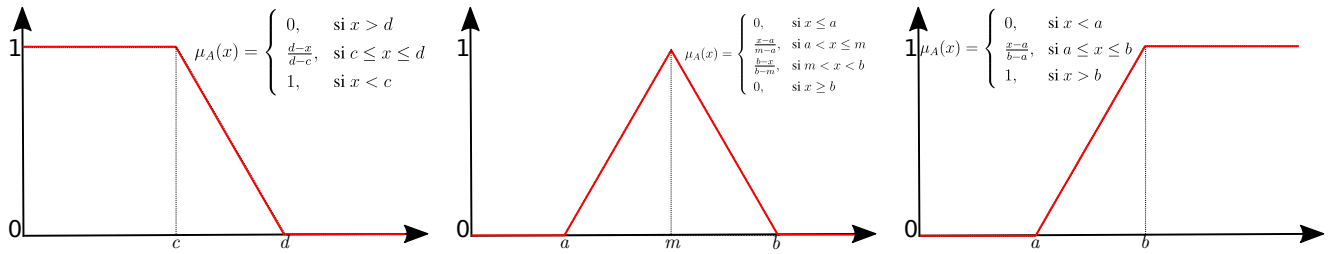
$$Q[R]y \; are \; P \tag{1}$$

donde y es un objeto caracterizado por un atributo con un dominio finito; Q y R (opcional) son cuantificadores, que llevan asociado un valor lingüístico definido sobre el dominio del atributo de y, y P un resumen que lleva asociado otro valor lingüístico. Además, se han realizado propuestas de generación automática de descripciones lingüísticas alineadas con la temática de este trabajo, donde la principal diferencia radica en que generan dichas descripciones partiendo de las series temporales de un día, sin definir un modelo previo que segmente dichos datos temporales en patrones de consumo [9].

La estructura del trabajo es la siguiente: en la Sección II se introducen los conceptos de modelo de edificio y organizacional, como principales abstracciones de caracterización de consumos, así como la definición de resumen lingüístico. En la Sección III se estudia la validez de los modelos definidos en términos lingüísticos. Una extensión de los resúmenes clásicos que aumenta las capacidades semánticas de los mismos es presentada en la Sección IV, mientras que en la Sección V se lleva a cabo la experimentación mediante la aplicación de los modelos definidos sobre datos de consumo real. Finalmente, la Sección VI presenta las conclusiones obtenidas y establece futuras líneas de trabajo.

II. Definición de Modelos

Se propone la definición de modelos para caracterizar el consumo energético obtenido en grandes instituciones con el fin de obtener en términos lingüísticos las conclusiones



(a) Trapezoidal R(a,b,c) (b) Triangular T(a,b,c) (c) Trapezoidal L(a,b,c)

Figura 1: Funciones de pertenencia difusas empleadas

derivadas de los mismos. Para ello, en primer lugar, se define un modelo base (modelo de edificio) que permita categorizar a nivel de edificio cómo ha sido su consumo por medio de una segmentación de los datos que es resuelta con el algoritmo *k*-means, para posteriormente, definir un modelo general (modelo de organización) que permita establecer un marco comparativo entre los modelos básicos para saber cómo se han comportado con respecto a los demás y obtener esta conclusión en términos lingüísticos. Como caso de estudio, se emplearán datos de consumo provenientes de una institución educativa española geográficamente distribuida: la Universidad de Castilla-La Mancha (UCLM), que cuenta con un total de 97 edificios repartidos por toda la región. En concreto, se utilizarán datos de consumo por día del año 2016 para la construcción de los modelos, y del año 2017 para la validación de los mismos.

II-A. Modelo de Edificio

Un modelo M de un edificio i se define como un conjunto de k grupos que tienen una semántica asociada:

$$M^i = \{G_0, G_1, ..., G_{k-1}\} \tag{2}$$

donde cada G_j viene definido por un prototipo, c_j:

$$G_j = \{c_j\} \tag{3}$$

Cada uno de los modelos de edificio M^i estará compuesto por dos grupos que caracterizarán los siguientes patrones de consumo: periodos con unos niveles bajos o de no actividad, que se corresponderá con G_0, y periodos donde existe una actividad relevante, que se corresponderá con G_1. Por tanto, los términos {no actividad, actividad} representan la semántica asociada a los grupos del modelo de edificio M^i. De este modo, en la Tabla I aparecen recogidos un subconjunto de los diferentes modelos de edificio que han sido generados, donde cada columna, representa la caracterización del consumo como no actividad (G_0) y actividad (G_1) respectivamente, y cada fila el edificio en cuestión. Así, por ejemplo, tenemos que el modelo para el edificio 95 quedaría formalizado como: $M^{95} = \{276.31, 1994.66\}$, de manera que, si se dispone del consumo real x para un día concreto, podemos saber cómo ha sido dicho consumo de acuerdo a su modelo, es decir, obtener su categoría semántica (caracterización).

Tabla I: Modelos de Edificio de la UCLM - Año 2016

		Modelos definidos	
		G_0	G_1
Edificios	0	500.44	1215.19
	1	570.23	1213.66
	...		
	95	276.31	1994.66
	96	211.07	406.82

II-B. Modelo de Organización

Un modelo organizacional es un modelo de modelos compuesto por cada uno de los sub-modelos de edificio M^i que queda definido como:

$$O = \left\{ \begin{array}{l} O_{G_0} = \{M^0_{G_0}, M^1_{G_0}, ..., M^{|M|}_{G_0}\} \\ O_{G_1} = \{M^0_{G_1}, M^1_{G_1}, ..., M^{|M|}_{G_1}\} \\ \vdots \\ O_{G_k} = \{M^0_{G_k}, M^1_{G_k}, ..., M^{|M|}_{G_k}\} \end{array} \right\} \tag{4}$$

donde cada O_{G_j} se refiere al conjunto de modelos de edificio $M^i_{G_j}$ que caracteriza cada patrón de consumo conforme a lo expuesto en el apartado anterior. Así pues, haciendo uso de (4), definimos el modelo organizacional para la UCLM como:

$$O_{\text{UCLM}} = \left\{ \begin{array}{l} O_{G_0} = \{M^0_{G_0}, M^1_{G_0}, ..., M^{96}_{G_0}\} \\ O_{G_1} = \{M^0_{G_1}, M^1_{G_1}, ..., M^{96}_{G_1}\} \end{array} \right\} \tag{5}$$

donde O_{G_0} vendrá dado por el dominio formado por todos los prototipos de los modelos de edificio M^i correspondientes a la semántica de no actividad:

$$Dom(O_{G_0}) = \{500.44, 570.23, ..., 211.07\} \tag{6}$$

y O_{G_1} por los de la semántica de actividad:

$$Dom(O_{G_1}) = \{1215.29, 1213.66, ..., 406.82\} \tag{7}$$

Partiendo de este modelo de organización O_{UCLM}, en el siguiente apartado se discutirá la obtención de los resúmenes lingüísticos basados en técnicas difusas que describirán el comportamiento consumista de la organización.

II-C. Caracterización lingüística

La caracterización lingüística será realizada en base a (1), donde y será un sintagma significativo, R vendrá dado por la semántica asociada al modelo, y P será definido en términos difusos. Un caso especial ocurre con Q, pues será tratado de manera conjunta con y y no como un modificador independiente con el que evaluar la sentencia completa (i.e. obtener el grado de verdad de la frase cuantificada lingüísticamente). De esta manera, (1) puede ser simplificada a la siguiente forma:

$$[R]y\ are\ P \tag{8}$$

La formalización del resumen P se lleva a cabo haciendo uso de una variable lingüística, $\mathcal{L}_v$, que está definida mediante n conjuntos difusos ($S^{'}$) que configuran una partición difusa del dominio cuyo universo de discurso viene dado por el conjunto de todos los prototipos que conforman cada dominio del modelo O:

$$Dom(\mathcal{L}_v) = Dom(O_{G_j}) \tag{9}$$

A su vez, cada conjunto difuso de $\mathcal{L}_v$ queda definido mediante una función de pertenencia compuesta por tres parámetros P_r, que representan el valor del percentil r, pues permiten conocer el posicionamiento de cada edificio i en lo que a consumo se refiere, con respecto al total de la organización. En la Fig. 1 se muestran las funciones de pertenencia consideradas para la definición de los valores de $\mathcal{L}_v$.

$$\mathcal{L}_v = \{S_0^{'}, S_1^{'}, ..., S_m^{'}\} \tag{10}$$

Dado que el modelo O está compuesto de tantos dominios como grupos tengan los modelos de edificios que lo conforman, es necesario identificar el dominio de O al que pertenece un consumo dado x de un edificio específico i para poder aplicar la variable lingüística $\mathcal{L}_v$ en las magnitudes adecuadas. Para ello, partiendo del modelo de edificio M^i que categoriza el consumo de un edificio i, obtenemos el grupo semántico al que pertenece dicho consumo x a través de la siguiente fórmula:

$$\arg\min dist(x, G_j) \tag{11}$$

donde $dist(x, G_j)$ es una medida de distancia que cuantifica la similaridad entre el consumo x y el prototipo del grupo G_j, típicamente la euclídea. Sabiendo el grupo semántico al que pertenece x, podemos obtener el dominio de O adecuado y aplicar la variable lingüística $\mathcal{L}_v$ para obtener la etiqueta lingüística que definirá el resumen P, aplicando la operación de la `t-conorma` del máximo. Por lo tanto, si aplicamos estos conceptos al modelo de estudio, $O_{\texttt{UCLM}}$, la caracterización lingüística vendrá dada de acuerdo con (8), donde y será *consumo*, R será *actividad* o *no actividad* y P quedará definido mediante dos variables lingüísticas $\mathcal{L}_v$, $\mathcal{L}_v^0$ y $\mathcal{L}_v^1$, una para cada conjunto de modelos de edificio M^i que caracterizan los patrones de consumo de actividad y no actividad en $O_{\texttt{UCLM}}$, es decir, para O_{G_0} y O_{G_1} respectivamente. Dichas $\mathcal{L}_v$ son definidas mediante cinco conjuntos difusos haciendo uso de (10), tal y como se aprecia en la Tabla II, donde la única diferencia entre $\mathcal{L}_v^0$ y $\mathcal{L}_v^1$ radica en el dominio empleado.

Tabla II: Definición de $\mathcal{L}_v$ para $O_{\texttt{UCLM}}$

Etiqueta	Función de Pertenencia (μ)
Insignificante	R$\{P_0,P_{10},P_{25}\}$
Leve	T$\{P_{10},P_{25},P_{50}\}$
Normal	T$\{P_{25},P_{50},P_{75}\}$
Grande	T$\{P_{50},P_{75},P_{90}\}$
Enorme	L$\{P_{75},P_{90},P_{100}\}$

La caracterización lingüística vista hasta ahora es aplicable a la hora de obtener conclusiones acerca de cómo ha sido el consumo obtenido durante el periodo de vigencia del modelo, pero no nos proporciona la información necesaria sobre el error cometido en la estimación del modelo de edificio M^i para poder concluir sobre la validez o bondad del mismo. Por ello, en la siguiente sección se propondrá un mecanismo que permita la validación de los modelos en términos lingüísticos.

III. Validación de Modelos

En esta sección se propondrá un mecanismo para conocer la validez de cada uno de los modelos de edificio M^i definidos, así como del modelo organizacional O, y de este modo saber si los modelos definidos arrojan las conclusiones adecuadas.

III-A. Validación del Modelo de edificio

En primer lugar, se debe asociar el consumo real x obtenido en un instante de tiempo en cada edificio i, con el grupo semántico G_j del modelo que mejor lo define para obtener el error cometido en la estimación del modelo por día de consumo real. A este grupo semántico lo denominaremos $\widetilde{G}$, y será el prototipo que mejor describe el consumo real x. Formalmente, $\widetilde{G}$ viene definido en términos generales mediante la siguiente función f, que combina los diferentes grados de pertenencia a los distintos grupos que conforman el modelo de edificio M^i:

$$\widetilde{G} = f\big(\mu_{G_0}(x), \mu_{G_1}(x), ..., \mu_{G_{k-1}}(x)\big) \tag{12}$$

donde $\mu_{G_j} = dist(x, G_j)$ y el grupo semántico vendrá dado por $j = \arg\max\big\{\mu_{G_0}(x), \mu_{G_1}(x), ..., \mu_{G_{k-1}}(x)\big\}$. De este modo, el error obtenido a la hora de catalogar el consumo real x en uno de los grupos semánticos vendrá dado por:

$$\epsilon = \widetilde{G} - x \tag{13}$$

lo que nos proporciona un valor que es independiente de la escala escogida, permitiéndonos comparar el error obtenido para cada grupo semántico $\widetilde{G}$. Así, para catalogar si dicho error cometido con respecto a la estimación de su modelo de edificio M^i es significativo, con un nivel de confianza del 95 %, consideramos el intervalo definido por $\pm 2\sigma$, con σ siendo la desviación típica propia del grupo semántico G_j al que pertenece el consumo real x, de modo que:

- Si $\epsilon > 2\sigma$, entonces se ha predicho un mayor consumo que el real, y por lo tanto está siendo **sobreestimado**.
- Si $-2\sigma \leq \epsilon \leq 2\sigma$, entonces se ha predicho un consumo que se muestra acorde con el real, y por lo tanto está siendo **adecuado**.

- Si $\epsilon < -2\sigma$, entonces se ha predicho un menor consumo que el real, y por lo tanto está siendo **subestimado**.

Con el error ϵ cometido por cada consumo real x, el interés ahora se centra en categorizar la significatividad de dicho error a nivel del modelo de edificio M^i, es decir, si éste se sitúa en los márgenes establecidos como adecuados o si por el contrario, se sitúa en el 5 % de las observaciones restantes, con el fin de obtener una descripción lingüística que resuma la validez del modelo estimado. Para ello, emplearemos una variable lingüística $\mathcal{L}_m$ (Tabla III) compuesta por cinco conjunto difusos, cuyo dominio vendrá dado por la cantidad de observaciones (errores) que encajan en cada categoría descrita anteriormente de acuerdo con la siguiente fórmula:

$$L_j = \frac{|\epsilon_j|}{|\epsilon|} \times 100 \tag{14}$$

donde $j \in \{sobreestimado, adecuado, subestimado\}$, $|\epsilon_j|$ será la cantidad de errores que encajan en una de las categorías definidas, y $|\epsilon|$ será la cantidad total de error cometido. Dado

Tabla III: Definición de $\mathcal{L}_m$ para validar el modelo

Etiqueta	Función de pertenencia (μ)
Insignificante	R{0,10,25}
Leve	T{10,25,50}
Normal	T{25,50,75}
Grande	T{50,75,90}
Enorme	L{75,90,100}

que se tienen tres categorías: *sobreestimado*, *adecuado* y *subestimado*, la descripción lingüística que resuma de manera global la validez del modelo de edificio M^i, vendrá dada por la categoría cuyo L_j sea máximo. Así pues, aplicando (8), el resumen lingüístico vendrá dado por: y, que será la categoría donde L_j es máximo, y P, que será la etiqueta lingüística de $\mathcal{L}_m$ asociada a la categoría j.

III-B. Validación del Modelo de organización

Los conceptos vistos en los modelos de edificio pueden ser extendidos para determinar la bondad o validez del modelo organizacional O. Para ello, hay que realizar una agregación de cada una de las categorías: *subestimado*, *adecuado* y *sobreestimado* para cada modelo de edificio M^i que componen el metamodelo O y aplicar la misma variable lingüística $\mathcal{L}_m$ que en los modelos de edificio M^i. Dicha agregación, $L_j^{'}$, viene definida por la siguiente ecuación:

$$L_j^{'} = \frac{\sum L_j}{|L_j|} \tag{15}$$

y al igual que en el caso anterior, la descripción lingüística que resuma de manera global la validez del modelo organizacional O, vendrá dada por la categoría cuyo $L_j^{'}$ sea máximo. De este modo, aplicando nuevamente (8), el resumen lingüístico vendrá dado por: y, que será la categoría donde $L_j^{'}$ es máximo, R que será el sintagma *organizacional* para distinguirlo del caso anterior, y P, que será la etiqueta lingüística de $\mathcal{L}_m$ asociada a la categoría j.

A lo largo de esta sección, se ha propuesto un método que permite evaluar cada modelo propuesto gracias al uso de resúmenes lingüísticos difusos. El empleo de conjuntos difusos para su definición, brinda la posibilidad de trabajar con límites poco definidos, de modo que la conclusión derivada de los mismos puede hacer uso con *cierto nivel de pertenencia* de varios de estos conjuntos. Cuando se produce esta casuística, los resúmenes lingüísticos basados en (8) no resultan lo suficientemente expresivos como para poner de manifiesto dicha situación. Por ello, en la siguiente sección introducimos un nuevo concepto de resumen extendido que permite expresar en términos lingüísticos conclusiones cuyos niveles de pertenencia difusa no resulten muy marcados.

IV. Resúmenes Extendidos

Los resúmenes lingüísticos deben poseer la suficiente capacidad expresiva como para no enmascarar u ocultar información que induzcan a conclusiones inexactas. Para tratar de capturar esta casuística, proponemos una modificación sobre la definición dada en (8), permitiendo la adición de un cuantificador absoluto (*cercano a, próximo a...*) [10], W, al resumen P, dando lugar a un resumen extendido $P^{'}$:

$$P^{'} = WP \tag{16}$$

de modo que es capaz de modelar la descripción lingüística en términos de dos etiquetas lingüísticas con un *nexo* que le proporciona la semántica adecuada. El criterio para discernir si resulta necesario la adición del cuantificador W al resumen P para obtener una descripción que capture este tipo de casuísticas en términos lingüísticos vendrá dado por un umbral de pertenencia δ asociado a cada conjunto difuso, de modo que: si el valor de pertenencia μ es inferior a dicho umbral, por ejemplo $\delta = 67\,\%$, entonces es necesario emplear un resumen extendido $P^{'}$; en caso contrario, un resumen P clásico resulta suficiente. De este modo, la definición dada en (8) quedaría como sigue:

$$[R]y \; are \; P^{'} \tag{17}$$

V. Resultados Experimentales

En esta sección se prueba la capacidad expresiva que proporcionan los resúmenes lingüísticos a la hora de resumir el estado relativo al consumo energético en una organización, que como se mencionó en la Sección II, será la Universidad de Castilla-La Mancha. Para ello, se emplearán datos de consumo diario del año 2017 para el edificio 62, cuya área de desempeño es docente e investigadora, en el cual destacamos un primer periodo de no actividad, correspondiente al periodo vacacional de Semana Santa, y otro segundo de actividad, correspondiente a un periodo lectivo, seleccionando un día cualesquiera de cada periodo con los que formalizar los resúmenes lingüísticos: $x_{\text{na}} = 1203.42$ y $x_{\text{a}} = 2036.24$.

V-A. Caracterización del consumo respecto a M^{62}

De acuerdo a (2), el modelo de edificio viene dado por:

$$M^{62} = \{1070.84, 1563.12\}$$

mientras que el modelo de la organización $O_{\texttt{UCLM}}$ es el mismo que (4). Para obtener la caracterización lingüística asociada a los consumos de no actividad (x_{na}) y actividad (x_{a}), en primer lugar definimos la variable lingüística $\mathcal{L}_v$ con la que formalizar el resumen lingüístico, cuya definición aparece en la Tabla IV. Acto seguido, se identifica el dominio de $O_{\texttt{UCLM}}$

Tabla IV: Definición de $\mathcal{L}_v$ para $O_{\texttt{UCLM}}$

Etiqueta	Función de Pertenencia (μ)
Insignificante	R{P_0,P_{10},P_{25}}
Leve	T{P_{10},P_{25},P_{50}}
Normal	T{P_{25},P_{50},P_{75}}
Grande	T{P_{50},P_{75},P_{90}}
Enorme	L{P_{75},P_{90},P_{100}}

sobre el que aplicar la variable lingüística $\mathcal{L}_v$ para cada uno de los consumos haciendo uso de (11):

$$\arg\min\{dist(1203.42, 1070.84), dist(1203.42, 1563.12)\} = 0$$

$$\arg\min\{dist(2036.24, 1070.84), dist(2036.24, 1563.12)\} = 1$$

lo que nos indica que para x_{na}, su grupo semántico se corresponde con G_0, y que para x_{a} es G_1, algo lógico si atendemos a su modelo de edificio. Sabiendo los grupos semánticos de x_{na} y x_{a}, se concluye que el dominio de $O_{\texttt{UCLM}}$ sobre el que aplicar $\mathcal{L}_v$ para cada caso son los definidos en (6) y (7) respectivamente. De este modo, obtenemos la pertenencia de x_{na} y x_{a} a cada conjunto difuso definido en $\mathcal{L}_v$, y mediante la `t-conorma` del máximo, se obtiene el conjunto al que pertenece x_{na}:

$$\begin{aligned}\text{máx}\{&\mu_{insignificante}(x) = 0, \mu_{leve}(x) = 0,\\ &\mu_{normal}(x) = 0, \mu_{grande}(x) = 0,\\ &\mu_{enorme}(x) = 1\} = \mu_{\textbf{enorme}}(x)\end{aligned}$$

y x_{a}:

$$\begin{aligned}\text{máx}\{&\mu_{insignificante}(x) = 0, \mu_{leve}(x) = 0,\\ &\mu_{normal}(x) = 0, \mu_{grande}(x) = 0,\\ &\mu_{enorme}(x) = 1\} = \mu_{\textbf{enorme}}(x)\end{aligned}$$

Una vez se dispone del conjunto difuso al que pertenece el consumo, ya se puede formalizar el resumen lingüístico de acuerdo a (8). Para el caso del consumo de no actividad, x_{na}, se tiene que:

«el consumo está siendo *enorme*»

lo cual es debido a que el edificio seleccionado posee un centro de datos que está funcionando continuamente, y para el caso del consumo de actividad, x_{a}, se tiene que:

«el consumo está siendo *enorme*»

lo cual es debido a un pico de consumo, ya sea por ser un día veraniego, con el consiguiente consumo en los sistemas de aire acondicionado, o acumulación de horas lectivas en ese periodo.

V-B. *Comparación de M^{62} respecto a O_{UCLM}*

El experimento anterior proporciona información sobre el consumo obtenido por el edificio 62 comparado con la estimación resuelta por su modelo de edificio M^{62}. Sin embargo, también es posible obtener cómo se sitúa dicho modelo de edificio M^{62} con respecto al modelo de la organización $O_{\texttt{UCLM}}$. Para ello, debemos seleccionar el prototipo del modelo de edificio que se quiere comparar respecto al modelo organizacional. Si se selecciona $G_0 = 1070.84$, empleando la misma variable lingüística $\mathcal{L}_v$ usando como dominio el definido en (6), tenemos que el conjunto difuso al que pertenece G_0, aplicando la `t-conorma` del máximo es:

$$\begin{aligned}\text{máx}\{&\mu_{insignificante}(x) = 0, \mu_{leve}(x) = 0,\\ &\mu_{normal}(x) = 0, \mu_{grande}(x) = 0,\\ &\mu_{enorme}(x) = 1\} = \mu_{\textbf{enorme}}(x)\end{aligned}$$

mientras que si se selecciona $G_1 = 1563.12$, usando $\mathcal{L}_v$ sobre el dominio definido en (7), tenemos que el conjunto difuso al que pertenece G_1, aplicando la `t-conorma` del máximo es:

$$\begin{aligned}\text{máx}\{&\mu_{insignificante}(x) = 0, \mu_{leve}(x) = 0,\\ &\mu_{normal}(x) = 0, \mu_{grande}(x) = 0.49,\\ &\mu_{enorme}(x) = 0.51\} = \mu_{\textbf{enorme}}(x)\end{aligned}$$

de modo que los resúmenes asociados son, para el caso de G_0:

«el consumo de *no actividad* está siendo enorme»

y para el caso de G_1:

«el consumo de *actividad* está siendo enorme»

lo que nos sugiere que el edificio seleccionado es de los que más consumen de toda la Universidad, tanto en periodos donde no existe gran actividad docente o investigadora, como en periodos donde sí la hay. Destacar que para el caso de G_1, hubiese sido más adecuado emplear un resumen extendido de acuerdo a (17), dándonos como resultado:

«el consumo de *actividad* está siendo *grande con tendencia a enorme*»

V-C. *Validación de Modelos*

En este apartado llevaremos a cabo la validación del modelo de edificio M^{62} y el de la organización $O_{\texttt{UCLM}}$. Para el primer caso es necesario calcular el error ϵ cometido a la hora de estimar el modelo M^{62}. Por cada día de consumo del año 2017, se debe obtener el grupo semántico $\widetilde{G}$ de su modelo al que pertenece, M^{62}, para poder calcular dicho error de acuerdo a (12) y (13) respectivamente. Por ejemplo, utilizando los datos de x_{na} y x_{a} del experimento anterior, se tiene que, $\widetilde{G}_{\text{na}} = G_0 = 1070.84$ y $\widetilde{G}_{\text{a}} = G_1 = 1563.12$, por lo que los errores obtenidos en esos días concretos son: $\epsilon_{\text{na}} = 1070.84 - 1203.42 = -132.58$ y $\epsilon_{\text{a}} = 1563.12 - 2036.24 = -473.12$. Una vez se tienen todos los errores

ϵ cometidos en la estimación, el siguiente paso consiste en categorizar su significatividad a nivel de M^{62} aplicando la variable lingüística $\mathcal{L}_m$ definida en la Tabla III, donde el L_j para cada categoría junto con la pertenencia asociada a cada conjunto difuso de $\mathcal{L}_m$ identificada viene expresada en la Tabla V.

Tabla V: Definición de $\mathcal{L}_m$ para validar el modelo

Sobreestimado		***Adecuado***		***Subestimado***		
L_j	μ	L_j	μ	L_j	μ	
	1		0		**0.9**	**Insignificante**
	0		0		0.1	**Leve**
0 %	0	89 %	0	11 %	0	**Normal**
	0		0		0	**Grande**
	0		**1**		0	**Enorme**

Luego como el valor de L_{adecuado} resulta ser máximo, con una pertenencia total a la etiqueta enorme, podemos concluir que:

«el modelo resulta adecuado de manera *enorme*»

o lo que es lo mismo, que el modelo M^{62} captura correctamente los patrones de consumo subyacentes y nos arroja estimaciones que son correctas.

Por otro lado, para validar el modelo O_{UCLM}, se agrega cada una de las categorías de acuerdo a (15), cuyo resultado aparece reflejado en la Tabla VI. Aplicando la variable lingüística $\mathcal{L}_m$

Tabla VI: Pertenencias de L_j sobre $\mathcal{L}_m$

counter	L_{sobre}	$L_{adecuado}$	L_{sub}
0	9 %	91 %	0 %
1	4 %	96 %	0 %
...			
95	13 %	87 %	1 %
96	23 %	77 %	0 %
	9.35 %	**87.14 %**	**3.51 %**

sobre cada categoría $L_j^{'}$ agregada, obtenemos las pertenencias a cada conjunto difuso de $\mathcal{L}_m$, cuyos valores se pueden apreciar en la Tabla VII. Así pues, como el valor $L_{adecuado}^{'}$

Tabla VII: Pertenencias de $L_j^{'}$ sobre $\mathcal{L}_m$

Sobreestimado		***Adecuado***		***Subestimado***		
$L_j^{'}$	μ	$L_j^{'}$	μ	$L_j^{'}$	μ	
	1		0		**1**	**Insignificante**
	0		0		0	**Leve**
9 %	0	87 %	0	4 %	0	**Normal**
	0		0.20		0	**Grande**
	0		**0.80**		0	**Enorme**

resulta ser máximo, con una pertenencia de 0.8 a la etiqueta enorme, podemos concluir que:

«el modelo *organizacional* resulta adecuado de manera *enorme*»

o lo que es lo mismo, que el modelo O_{UCLM} captura correctamente los patrones de consumo encapsulados por cada modelo de edificio que lo conforma, y que por tanto, arroja estimaciones adecuadas.

VI. Conclusiones y Trabajo Futuro

Este trabajo propone un nuevo enfoque a la hora de analizar y extraer conclusiones a partir de un conjunto de series temporales de datos de consumo energético heterogéneas (i.e. provenientes de múltiples edificios enmarcados en una misma organización), mediante la definición de modelos que resuman en términos lingüísticos difusos la situación consumista de la organización, con el propósito de servir de apoyo a la toma de decisiones de la alta dirección a la hora de acometer políticas energéticas que contribuyan a la configuración de edificios sostenibles. Además, se ha propuesto una extensión de los resúmenes lingüísticos clásicos que permite tratar la casuística donde la conclusión está mejor definida en término de dos etiquetas si el umbral de pertenencia a la mismas no resulta muy marcado. Finalmente, futuras líneas de trabajo deberían estar encaminadas a obtener un aumento del rendimiento del modelo propuesto, ya sea realizando una segmentación más fina de los grupos, o empleando modelos basados en otro tipo de técnicas, como *deep learning*; definir una arquitectura *big data* basada en microservicios que dé soporte a la definición y manipulación de los modelos o incorporar al modelo un sistema de alertas basado en resúmenes lingüísticos.

Agradecimientos

Los autores quieren agradecer al Ministerio de Economía, Industria y Competitividad de España por el apoyo ofrecido mediante el proyecto TIN2015-64776-C3-3-R, cofinanciado por el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER).

Referencias

[1] O. for Economic Co-operation and Development, *Transition to Sustainable Buildings: Strategies and Opportunities to 2050*, ser. Energy technology perspectives. OECD, 2013.

[2] M. A. Piette, S. K. Kinney, and P. Haves, "Analysis of an information monitoring and diagnostic system to improve building operations," *Energy and Buildings*, vol. 33, no. 8, pp. 783–791, 2001.

[3] L. Hernández, C. Baladrón, J. M. Aguiar, B. Carro, and A. Sánchez-Esguevillas, "Classification and clustering of electricity demand patterns in industrial parks," *Energies*, vol. 5, no. 12, pp. 5215–5228, 2012.

[4] J. Patterson and A. Gibson, *Deep Learning: A Practitioner's Approach*. .ºReilly Media, Inc.", 2017.

[5] A. Alvarez-Alvarez, D. Sanchez-Valdes, G. Trivino, Á. Sánchez, and P. D. Suárez, "Automatic linguistic report of traffic evolution in roads," *Expert Systems with Applications*, vol. 39, no. 12, pp. 11 293–11 302, 2012.

[6] A. Alvarez-Alvarez and G. Trivino, "Linguistic description of the human gait quality," *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, vol. 26, no. 1, pp. 13–23, 2013.

[7] R. R. Yager, "A new approach to the summarization of data," *Information Sciences*, vol. 28, no. 1, pp. 69–86, 1982.

[8] L. A. Zadeh, "A computational approach to fuzzy quantifiers in natural languages," *Computers & Mathematics with applications*, vol. 9, no. 1, pp. 149–184, 1983.

[9] A. van der Heide and G. Triviño, "Automatically generated linguistic summaries of energy consumption data," in *Intelligent Systems Design and Applications, 2009. ISDA'09. Ninth International Conference on*. IEEE, 2009, pp. 553–559.

[10] L. A. Zadeh, "Fuzzy logic= computing with words," *IEEE transactions on fuzzy systems*, vol. 4, no. 2, pp. 103–111, 1996.

Generación Automática de Explicaciones en Lenguaje Natural para Árboles de Decisión de Clasificación

B. López-Trigo, Jose M. Alonso, A. Bugarín
Centro Singular de Investigación en Tecnoloxías da Información (CiTIUS),
Universidade de Santiago de Compostela,
Campus Vida, E-15782, Santiago de Compostela, Spain
Email: bruno.lopez.trigo@rai.usc.es, {josemaria.alonso.moral, alberto.bugarin.diz}@usc.es

***Resumen*—En este trabajo describimos un modelo de explicaciones en lenguaje natural para árboles de decisión para clasificación. Las explicaciones incluyen aspectos globales del clasificador y aspectos locales de la clasificación de una instancia concreta. La propuesta está implementada en el servicio Web de código abierto ExpliClas [1], que en su versión actual opera sobre árboles construidos con Weka y conjuntos de datos con atributos numéricos. Ilustramos la viabilidad de la propuesta con dos casos de ejemplo, donde mostramos paso a paso cómo el modelo explica los respectivos árboles de clasificación.**

***Index Terms*—Explicabilidad, Soft Computing, Árboles de decisión para Clasificación, Generación de Lenguaje Natural**

I. Introducción

La generalización del uso de las nuevas tecnologías ha hecho que hoy trabajemos y vivamos rodeados de sistemas inteligentes [2]. Términos como ciudad inteligente, fábrica, casa, coche o teléfono inteligentes, son cada vez más populares. En realidad, existen multitud de dispositivos dotados de cierta inteligencia que nos asisten en el día a día, muchas veces sin que seamos totalmente conscientes de ello. Mención especial merece el teléfono móvil, que nos ofrece multitud de aplicaciones casi para cualquier cosa que podamos imaginar y va con nosotros a todas partes. Se puede afirmar que, si bien en el pasado vivimos una revolución industrial, ahora estamos viviendo una revolución social impulsada por la Inteligencia Artificial (IA).

Cuando un sistema inteligente toma decisiones que nos afectan (ej. filtrar llamadas, diagnóstico médico, concesión de un préstamo, etc.), surgen multitud de preguntas que deberíamos hacernos [3]: ¿quién es el responsable de las consecuencias colaterales que pudieran derivarse de las decisiones tomadas? ¿cuáles son las consecuencias éticas? ¿puede haber consecuencias legales?

Desde el punto de vista legal, el Parlamento Europeo aprobó una nueva Regulación General de Protección de Datos [4] que entró en vigor el 25 de mayo de 2018. La nueva regulación enfatiza el derecho de los ciudadanos a pedir explicaciones, independientemente de que las decisiones que les afectan sean tomadas por una persona o un programa informático. Esto significa que los ciudadanos pueden pedir a las empresas que les den explicaciones asociadas a las decisiones tomadas por los sistemas inteligentes que utilizan.

Desde un punto de vista técnico: ¿puede explicarnos la aplicación que tomó una decisión por qué tomó esa decisión y no otra? Para esto, hay básicamente dos opciones [5]: (1) el sistema inteligente está construido siguiendo un modelo interpretable (también llamado de caja blanca) que un operario experto puede analizar y entender a fin de elaborar una explicación; o (2) el sistema está construido siguiendo un modelo explicable que genera explicaciones por sí mismo. La DARPA planteó en 2016 las siguientes cuestiones técnicas [5]: ¿puede una máquina inteligente aprender de forma autónoma a explicar su comportamiento? ¿está preparada la generación actual de sistemas inteligentes para dar explicaciones de forma clara, sin ambigüedades, tanto a públicos especializados como no especializados? Y lanzó el reto de crear una nueva generación de sistemas inteligentes explicables entre 2017 y 2021. El reto fue lanzado inicialmente a universidades y centros de investigación americanos, con énfasis en la creación de equipos multidisciplinares que abordasen no sólo aspectos algorítmicos sino también de implementación y evaluación con personas. Los equipos seleccionados empezaron a trabajar en mayo de 2017 pero a día de hoy sólo hemos encontrado resultados muy preliminares (ej. [6], [7]).

Hasta donde nosotros sabemos, en la práctica, la responsabilidad de generar explicaciones recae directamente en el operario asociado al sistema inteligente, si está disponible para ello [8]. Aunque hay sistemas basados en conocimiento que son interpretables, en los últimos años son cada vez más populares las técnicas de IA para aprendizaje automático y minería de datos, supervisadas y no supervisadas (es decir, con o sin intervención humana). Estos sistemas se están demostrando ciertamente útiles y versátiles, pero la mayoría no suelen tener ninguna capacidad explicativa ni tampoco pueden ser interpretados fácilmente por personas (en cuyo caso se dice que son sistemas de caja negra).

Por tanto, el nuevo marco legal demanda que los expertos en IA desarrollen nuevos algoritmos que proporcionen explicaciones de forma automática.

En este trabajo, presentamos un modelo para la interpre-

tación de uno de los algoritmos de IA más interpretable, como son los árboles de decisión para clasificación, que introduciremos en la Sección II. El generador de explicaciones basado en dicho modelo y la combinación de técnicas de análisis inteligente de datos y generación de lenguaje natural se describe en la Sección III. La Sección IV presenta 2 casos de uso ilustrativos. Finalmente, la Sección V resume las principales conclusiones y apunta líneas de trabajo futuro.

II. Clasificación con Árboles de Decisión

Dentro del aprendizaje supervisado a partir de conjuntos de datos, los métodos basados en modelos se caracterizan por representar el conocimiento aprendido en algún formalismo de representación que explicita dicho conocimiento. Una ventaja importante de esta aproximación es que, una vez que se dispone del modelo, éste puede aplicarse directamente sobre nuevas instancias (por ejemplo, en problemas de predicción, como la clasificación) sin necesidad de seguir manteniendo los datos de entrenamiento. Los árboles de decisión utilizan como formalismo de representación un árbol donde los nodos representan condiciones sobre los valores de los atributos del conjunto de datos, que se organizan jerárquicamente, y donde las ramas de cada nodo corresponden a posibles valores del atributo. Hay diferentes métodos inductivos [9], [10] para la construcción de un árbol de decisión, pero todos ellos suelen utilizar estrategias "divide y vencerás" que construyen el árbol desde la raíz a las hojas seleccionando en cada nodo intermedio el atributo y la condición que particiona el conjunto de datos de la mejor manera posible, habitualmente en base a criterios de entropía y de maximización de la ganancia de información [11].

En el caso concreto de los árboles de clasificación, los nodos hojas contienen, idealmente, un conjunto de instancias correspondientes a la misma clase. La aplicación para la clasificación de nuevas instancias se inicia evaluando la condición del nodo raíz para los atributos de dicha instancia y continuando el recorrido por las ramas y nodos correspondientes. El proceso de clasificación finaliza cuando se alcanza un nodo hoja, que indica la clase que corresponde a la instancia. En la práctica, la condición de que un nodo hoja contenga únicamente instancias de la misma clase (nodo "puro") es demasiado restrictiva, con lo que dicha condición se debe relajar dentro de unos márgenes de pureza. Ello da lugar, por otra parte, a que los árboles clasifiquen incorrectamente algunos (idealmente muy pocos) casos, característica que se recoge en la matriz de confusión entre clases.

Nuestro modelo de explicación de árboles de clasificación se basa en estos aspectos que acabamos de comentar. Por un lado, una caracterización global del problema de clasificación y del árbol inducido. Por otro, una explicación del recorrido por el árbol en la tarea de clasificación. Veremos en la siguiente sección estos aspectos en mayor detalle.

III. Modelo para la Generación de Explicaciones

La generación de texto en Lenguaje Natural (popularmente conocida como NLG por el acrónimo de "Natural Language Generation") constituye una línea de investigación destacada en el área de la IA y la Lingüística Computacional [12].

En este trabajo, tomamos como punto de partida la arquitectura NLG más popular, inicialmente propuesta por Reiter y Dale [13], y la Teoría Computacional de Percepciones propuesta por Zadeh [14]. La generación de explicaciones en Lenguaje Natural se hace combinando plantillas y librerías de código abierto para la realización lingüística [15].

Planteamos la explicación de clasificadores mediante árboles de decisión a dos niveles (global y local), tal y como se describe a continuación. Todos los ejemplos utilizados en las siguientes secciones para ilustrar la propuesta se pueden reproducir mediante el servicio web ExpliClas [1].

III-A. Explicación global de un clasificador

El primer nivel es la explicación que denominamos global, que se orienta a describir el comportamiento general de un árbol de clasificación dado, aprendido a partir de un determinado conjunto de datos. La información que se incluye en la explicación global se refiere esencialmente a características del propio problema de clasificación y su rendimiento. Los datos de entrada para esta explicación provienen del propio conjunto de datos y de la matriz de confusión del clasificador aprendido.

La planificación de la explicación global contiene los elementos que se muestran a continuación:

- **Contextualización del problema**, que enumera las clases del mismo.

  Prototipo: `There are [N] types of beer: [Class1], [Class2], ... and [ClassN].`

  Ejemplo: `There are 8 types of beer: Blanche, Lager, Pilsner, IPA, Stout, Barleywine, Porter and Belgian Strong Ale.`

- **Fiabilidad del clasificador**, que evalúa el porcentaje global de clasificaciones correctas sobre el conjunto de datos de aprendizaje, incluyendo una valoración cualitativa del mismo de acuerdo con una definición establecida de valores lingísticos.

  Prototipo: `This classifier is [very reliable / quite confusing / very confusing] because correctly classified instances represent [percentage] %.`

  Ejemplo: `This classifier is very reliable because correctly classified instances represent 94.75 %.`

- **Confusión del clasificador**, destacando qué clases se ven afectadas en mayor medida por dicha confusión. Aquí se interpreta la matriz de confusión del clasificador como una matriz de adyacencia de un grafo, cuyos ciclos se entienden como posibles caminos cerrados de confusión entre clases. Se toma el camino de mayor

longitud para ser incluido en la explicación. En caso de que el nivel de confusión sea bajo se omitirá esta parte de la explicación. A la hora de enumerar las clases se busca limitar la longitud de la explicación, tratando de forma diferente los casos en que el camino cerrado de confusión es largo (muchas clases confundidas) o corto (número reducido de clases confundidas) de modo que la longitud de la explicación sea lo más corta posible. Así, en el primer caso, se enumeran las clases para las que no hay confusión (expresándolas como excepciones) y en el segundo caso se enumeran las clases para las que hay confusión. En situaciones intermedias, como la del siguiente ejemplo, se citan los casos concretos.

Prototipo: `There may be some confusion among samples related to [a few / some / most / all] types of [object]. But among all of them [the pair / pairs [[class1]; [class2]] and [[classM-1]; [classM]] [is / are] the most confused.`

Ejemplo: `There may be some confusion among samples related to some types of beer. But among all of them the pair [IPA; Barleywine] is the most confused.`

- **Confusión elevada entre clases**, donde se destacan aquellos pares de clases que presenten un elevado nivel de confusión y no estén incluidas en los ciclos anteriores. Al igual que en los ejemplos mostrados previamente, se incluye una valoración lingüística además de la numérica.

  Prototipo: `[On the one hand / On the other hand], the following pairs are [eventually / often / usually] misleaded: Class [class1] is confused with class [class2] in [percentage]% of cases.`

  Ejemplo: `On the one hand, the following pairs are eventually misleaded: class headlamps is confused with class build wind float in 10.34% of cases.`

III-B. Explicación local de una instancia

El segundo nivel es la explicación local, que se orienta a explicar cuál es el resultado de la clasificación obtenida al aplicar el clasificador sobre una nueva instancia. La información que se incluye en la explicación local se refiere al recorrido por el árbol de clasificación desde la raíz hasta una hoja, determinado por las condiciones que se cumplen en los diferentes nodos del árbol para la instancia que se quiere clasificar. La versión actual del modelo que hemos definido para la generación de explicaciones en lenguaje natural, se aplica únicamente a atributos de tipo numérico, lo que nos permite dar una cierta flexibilidad en la explicación, para considerar posibles alternativas a la clasificación real. Para ello incluimos una cierta tolerancia en cuanto a los valores umbral de las condiciones, para de este modo contemplar que se puedan dar pequeñas variaciones en el valor de un atributo, que pudieran derivar en una clasificación diferente. Los datos de entrada para la explicación local son la instancia a clasificar, el árbol de clasificación y el valor de tolerancia permitido (por defecto, 5 % sobre el valor de cada atributo).

La planificación de la explicación local contiene los siguientes elementos:

- **Descripción de la clase**, donde se expresa cuál es el resultado de la clasificación y un resumen lingüístico de los valores de los atributos que han dado lugar a dicha clasificación. En el resumen se incluyen, para cada atributo X expresiones del tipo "X es A", donde A es un valor lingüístico predefinido.

  Prototipo: `[Object] is type [output class] because its [attribute1] is [lingTerm1Attribute1] ([or [lingTerm2Attribute1]]), its [attribute2] and [attribute3] are [lingTerm1Atributo1...], ... and its [attributeN] is [lingTerm1AttributeN].`

  Ejemplo: `Beer is type Porter because its strength is standard and its color is brown.`

- **Explicaciones alternativas**, que se construyen en base al umbral de tolerancia mencionado anteriormente. Se ha establecido un margen de tolerancia del 5 % para cada una de las condiciones nodo que justifican la clasificación, de modo que se exploran y se incluyen en la explicación las posibles clasificaciones alternativas que se obtendrían en caso de que los valores de los atributos cumpliesen las condiciones dentro del margen de tolerancia.

  Prototipo: `However, this [object] may be also [alternativeClass1] because its [alternativeAttribute1] is quite close to the split value ([thresholdValue]). For these specific values, it is [unlikely / quite likely / just as likely] to be [alternativeClass1].`

  Ejemplo: `However, this beer may be also Stout because its color is quite close to the split value (30.45). For these specific values, it is just as likely to be Stout.`

Por último también se incorporan en la explicación alternativa aquellas clases para las cuales hay un elevado nivel de confusión en general con la clase original. Para ello se tiene en cuenta la matriz de confusión en lo que respecta a las clases implicadas, adoptando por tanto una cierta perspectiva global. Así, si las clases tienen, en general, un

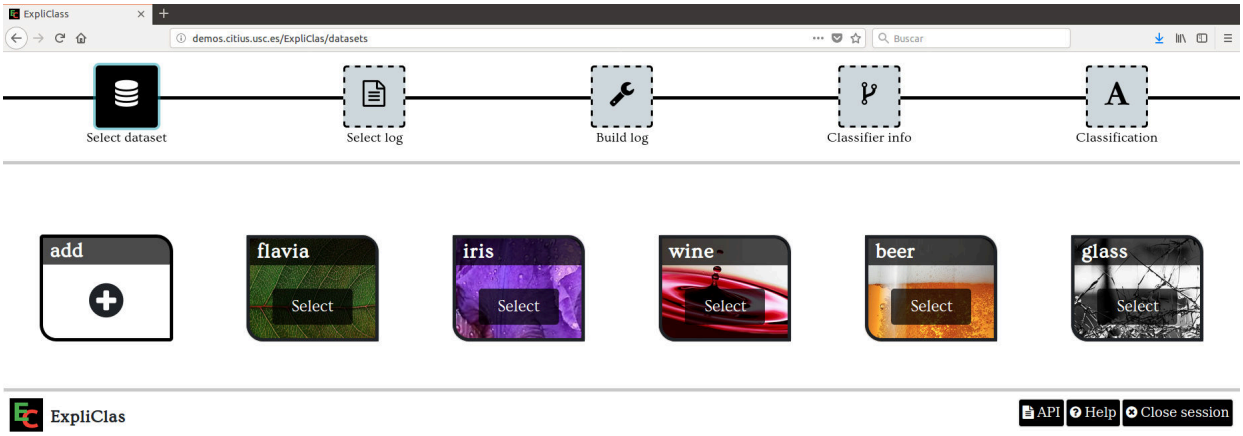


Figura 1. Página de inicio del Servicio Web ExpliClas [1].

elevado nivel de confusión, la explicación enfatiza este aspecto, mientras que si el nivel de confusión es bajo se presentará como un caso de cierta excepción. Mostramos a continuación un ejemplo de esta última situación:

Prototipo: `But [alternativeClass1] will be an exception because class [outputClass] is confused with [alternativeClass1] only in [percentage]% of cases.`

Ejemplo: `But Stout will be an exception because class Porter is confused with Stout only in 2% of cases.`

IV. Algunos Casos de Uso

Una vez descritos los elementos que componen cada explicación, veremos en esta sección dos ejemplos completos, con los que ilustraremos el funcionamiento de nuestra propuesta paso a paso. En ambos casos se aprenden clasificadores utilizando el algoritmo C4.5 [10], en la implementación disponible en Weka (J48) [16], [17]. Tanto los dos ejemplos mostrado (IRIS y FLAVIA), como otros disponibles, se pueden reproducir con el servicio Web ExpliClas [1] (Fig. 1).

IV-A. Conjunto de datos IRIS

El conjunto de datos IRIS (uno de los más conocidos del repositorio [18]) está formado por 150 instancias, 4 atributos numéricos y 3 clases. El árbol de clasificación generado por Weka (Fig. 2) está formado por 9 nodos totales, 5 de ellos nodos-hoja que deciden la clasificación y los 4 nodos restantes con las condiciones (comparaciones sobre los valores de los atributos) para decidir la clasificación. Se trata, por tanto, de un árbol simple que utilizaremos como primer ejemplo.

La explicación global generada en este caso es la siguiente:

```
There are 3 types of iris:
Setosa, Virginica and Versicolor.
This classifier is very reliable
because correctly classified
instances represent 96%.
```

```
Petal-Width <= 0.6: 1.0 (50.0)
Petal-Width > 0.6
|   Petal-Width <= 1.7
|   |   Petal-Length <= 4.9: 2.0 (48.0/1.0)
|   |   Petal-Length > 4.9
|   |   |   Petal-Width <= 1.5: 3.0 (3.0)
|   |   |   Petal-Width > 1.5: 2.0 (3.0/1.0)
|   Petal-Width > 1.7: 3.0 (46.0/1.0)
```

Figura 2. Árbol de clasificación correspondiente al conjunto de datos IRIS (captura de pantalla de Weka [17]).

La explicación local, para la instancia de la Fig. 3 (Sepal-Length: 5.6, Sepal-Width: 3, Petal-Length: 4.1, Petal-Width: 1.3) es la siguiente:

```
Iris is type Virginica because
its petal-length and petal-width
are medium.
```

En este caso, la explicación consiste en indicar los valores lingüísticos correspondientes a los valores numéricos de los atributos que han dado lugar a la clasificación, tal y como se detalla en la figura.

Sin embargo, si tomamos una instancia cuyos valores sean precisamente los de umbrales de los nodos intermedios (Sepal-Length: 5.6, Sepal-Width: 3, **Petal-Length: 4.9**, **Petal-Width: 0.6**), la explicación resulta más extensa:

```
Iris is type Setosa because its
petal-width is low.
However, this iris may be also
Virginica because its petal-width
is quite close to the split value
(0.6).
It may be also Versicolor because
its petal-width and petal-length
are quite close to the split values
(0.6 and 4.9, respectively). For
these specific values it is just
as likely to be Virginica and
```

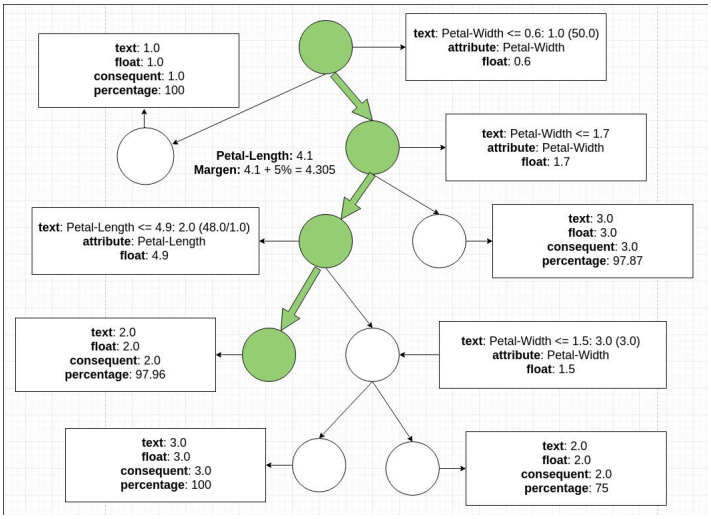


Figura 3. Clasificación de la instancia Sepal-Length: 5.6, Sepal-Width: 3, Petal-Length: 4.1, Petal-Width: 1.3.

```
Versicolor. But Virginica and
Versicolor will be an exception
because class Setosa is confused
with Virginica and Versicolor
only in 2% and 0% of cases,
respectively.
```

En este caso, la clasificación realizada es como clase Setosa. Sin embargo, al ser los valores de la instancia idénticos a los umbrales, y entrar en el rango de la tolerancia establecida del 5 %, se consideran como alternativas las dos ramas del nodo raíz y las del nodo que clasifica por longitud. Todas estas alternativas conducen a las clases Virginica y Versicolor. En ambos casos se indica el valor umbral que lo justifica y se valora la situación como que podría ser indistintamente tanto una como otra. Sin embargo, se introduce un matiz de carácter global, puesto que de acuerdo con la matriz de confusión del clasificador, la confusión de la clase Setosa con las clases Virginica y Versicolor es muy poco frecuente:

$$\begin{pmatrix} & Set. & Virg. & Vers. \\ Set. & 49 & 1 & 0 \\ Virg. & 0 & 47 & 3 \\ Vers. & 0 & 2 & 48 \end{pmatrix}$$

IV-B. Conjunto de datos FLAVIA

En esta sección discutimos un caso más realista. FLAVIA[1] es un proyecto de código abierto en el que se abordó la creación de un conjunto de datos para la clasificación automática de hojas en la región de Yangtze Delta (próxima a Shanghai) en China. El conjunto de datos está formado por 1800 muestras de hojas (15 atributos) que corresponden a 32 clases diferentes. Una red neuronal es capaz de clasificar todas las hojas con una tasa de acierto superior al 90 % [19]. Sin embargo, la clasificación se basa en un modelo de caja negra que una persona no puede entender. El árbol construido por el algoritmo J48 de Weka contiene 449 nodos (225 nodos-hoja) y una tasa de acierto de clasificación del 70.44 % (considerando *10-fold cross-validation*). Se puede apreciar cómo pasar de un modelo de caja negra a un modelo de caja blanca supone en este caso una reducción apreciable en precisión. Además, aunque el modelo generado es de caja blanca, el elevado número de clases, atributos y nodos hace que la interpretación no sea sencilla, incluso para un experto en botánica.

En [20], presentamos los resultados de una encuesta en la que demostramos la utilidad de generar explicaciones en lenguaje natural asociadas a clasificaciones hechas por un conjunto de reglas borrosas aprendidas sobre un subconjunto de los datos de FLAVIA, con 310 instancias, 3 atributos y 5 clases (Fig. 4). De los 15 atributos de partida (que caracterizan propiedades geométricas y morfológicas) seleccionamos sólo los tres (Área, Perímetro y Diámetro) que un experto en botánica consideró útiles a fin de explicar en lenguaje natural el proceso de clasificación; prestando atención únicamente a la forma de la hoja. En esta sección, consideramos el mismo conjunto de datos usado en [20]. La explicación global es la siguiente:

```
There are 5 types of flavia:
Aesculus chinensis, Berberis
anhweiensis, Cercis chinensis,
Phoebe zhennan and Lagerstroemia
indica.
This classifier is very reliable
because correctly classified
instances represent 90.97%. There
may be some confusion among samples
related to some types of flavia.
But among all of them the pair
[Cercis chinensis; Phoebe zhennan]
is the most confused.
```

La matriz de confusión correspondiente (ordenada según las 5 clases de hoja en la Fig. 4) es:

$$\begin{pmatrix} 60 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 55 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 63 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 52 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 52 \end{pmatrix}$$

El árbol construido en este caso contiene sólo 25 nodos (13 nodos-hoja) y una tasa de acierto de clasificación del 90.97 % (considerando *10-fold cross-validation*).

ExpliClas permite introducir a mano el valor numérico de los atributos cuando el objeto a clasificar no coincide con ninguna de las instancias en el conjunto de datos. Por ejemplo, la explicación local para la hoja en la Fig. 5 sería la siguiente. Nótese que una sencilla comparativa visual entre las figuras 4 y 5 permite verificar cualitativamente la explicación dada.

```
Flavia is type Cercis chinensis
because its area is not very
small and its perimeter is small.
However, this flavia may be
```

[1] http://flavia.sourceforge.net/

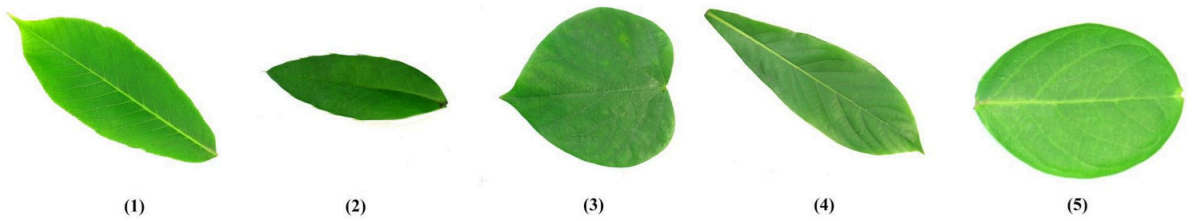


Figura 4. Las 5 clases en la versión reducicada de FLAVIA: (1) Aesculus chinensis, (2) Berberis anhweiensis, (3) Cercis chinensis, (4) Phoebe zhennan, (5) Lagerstroemia indica.

Figura 5. Ejemplo de hoja a clasificar (Área: 349.045, Perímetro: 2.964,304, Diámetro: 666,647).

```
also Phoebe zhennan because its
perimeter is quite close to the
split value (3,042.19). For these
specific values it is just as
likely to be Phoebe zhennan. But
Phoebe zhennan will be an exception
because class Cercis chinensis is
confused with Phoebe zhennan in
8.33% of cases.
```

V. Conclusiones y Trabajo Futuro

En este trabajo hemos presentado un modelo para la generación de explicaciones (globales y locales) en lenguaje natural sobre clasificaciones hechas con árboles de decisión con atributos numéricos. El modelo está implementado en el servicio web ExpliClas [1]. Como trabajo futuro, realizaremos una validación exhaustiva del modelo con usuarios reales y refinaremos las explicaciones según la realimentación recibida. Adicionalmente, extenderemos el modelo de explicación para considerar atributos categóricos y algoritmos de clasificación de caja gris, como árboles de decisión borrosos, entre otros.

Agradecimientos

Jose M. Alonso es Investigador Ramón y Cajal (RYC-2016-19802). Este trabajo está financiado por los proyectos TIN2017-90773-REDT (iGLN), TIN2017-84796-C2-1-R (BIGBISC), TIN2014-56633-C3-1-R (BAI4SOW) y TIN2014-56633-C3-3-R (ABS4SOW) (Ministerio de Economía y Competitividad) y GRC2014/030 y "Acreditación 2016-2019, ED431G/08" (Xunta de Galicia), todos con cofinanciación FEDER.

Referencias

[1] B. López-Trigo, J. M. Alonso, and A. Bugarín, "ExpliClas: Web service for the automatic explanation in natural language of classification models in data mining," 2018, http://demos.citius.usc.es/ExpliClas/.

[2] K. Panetta, "Gartner top 10 strategic technology trends for 2018," 2017, https://www.gartner.com/smarterwithgartner/gartner-top-10-strategic-technology-trends-for-2018/.

[3] S. Barocas and D. Boyd, "Computing ethics. engaging the ethics of data science in practice," *Communications of the ACM*, vol. 60, no. 11, pp. 23–25, 2017.

[4] Parliament and Council of the European Union, "General data protection regulation (GDPR)," 2016, http://data.europa.eu/eli/reg/2016/679/oj.

[5] D. Gunning, "Explainable Artificial Intelligence (XAI)," Defense Advanced Research Projects Agency (DARPA), Arlington, USA, Tech. Rep., 2016, DARPA-BAA-16-53.

[6] M. T. Ribeiro, S. Singh, and C. Guestrin, "Why should I trust you? explaining the predictions of any classifier," in *Proceedings of the ACM SIGKDD Conference on Knowledge Discovery and Data Mining (KDD)*, San Francisco, USA, 2016, pp. 1–10.

[7] L. A. Hendricks, Z. Akata, M. Rohrbach, J. Donahue, B. Schiele, and T. Darrell, "Generating visual explanations," in *Proceedings of the European Conference on Computer Vision (ECCV)*, Amsterdam, The Netherlands, 2016, pp. 3–19.

[8] K. Darlington, "Explainable AI systems: Understanding the decisions of the machines," 2017, openMind, BBVA Group, https://www.bbvaopenmind.com/en/explainable-ai-systems-understanding-the-decisions-of-the-machines/.

[9] J. Quinlan, "Induction of decision trees," *Machine Learning*, vol. 1, no. 1, pp. 81–106, 1986.

[10] J. R. Quinlan, *C4.5: Programs for Machine Learning*. Morgan Kaufmann Publishers, San Mateo, CA, 1993.

[11] L. Breiman, J. Friedman, R. Olshen, and C. Stone, *Classication and Regression Trees*, 1st ed. Wadsworth, 1984.

[12] A. Gatt and E. Krahmer, "Survey of the state of the art in natural language generation: Core tasks, applications and evaluation," *Journal of Artificial Intelligence Research*, vol. 61, pp. 65–170, 2018.

[13] E. Reiter and R. Dale, *Building natural language generation systems*. Cambridge University Press, 2000.

[14] L. A. Zadeh, "A new direction in AI: Toward a computational theory of perceptions," *Artificial Intelligent Magazine*, vol. 22, no. 1, pp. 73–84, 2001.

[15] A. Gatt and E. Reiter, "SimpleNLG: a realisation engine for practical applications," in *Proceedings of the European Workshop on Natural Language Generation (ENLG)*, Athens, Greece, 2009, pp. 90–93.

[16] I. H. Witten, E. Frank, M. A. Hall, and C. J. Pal, *Data Mining: Practical Machine Learning Tools and Techniques*, 4th ed. Morgan Kaufmann, 2016.

[17] The University of Waikato, "Weka 3: Data Mining Software in Java," 2018, https://www.cs.waikato.ac.nz/ml/weka/.

[18] The University of California at Irvine, "UCI machine learning repository," 2018, https://archive.ics.uci.edu/ml.

[19] S. Gang Wu, F. Sheng Bao, E. You Xu, Y.-X. Wang, Y.-F. Chang, and Q.-L. Xiang, "A leaf recognition algorithm for plant classification using probabilistic neural network," in *IEEE International Symposium on Signal Processing and Information Technology*, 2007, pp. 1–6.

[20] J. M. Alonso, A. Ramos-Soto, E. Reiter, and K. van Deemter, "An exploratory study on the benefits of using natural language for explaining fuzzy rule-based systems," in *IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*, Naples, Italy, 2017, pp. 1–6, http://dx.doi.org/10.1109/FUZZ-IEEE.2017.8015489.

Descripción de series de tiempo utilizando Fuzzy Piecewise Linear Segments

Juan Moreno-Garcia, Antonio Moreno-Garcia
Universidad de Castilla-La Mancha
Escuela de Ingeniería Industrial
Toledo, España
juan.moreno@uclm.es, antmorgarcia@gmail.com

Luis Jimenez-Linares, Luis Rodriguez-Benitez
Universidad de Castilla-La Mancha
Escuela Superior de Informática
Ciudad Real, España
luis.jimenez@uclm.es, luis.rodriguez@uclm.es

***Abstract*—Es muy frecuente la utilización de series temporales en gran cantidad de ámbitos, siendo necesario la obtención de información lo más detallada posible a partir de estas series. Hay diferentes posibilidades de mostrar esta información, por ejemplo, en forma de representación gráfica. Aunque cada día es más frecuente la necesidad de representar información utilizando el lenguaje natural, es decir, mediante una descripción lingüística. En este trabajo se presenta una técnica para obtener descripciones lingüísticas a partir de series temporales utilizando una representación denominada Fuzzy Piecewise Linear Segments. Se detalla la forma de obtener la información de una serie modelada utilizando esta representación y los pasos necesarios para generar la descripción utilizando plantillas. Finalmente se muestra algunos ejemplos de su uso.**

***Index Terms*—Descripción Lingüística, Series de Tiempo, Fuzzy Piecewise Linear Segments, Lógica Difusa**

I. Introduction

En un gran número de aplicaciones se necesitan las series de tiempo. Usualmente estas series se representan en forma de datos en bruto. Este formato tiene varios problemas siendo el más importante la gran cantidad de memoria necesaria para su almacenamiento. Además, esta representación presenta el problema añadido de que su procesamiento es costoso en tiempo. Por esta razón se han desarrollado otras formas alternativas para almacenar las series de tiempo, lo que permite reducir el consumo de memoria y la ejecución de operaciones más eficientemente. Una de las técnicas más utilizadas se denomina "segmentos lineales a trozos" (Piecewise Linear Segment – PLS) que consiste en la representación de las series utilizando un conjunto de segmentos, donde cada uno de ellos corresponde a un trozo de la serie. Hay diferentes métodos para obtener esta representación en la literatura [1]–[3]. Además, cada día es más frecuente la generación de informes de datos utilizando el lenguaje natural. Esto se conoce como Descripción Lingüística de Datos [4]. Es una línea de investigación que se puede considerar clásica pero que actualmente está teniendo un fuerte auge.

El principal objetivo de este trabajo consiste en diseñar un nuevo método de generación de descripciones lingüísticas de series de tiempo. Muchos de los métodos presentados en la literatura hacen uso de la lógica difusa para obtener la descripción [4]. Por todo ello, se propone el uso de una representación de series que utiliza la lógica difusa [5] para generar descripciones lingüísticas directamente desde dicha representación. Esta representación se ha denominado *Fuzzy Piecewise Linear Segments* (FPLS) y tiene la ventaja de que recoge la imprecisión creada en el proceso de generación de los segmentos. Cada segmento de PLS se convierte al dominio difuso utilizando las técnicas detalladas en [5].

El documento está estructurado de la siguiente forma. En la Sección II se presenta una breve recopilación de los trabajos más destacados en este ámbito de investigación. En la Sección III se expone la representación FPLS. En la Sección IV se detalla la forma de obtener información de un FPLS y cómo generar las descripciones en base a ésta. Finalmente, la Sección V muestra las conclusiones y trabajos futuros.

II. Estado del arte

La descripción de series de tiempo (TS) es un campo de investigación con un gran número de publicaciones en los últimos 10 años. Recientemente Marín and Sánchez [4] han publicado un trabajo que recopila las publicaciones más destacadas en la literatura. Estos autores distinguen entre Generación de Lenguaje Natural (Natural Language Generation – NLG) y la Generación de Descripciones Lingüísticas de TS (Generation of Linguistic Descriptions of Time Series – GLiDTS). Se podría afirmar que este trabajo está relacionado con GLiDTS.

En general, la lógica difusa (Fuzzy Logic – FL) es un componente esencial en este tipo de sistemas y ha sido aplicada de diferentes formas. Se presentarán algunos trabajos destacados que utilizan la FL para describir TS y otros que funcionan junto con otras tecnologías. Por ejemplo, algunas propuestas combinan sistemas OLAP [6], diseñados para su utilización en la toma de decisión y aplicados en una amplia variedad de dominios de aplicación, con la FL. En esta línea se encuentra una nueva aproximación que hace uso de particiones jerárquicas difusas del tiempo y la evaluación de sentencias cuantificadas [7], [8]. La descripción final consiste en una colección de este tipo de sentencias. Otro ejemplo es *GALiWeather* [9] que mezcla técnicas de computación de percepciones con estrategias para la descripción lingüística

Supported by the project TIN2015-64776-C3-3-R of the Science and Innovation Ministry of Spain, co-funded by the European Regional Development Fund (ERDF).

de datos junto con un sistema de NLG. El sistema ofrece información sobre el tiempo que es utilizada por la Agencia de Meteorología Gallega. Actualmente, *GALiWeather* es un servicio público ofrecido para la predicción del tiempo.

Otra posibilidad consiste en generar un modelo difuso a partir de la TS y calcular una estructura de alto nivel. Por ejemplo, en [10], [11] se presentó una estructura para modelar los eventos que ocurren en una TS. El modelo final contiene los mínimos y máximos utilizando [11]. Esta estructura también permite la búsqueda de eventos: el resultado obtenido de esta búsqueda genera la descripción lingüística final que está formada por sentencias de texto que son añadidas cuando se identifica un nuevo evento. El sistema necesita un experto en el campo de aplicación.

Otras propuestas consisten en transformar la TS en otra representación y entonces fuzzificarla. Por ejemplo, Kacprzyk et al. [12] propusieron el uso de tendencias identificando segmentos lineales de una TS. Posteriormente representan la serie mediante un conjunto de atributos que caracterizan las tendencias (la pendiente del segmento, la calidad de la aproximación y la longitud de la tendencia). El campo de aplicación que seleccionaron fue la evaluación de un fondo de inversión en un período de tiempo. En otras situaciones la información proviene de diversas fuentes y debe ser agregada apropiadamente obteniendo una nueva representación que se trata utilizando FL [13].

Otras investigaciones crean modelos específicos para generar descripciones lingüísticas. Granular Linguistic Model of Phenomena (GLMP) puede ser clasificado dentro de esta categoría. Alvarez-Alvarez y Triviño [14] introdujeron la aplicación de GLMP para generar descripciones de la calidad de la marcha humana y Sánchez-Valdés y Triviño mejoraron los resultados utilizando una máquina de estados finitos difusa [15]. GLMP ha sido utilizado en aplicaciones de tipo muy diverso.

III. Descripción de FPLS

Una FPLS es una conjunto de segmentos que han sido fuzzificados a partir de los segmentos de una PLS. Para un instante dado ofrecen un número difuso que es el valor de salida. Formalmente, una FPLS está compuesta por un conjunto de segmentos lineales difusos que serán representados como $fpls_{t_i,t_{i+1}}$. La Ecuación 1 representa formalmente a una FPLS.

$$FPLS(T) = \{fpls_{t_0,t_1}, fpls_{t_1,t_2}, \ldots, fpls_{t_{|FPLS|-1},t_{|FPLS|}}\} \quad (1)$$

donde cada segmento $fpls_{t_i,t_{i+1}} = \{m_{t_i,t_{i+1}}, c_{t_i,t_{i+1}}, p_{t_i,t_{i+1}}\}$ siendo $m_{t_i,t_{i+1}}$ y $c_{t_i,t_{i+1}}$ la pendiente y la constante de la recta que define el segmento respectivamente, y $p_{t_i,t_{i+1}}$ el promedio de la tasa de error (Ecuación 2).

$$p_{t_i,t_{i+1}} = \frac{\sum_{k=i}^{i+1} \frac{|fpls_{t_i,t_{i+1}}(t_k) - y_k|}{y_k}}{t_{i+1} - t_i + 1} \quad (2)$$

donde t_i y t_{i+1} son los instantes de comienzo y de fin del segmento, $fpls_{t_i,t_{i+1}}(t_k)$ es el valor del segmento $fpls_{t_i,t_{i+1}} \in FPLS$ en el instante t_k e y_k es el valor de la serie Y en el instante t_k.

El promedio de la tasa de error es una medida que calcula la media de la tasa del error para cada segmento utilizando la Ecuación 2.

Cada segmento lineal difuso $fpls_{t_i,t_{i+1}}$ devuelve un número difuso triangular fn_k para un instante $t_k \in \mathbb{R}$: $fn_k = fpls_{t_i,t_{i+1}}(t_k)$. Utilizando estos tres valores, el número difuso de salida fn_k se puede calcular tomando como entrada un valor t_k. La Ecuación 3 muestra la forma en que un segmento $fpls_{t_i,t_{i+1}}$ calcula el número difuso fn_k.

$$fn_k = \begin{cases} 0 & if \quad t_k < t_i \\ calcular(fpls_{t_i,t_{i+1}}, t_k) & if \quad t_i \leq t_k \leq t_{i+1} \\ 0 & if \quad t_{i+1} < t_k \end{cases} \quad (3)$$

donde $calcular(fpls_{t_i,t_{i+1}}, t_k)$ es una función que calcula fn_k^{DOWN}, fn_k^{fpls} y fn_k^{UP} que componen el número difuso triangular $fn_k = \{fn_k^{DOWN}, fn_k^{fpls}, fn_k^{UP}\}$.

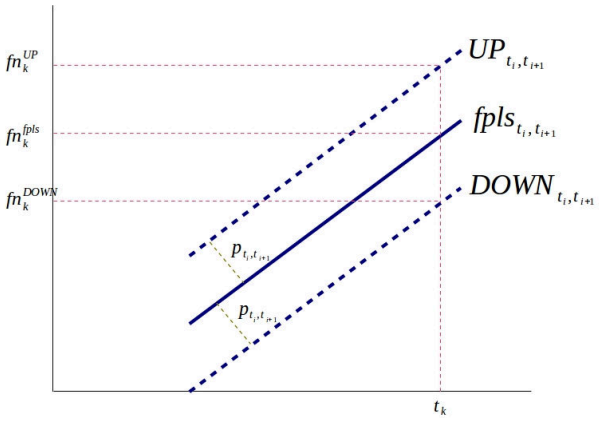


Fig. 1. Procedimiento para el cálculo de fn_k a partir de un segmento difuso.

Para los valores de t_k menores que t_i o mayores que t_{i+1}, la salida es cero. Para valores entre t_i y t_{i+1} se calcula utilizando dos segmentos paralelos con respecto a $fpls_{t_i,t_{i+1}}$ llamados $UP_{t_i,t_{i+1}}$ y $DOWN_{t_i,t_{i+1}}$ (Figura 1). $p_{t_i,t_{i+1}}$ se necesita para calcular los segmentos $UP_{t_i,t_{i+1}}$ y $DOWN_{t_i,t_{i+1}}$, que están por encima y por debajo en el eje Y respecto a $fpls_{t_i,t_{i+1}}$, es decir:

- $UP_{t_i,t_{i+1}} = (m_{t_i,t_{i+1}} * x) + c_{t_i,t_{i+1}} + p_{t_i,t_{i+1}}$
- $DOWN_{t_i,t_{i+1}} = (m_{t_i,t_{i+1}} * x) + c_{t_i,t_{i+1}} - p_{t_i,t_{i+1}}$

Los valores fn_k^{DOWN}, fn_k^{fpls} y fn_k^{UP} que definen fn_k se calculan como el valor de salida de los segmentos lineales $DOWN_{t_i,t_{i+1}}$, $fpls_{t_i,t_{i+1}}$ y $UP_{t_i,t_{i+1}}$ para un instante t_k y en orden creciente, es decir:

- $fn_k^{DOWN} = DOWN_{t_i,t_{i+1}}(t_k)$
- $fn_k^{fpls} = fpls_{t_i,t_{i+1}}(t_k)$
- $fn_k^{UP} = UP_{t_i,t_{i+1}}(t_k)$

TABLE I
UN FPLS DE EJEMPLO. FUENTE MORENO-GARCIA ET AL. [5]

$fpls_{t_i,t_{i+1}}$	$m_{t_i,t_{i+1}}$	$c_{t_i,t_{i+1}}$	$p_{t_i,t_{i+1}}$
$fpls_{0.0,\ 17.0}$	-0.0432	0.6786	0.313
$fpls_{17.0,\ 49.0}$	0.0339	-0.5487	0.5544
$fpls_{49.0,\ 91.0}$	-0.0249	2.1815	0.4561
$fpls_{91.0,\ 94.0}$	-0.0007	0.1543	0.0905
$fpls_{94.0,\ 131.0}$	0.0229	-2.1022	0.4582

Estos valores representan un número difuso triangular simétrico (Symmetric Triangular Fuzzy number – STFN) con la etiqueta lingüística "aproximadamente fn_k" y una función de pertenencia que se muestra en la Ecuación 4.

$$\mu_{fn_k}(y) = \begin{cases} 0 & if \quad |fn_k^{fpls} - y| > fn_k^{UP} - fn_k^{fpls} \\ 1 & if \quad y = fn_k^{fpls} \\ \frac{|fn_k^{fpls} - y|}{fn_k^{UP} - fn_k^{fpls}} & if \quad |fn_k^{fpls} - y| < fn_k^{UP} - fn_k^{fpls} \end{cases} \tag{4}$$

Como el soporte de fn_k se calcula en base al promedio de la tasa de error para el segmento obtenido, el uso de la media es apropiado para "medir la incertidumbre", es decir, cuanto mayor es el error, mayor es el soporte del número difuso.

FPLS permite realizar diferentes operaciones. Actualmente están definidas la comparación entre dos FPLSs que representan dos TS o a una subsecuencia de una TS, que conceptual y prácticamente son lo mismo. La idea básica del funcionamiento del método consiste en realizar un conjunto de comparaciones a instantes de tiempo igualmente espaciados sobre las dos FPLS. Los números difusos obtenidos para cada FPLS como salida en cada instante pueden ser comparados mediante operaciones de la lógica difusa, y posteriormente recoger el resultado en un valor que agregue las comparaciones realizadas representando la similitud/disimilitud de ambas FPLS, y por tanto de ambas TS o subsecuencias, según el caso. Para comparar dos STFN se utilizó una medida que toma el valor del área comprendida entre ellos considerando el valor de los números difusos a comparar.

IV. Generación de las descripciones

De una FPLS se puede obtener información para generar las descripciones lingüísticas. Esta información se va a clasificar en dos niveles:

- De segmento: a este nivel se pueden generar descripciones lingüísticas que reflejan información sobre las tendencias, dado que un segmento representa una tendencia.
- De FPLS: en este caso se mostrará información de la TS completa o de una parte de ella ya que una FPLS representa una TS.

Primero se presentará la información que se puede obtener a nivel de una tendencia (segmento), más concretamente, se detallará la siguiente:

- Tipo de tendencia: se obtendrá una etiqueta lingüística por segmento que se ha denominado $type_{i+1}$ y que indica el tipo de tendencia obtenida para el segmento $i+1$. Estará en función de la pendiente del segmento que modela. La pendiente de una recta es mayor o menor que 0 si la recta es creciente o decreciente respectivamente. Se distinguirán tres tipos de segmento: descendente, plana y ascendente (Tabla II), aunque se puede redefinir este conjunto de etiquetas para incorporar más grados. $type_{i+1}$ toma de valor la etiqueta de máxima pertenencia de las de ese conjunto (Ecuación 5).

TABLE II
CONJUNTO DE ETIQUETAS LINGÜÍSTICAS $TYPE$.

Label	a	b	c	d
descendente	$-\infty$	$-\infty$	-0.1	0.0
plana	-0.1	0.0	0.0	0.1
ascendente	0.0	0.1	∞	∞

TABLE III
CONJUNTO DE ETIQUETAS LINGÜÍSTICAS $POWER$.

Label	a	b	c	d
fuerte descenso	-90	-90	-45	-40
descenso	-45	-40	-2	0
llano	-2	0	0	2
ascenso	0	2	40	45
fuerte ascenso	40	45	90	90

$$type_{i+1} = argmax_T \ \ \mu_T(m_{t_i,t_{i+1}}) \ \forall T \in TYPE \tag{5}$$

- Potencia de la tendencia: vendrá definida por el ángulo del segmento difuso ($arctan(m_{t_i,t_{i+1}})$) y para clasificarla se utilizará el conjunto de etiquetas lingüísticas $POWER$. La Ecuación 6 muestra la forma de obtener dicha etiqueta.

$$power_i = argmax_P \ \ \mu_P(arctan(m_{t_i,t_{i+1}})) \forall P \in POWER \tag{6}$$

  $power_i$ se asigna a la etiqueta lingüística $P \in POWER$ que obtiene el máximo valor de pertenencia para el ángulo del segmento, es decir, la etiqueta que representa mejor el incremento o el decremento del segmento difuso. La Tabla III muestra un conjunto ejemplo que utiliza etiquetas difusas donde el soporte está considerado como el ángulo de la pendiente medido en grados sexagesimales.
- Duración: se definirá un conjunto de etiquetas llamado $LONG$ para representar la longitud del segmento. Cada segmento $fpls_{t_i,t_{i+1}}$ cuenta con sus instantes de inicio

TABLE IV
CONJUNTO DE ETIQUETAS LINGÜÍSTICAS $LONG$.

Label	a	b	c	d
muy corta	0	0	2.5	5
corta	2.5	5	15	20
un poco corta	15	20	30	35
media	30	35	45	50
larga	45	50	55	65
muy larga	55	65	∞	∞

TABLE V
Conjunto de etiquetas lingüísticas LOC.

Label	a	b	c	d
inicio	0	0	5	10
inicio pasado	5	10	35	40
centro	35	40	60	65
centro pasado	60	65	90	95
final	90	95	100	100

y fin (t_i y t_{i+1}) que permitirán calcular la duración mediante la Ecuación 7.

$$long_i = argmax_L \ \ \mu_L(t_{i+1} - t_i) \ \forall L \in LONG \quad (7)$$

Como puede verse se realiza de forma similar a los casos anteriores. Las etiquetas de $LONG$ permitirán indicar el tamaño de los segmentos. La Tabla IV muestra que será utilizado posteriormente.

- Localización: se trata de definir la localización de la tendencia en el tiempo. Para ello se utilizará el instante central de ocurrencia de la tendencia y se fuzzificará utilizando un conjunto de etiquetas lingüísticas denominado LOC con un soporte en $[0\%, 100\%]$ del total de la longitud de la TS descrita. La Ecuación 8 muestra la forma de seleccionar la etiqueta.

$$loc_i = argmax_L \ \ \mu_L\left(\frac{p_{cen}}{|TS|}\right) \ \forall L \in LOC \quad (8)$$

donde p_{cen} se calcula utilizando la Ecuación 9.

$$p_{cen} = \left(t_i + \frac{t_{i+1} - t_i}{2}\right) * 100 \quad (9)$$

La Tabla V muestra un ejemplo de este conjunto que será utilizado en los ejemplos.

El segundo nivel que se puede realizar la descripción es a nivel de la FPLS completa. Se puede detallar información general como por ejemplo el número de tendencias, la longitud media de cada una de ellas, número de mínimos y máximos locales, localización de éstos, etc. A continuación se detallará la forma de obtener la longitud media y la tendencia media de los segmentos de la TS (potencia media) y el cálculo de mínimos y máximos y su localización.

- Longitud media de los segmentos de la TS: se debe calcular el valor medio del segmento y se fuzzifica. Para calcular el valor medio se utiliza la Ecuación 10.

$$l_{med} = argmax_L \ \ \mu_L\left(\frac{|TS|}{|FPLS|}\right) \ \forall L \in LONG \quad (10)$$

donde la operación "| |" es la anchura del soporte de TS.

El valor obtenido ($\frac{|TS|}{|FPLS|}$) se fuzzificará utilizando el conjunto de etiquetas $LONG$ que define la longitud.

- Tendencia media de la TS: para obtener la potencia de la tendencia media se utilizará el Algoritmo 1. Éste defuzzifica la etiqueta que define la potencia de cada tendencia acumulando todos los valores de defuzzicación en v_{med} (Línea 3). Finalmente, se vuelve a fuzzificar el valor medio obtenido (Línea 5) utilizando el conjunto original de etiquetas u otro distinto (según se necesite) para la descripción final (Línea 6). Para realizar la defuzzificación hay diferentes propuestas en la bibliografía, algunas opciones interesantes se detallan en [16]. La opción utilizada en los ejemplos de este trabajo ha sido la media de máximos (Mean of Maximum – MoM).

Algorithm 1 Cálculo de longitud media de las tendencias

1: $v_{med} = 0.0$ {acumula la longitud}
2: **for** $i = 0$ **to** $|FPLS|$ **do**
3: $\quad v_{med} = v_{med} + defuzz(type_{i+1})$
4: **end for**
5: $v_{med} = \frac{v_{med}}{|FPLS|}$ {longitud media}
6: $type_{med} = argmax_{E_j} \ \mu_{E_j}(v_{med})$ {selecciona la etiqueta de máxima pertenencia}

- Mínimos y máximos y su localización: FPLS permite la localización de mínimos y máximos comprobando el tipo de tendencia para dos tendencias consecutivas. Si se verifica la Ecuación 11 o 12 se ha localizado un mínimo o un máximo respectivamente.

$$(type_i = descendente) \wedge (type_{i+1} = ascendente) \quad (11)$$

$$(type_i = ascendente) \wedge (type_{i+1} = descendente) \quad (12)$$

donde $descenso \in TYPE$ y $ascenso \in TYPE$.

La localización del máximo viene indicada por el instante final de $fpls_{t_i,t_{i+1}}$ o por el inicial de $fpls_{t_{i+1},t_{i+2}}$ (es el mismo instante, t_{i+1}). Dado que FPLS es una representación aproximada se puede realizar una fuzzificación de t_{i+1} en base a la localización de dicho instante dentro del soporte del tiempo (Ecuaciones 13 y 14).

$$min_k = \mu_{TIME}(t_{min}) \quad (13)$$

$$max_k = \mu_{TIME}(t_{max}) \quad (14)$$

donde t_{min} y t_{max} son los instantes donde se ha detectado el mínimo o el máximo respectivamente.

Una vez detallado la forma de extraer información de la FPLS se expondrá la forma de generar las descripciones lingüísticas a partir de la FPLS. Para ello es necesario el uso de plantillas que ayuden a la generación de las descripciones. Primeramente se definirá una plantilla que utiliza el tipo y la potencia de la tendencia, la longitud de la misma y su localización. Ésta es:

> Es una tendencia $T \in TYPE$ que muestra un $P \in POWER$ de una longitud $L \in LONG$ situada en LOC.

Utilizando el FPLS de la Tabla I y los conjuntos de etiquetas en las Tablas de la II a la V se obtienen los resultados que se muestran en la Tabla VI. Las etiquetas generadas se destacan en el texto.

TABLE VI
Un FPLS de ejemplo. Fuente Moreno-Garcia et al. [5]

$fpls_{t_i,t_{i+1}}$	Descripción lingüística
$fpls_{0.0,\ 17.0}$	Es una tendencia `descendente` que muestra un `descenso` de una longitud `corta` situada al `inicio pasado`.
$fpls_{17.0,\ 49.0}$	Es una tendencia `ascendente` que muestra un `ascenso` de una longitud `un poco corta` situada al `centro`.
$fpls_{49.0,\ 91.0}$	Es una tendencia `descendente` que muestra un `descenso` de una longitud `media` situada al `centro pasado`.
$fpls_{91.0,\ 94.0}$	Es una tendencia `plana` que muestra un `llano` de una longitud `muy corta` situada al `centro pasado`.
$fpls_{94.0,\ 131.0}$	Es una tendencia `descendente` que muestra un `ascenso` de una longitud `media` situada al `centro pasado`.

A continuación se expondrá un ejemplo utilizando el mismo FPLS que en el caso anterior que genera una descripción lingüística que detalla la longitud media de los segmentos, la tendencia media de la TS y los mínimos y máximos de la TS. La plantilla utilizada es la siguiente:

> La TS tiene una tendencia media $POWER$ y sus segmentos son de una longitud $LMEDIA$. En el min_k se presenta un mínimo y se encuentra un máximo en el max_k.

El resultado obtenido es el siguiente:

> La TS tiene una tendencia media `llana` y sus segmentos son de una longitud `un poco corta`. En el instante `inicio pasado` se presenta un mínimo y se encuentra un máximo en el `inicio pasado`.

V. Conclusiones y trabajos futuros

En este trabajo se ha presentado un nuevo método de generación de descripciones lingüísticas de TS a partir de la información capturada en una FPLS. Se ha mostrado cómo obtener información a partir de FPLS y qué se puede obtener a partir de la misma. También se ha detallado la forma en la que puede ser utilizada para generar descripciones lingüísticas. Se ha demostrado que FPLS contiene suficiente información de la TS para generar descripciones completas y complejas. Además, la forma de obtener dicha información es sencilla y eficiente permitiendo así la generación de descripciones de forma rápida.

Como trabajos futuros se pretende estudiar más detalladamente la información que se puede obtener de una FPLS. También se puede trabajar en la generación de descripciones del proceso de comparación de dos FPLS, por ejemplo, describir la comparación de partes de la serie que interesa comparar (por ejemplo, fases de un movimiento), o bien de partes que tienen un mayor parecido entre ellas. Cada una de estas partes puede corresponder a los valores que toma un sistema durante una fase. Finalmente se debe investigar en la creación de un marco de trabajo que permita generar las descripciones lingüísticas de una forma totalmente automática.

References

[1] E. Keogh, S. Chu, D. Hart, and M. Pazzani, "An online algorithm for segmenting time series," Proceedings 2001 IEEE International Conference on Data Mining, pp. 289–296, 2001.

[2] X. Huang, M. Matijaš, and J. A. K. Suykens, "Hinging Hyperplanes for Time-Series Segmentation," IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, vol. 24(8), 2013.

[3] E. Fuchs and T. Gruber and J. Nitschke, and B. Sick, "Online Segmentation of Time Series Based on Polynomial Least-Squares Approximations," IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 32(12), pp. 2232-2245, 2010.

[4] N. Marín, and D. Sánchez, "On generating linguistic descriptions of time series," Fuzzy Sets and Systems, vol. 285, pp. 6–30, 2016.

[5] A. Moreno-Garcia, J. Moreno-Garcia, Luis Jimenez-Linares, and Luis Rodriguez-Benitez, "Time series represented by means of fuzzy piecewise lineal segments," Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 318, pp. 156–167, 2017.

[6] A. Laurent, "Generating fuzzy summaries from fuzzy multidimensional databases," in: F. Hoffmann, D.J. Hand, N.M. Adams, D.H. Fisher, G. Guimarães (Eds.), IDA, in: Lecture Notes Computer Sciences, Springer, vol. 2189, pp. 24–33, 2001.

[7] R. Castillo-Ortega, N. Marín, and D. Sánchez, "A fuzzy approach to the linguistic summarization of time series," Journal of multiple-valued logic and soft computing, vol. 17(2-3), pp. 157–182, 2011.

[8] R. Castillo-Ortega, N. Marín, and D. Sánchez, "Linguistic query answering on data cubes with time dimension," International Journal of Intelligent Systems, vol. 26(10), pp. 1002–021, 2011.

[9] A. Ramos-Soto, A. Bugarin, and S. Barro and J. Taboada, "Linguistic descriptions for automatic generation of textual short-term weather forecasts on real prediction data," IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 23(1), pp. 44–57, 2015.

[10] J. Moreno-Garcia, L. Rodriguez-Benitez, J. Giralt, and E. del Castillo, "The generation of qualitative descriptions of multivariate time series using fuzzy logic," Applied Soft Computing, vol. 23, pp. 546-555, 2014.

[11] J. Moreno-Garcia, J. Abián-Vicén, L. Jimenez-Linares, and L. Rodriguez-Benitez, "Description of multivariate time series by means of trends characterization in the fuzzy domain," Fuzzy Sets and Systems, vol. 285, pp. 118–139, 2016.

[12] J. Kacprzyk, and A. Wilbik, "Linguistic summarization of time series using a fuzzy quantifier driven aggregation," Fuzzy Sets and Systems, vol. 159, pp. 1485–1499, 2008.

[13] D. Anderson, R.H. Luke III, J.M. Keller, M. Skubic, M. Rantz, and M. Aud, "Linguistic summarization of video for fall detection using voxel person and fuzzy logic", Computer Vision Image Understanding, vol. 113(1), pp. 80–89, 2009.

[14] G. Triviño, and M. Sugeno, "Towards linguistic descriptions of phenomena", International Journal of Approximate Reasoning, vol. 54(1), pp. 22–34, 2013.

[15] D. Sanchez-Valdes, and G. Triviño, "Computational Perceptions of uninterpretable data. A case study on the linguistic modeling of human gait as a quasi-periodic phenomenon", Fuzzy Sets and Systems, vol. 253, pp. 101–121, 2014.

[16] W. V. Leekwijck, E. E. Kerre., "Defuzzification: criteria and classification", Fuzzy Sets and Systems, vol. 108(2), pp. 159–178, 1999.