

VARIANZA DE UNA VARIABLE ALEATORIA DIFUSA. ESTUDIO DE DISTINTAS DEFINICIONES.

Inés Couso

Dep. Estadística e I.O. y D.M.
Universidad de Oviedo
e-mail: couso@pinon.ccu.uniovi.es

Susana Montes

Dep. Estadística e I.O. y D.M.
Universidad de Oviedo
e-mail: montes@uniovi.es

Luciano Sánchez

Dep. de Informática
Universidad de Oviedo
e-mail: luciano@ccia.uniovi.es

Resumen

En este trabajo introducimos una nueva definición de varianza de una variable aleatoria borrosa en el contexto de la teoría de probabilidades imprecisas y la comparamos con otras definiciones de la literatura. Nuestro objetivo principal es mostrar la utilidad de cada una de ellas en cada situación particular.¹

Palabras Clave: Variable aleatoria difusa, varianza, probabilidades imprecisas.

1. INTRODUCCIÓN

El concepto de variable aleatoria borrosa, que generaliza la definición clásica de variable aleatoria, fue introducido por Féron [6] en 1976 y modificado posteriormente por otros autores.

En este contexto, las generalizaciones de las definiciones de los parámetros asociados a una distribución de probabilidad pueden dividirse en dos grandes grupos: por una parte, se han definido algunos parámetros como la esperanza [14], la función de distribución en un punto [2, 10], la varianza [9] y la covarianza [12] de una variable aleatoria borrosa como valores difusos. Por otra parte, se ha definido, entre otros, la varianza [8, 11] como valor numérico (nítido). La introducción de estas últimas definiciones está motivada principalmente por el interés por parte de los autores en facilitar la toma de decisiones a partir de parámetros con valores numéricos y no borrosos.

En este trabajo observaremos que el concepto de varianza se puede generalizar al caso de variables aleatorias difusas de diferentes maneras. Consideraremos distintas definiciones de este concepto existentes en

¹Este trabajo ha sido financiado por los proyectos BFM2001-3515 y TIC2002-04036-C05-05, parcialmente financiados con fondos FEDER.

la literatura y propondremos una definición adicional, que se podrá enmarcar en un modelo de probabilidades imprecisas. Apoyándonos en ejemplos sencillos, observaremos las ventajas y limitaciones de cada definición en los diferentes contextos.

2. VARIABLES ALEATORIAS DIFUSAS

Dado que los conjuntos borrosos se han interpretado en la literatura de múltiples maneras, una variable aleatoria borrosa admite tantos otros significados. A continuación, vamos a revisar brevemente dos interpretaciones de las variables aleatorias borrosas ya existentes en la literatura, y vamos a introducir una nueva. De acuerdo con cada una de ellas, se resumirá la información proporcionada por la variable aleatoria borrosa mediante un modelo diferente.

En [14], Puri y Ralescu consideran que las observaciones de algunos experimentos aleatorios no dan lugar a salidas numéricas, sino que vienen representados por términos lingüísticos imprecisos. De acuerdo con esta idea, algunos autores consideran la variable aleatoria borrosa como una función medible, en el sentido clásico, entre cierta σ -álgebra de sucesos del espacio original y una σ -álgebra definida sobre una clase de subconjuntos borrosos de \mathbb{R} . En este contexto, se puede utilizar la distribución de probabilidad inducida por la variable aleatoria difusa para resumir la información probabilística que ésta proporciona (por ejemplo, podría generarse un modelo del tipo siguiente: la probabilidad de que el resultado sea “alto” es 0.5, la de que sea “mediano” es 0.25 y la de que sea “bajo” es 0.25).

Kruse y Meyer, por su parte, consideran en [10] una interpretación “posibilística” de los conjuntos borrosos. Según los autores, la variable aleatoria borrosa representa el conocimiento (vago, impreciso) existente acerca de una variable aleatoria (clásica), $X_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, a la que denominan “variable aleatoria original”. Así,

el grado de pertenencia de un punto x al conjunto borroso $\tilde{X}(\omega)$ representará el grado de posibilidad de que el verdadero valor $X_0(\omega)$ coincida con x . Los autores disponen, así, de los elementos necesarios para definir una medida de posibilidad sobre el conjunto de todas las variables aleatorias. Para cada variable aleatoria, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, definen su “grado de aceptabilidad” como el valor: $\text{acc}(X) = \inf_{\omega \in \Omega} \tilde{X}(\omega)(X(\omega))$. La función “acc” toma valores en el intervalo unidad. Por tanto, puede considerarse como la distribución de posibilidad asociada a una medida de posibilidad, $\Pi_{\tilde{X}}$, definida sobre el conjunto de todas las variables aleatorias. Así, $\text{acc}(X)$ representa el grado de posibilidad de que X sea la verdadera variable aleatoria que modela el experimento estudiado. En el caso particular de que la variable aleatoria borrosa sea un conjunto aleatorio (es decir, sus imágenes sean subconjuntos nítidos de \mathbb{R}), la función de aceptabilidad asigna el valor 1 a cierto conjunto de variables aleatorias y el valor 0 a todas las demás. En el caso aún más particular de que la variable aleatoria difusa coincida con una variable aleatoria clásica (cada imagen sea conjunto con un solo elemento) la función de aceptabilidad asignará el valor 1 a una sola variable aleatoria, que es la verdadera variable aleatoria que modela el experimento. En ese caso su observación es totalmente precisa. En este marco hemos construido (véase [3]) una medida de posibilidad sobre el conjunto de todas las distribuciones de probabilidad en \mathbb{R} . La distribución de posibilidad, $\pi_{P_{\tilde{X}}}$, que caracteriza dicha medida de posibilidad se define de la forma:

$$\pi_{P_{\tilde{X}}}(Q) = \sup\{\text{acc}(X) \mid P_X = Q\} =$$

$$\Pi_{\tilde{X}}(\{X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ medible} \mid P_X = Q\}).$$

($\pi_{P_{\tilde{X}}}(Q)$ representa el grado de posibilidad de que la variable aleatoria original sea una de aquéllas que inducen la distribución de probabilidad Q en \mathbb{R}). La medida de posibilidad $\Pi_{P_{\tilde{X}}}$ es una “posibilidad de segundo orden” formalmente equivalente a las consideradas en [5]. Se llama así, porque es una distribución de posibilidad definida sobre un conjunto de medidas de probabilidad. Una medida de posibilidad representa la misma información que un conjunto de medidas de probabilidad (el conjunto de medidas de probabilidad que están por debajo de ella y por encima de la medida de necesidad dual). Por tanto, una medida de posibilidad de segundo orden está asociada a un conjunto de medidas de probabilidad, cada una de ellas definida, a su vez, sobre un conjunto de medidas de probabilidad. Así, una posibilidad de segundo orden nos permitirá establecer afirmaciones como la siguiente: “la probabilidad de que la verdadera probabilidad del valor 7 sea 0.5 está comprendida entre 0.4 y 0.7”.

También de acuerdo con la interpretación posibilística

de los conjuntos borrosos, se puede proceder de forma algo diferente para describir la información proporcionada por \tilde{X} , siguiendo la línea iniciada en [13] para el caso particular de los conjuntos aleatorios. Supongamos que tenemos información parcial acerca de la distribución de probabilidad que modela un experimento compuesto por dos sub-experimentos cuyos espacios muestrales son Ω y \mathbb{R} , respectivamente. Supongamos, por una parte que la distribución de probabilidad que modela el primero de ambos, $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ está totalmente determinada². Por otra parte, consideraremos una familia de medidas de posibilidad condicionadas $\{\Pi(\cdot \mid \omega)\}_{\omega \in \Omega}$, cada una de ellas determinada por cada conjunto borroso $\tilde{X}(\omega)$. Esta familia de medidas de posibilidad refleja nuestro conocimiento acerca de la relación entre cada resultado del primer sub-experimento y los posibles resultados del segundo. (Si el resultado del primer experimento es ω , entonces el grado de posibilidad de que en el segundo experimento ocurra x es $\tilde{X}(\omega)(x)$). La combinación, mediante técnicas de extensión natural ([15]), de ambas fuentes de información, nos permitiría describir la información disponible acerca de la distribución de probabilidad existente en $\beta_{\mathbb{R}}$ (la distribución de probabilidad que modela el segundo sub-experimento) mediante una probabilidad superior (un modelo de probabilidades imprecisas de orden 1, y no un modelo de orden 2 como el descrito anteriormente). Así, se podrán establecer afirmaciones como la siguiente: “la probabilidad del resultado 7 está comprendida entre 0.3 y 0.6”.

3. DEFINICIÓN DE VARIANZA

Cada uno de los tres modelos descritos en la sección anterior puede dar lugar a un tipo diferente de definición de varianza, como se verá a continuación.

3.1. Modelo clásico

Consideremos un espacio de probabilidad, (Ω, \mathcal{A}, P) , y una métrica, d , definida sobre la clase de los subconjuntos borrosos de \mathbb{R} (o sobre una subclase) y supongamos que $\tilde{X} : \Omega \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}(\mathbb{R})$ es una función $\mathcal{A} - \beta(d)$ medible³.

Definición 3.1 *Llamaremos varianza clásica de \tilde{X} a la cantidad*

$$\text{Var}_{\text{Cl}}(\tilde{X}) = \int_{\Omega} d(X, E(\tilde{X}))^2 dP.$$

Las distintas definiciones de varianza de la literatura que se ajustan a esta formulación se diferencian entre

² \mathcal{A} denota una σ -álgebra de sucesos sobre Ω .

³ $\beta(d)$ representa la σ -álgebra de Borel inducida por d .

sí en la métrica elegida y en la definición de esperanza de variables aleatorias borrosas considerada. En este aspecto, vamos a comentar brevemente algunos detalles de las definiciones de Körner ([8]) y de Lubiano et al. ([11]). Por una parte, en cuanto al concepto de esperanza, Körner considera la definición de Fréchet ([7]) para funciones medibles con valores en un espacio métrico⁴. El autor comprueba que la esperanza de Puri y Ralescu ([14]) es la única esperanza Fréchet para cierta familia de métricas definidas sobre la clase de conjuntos difusos compactos y normales de \mathbb{R} a las que denota genéricamente ρ_2 . De acuerdo con lo anterior, dada una distancia ρ_2 , define la varianza de la v.a.d. \tilde{X} como la cantidad:

$$\text{Var}_{\rho_2}(\tilde{X}) = \int_{\Omega} \rho_2(\tilde{X}, E_{PR}(\tilde{X}))^2 dP.$$

En cuanto a la familia de varianzas definidas por Lubiano et al. en [11], la esperanza considerada es también la de Puri-Ralescu y la clase de distancias es la definida por Bertoluzza et al. en [1] que, a su vez, es una subclase de la familia considerada por Körner. En [8] y [11], se pueden consultar propiedades muy interesantes de las familias de varianzas allí definidas. En este trabajo sólo comentaremos algunos aspectos particulares de las mismas, y para ello nos resultará suficiente mostrar su formulación para el caso particular en que \tilde{X} se reduzca a una aplicación multivaluada (una función cuyas imágenes son subconjuntos “nítidos” del espacio final). En ese caso, se puede comprobar fácilmente que las definiciones de Körner y Lubiano et al. se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\text{Var}(\tilde{X}) = \pi_1 \text{Var}(X_1) + \pi_2 \text{Cov}(X_1, X_2) + \pi_3 \text{Var}(X_2),$$

donde $\pi_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$, $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$ y X_1, X_2 son las variables aleatorias⁵ definidas en Ω como $X_1(\omega) = \inf \tilde{X}(\omega)$ y $X_2(\omega) = \sup \tilde{X}(\omega)$, $\forall \omega \in \Omega$, respectivamente. Así, en el caso particular de que π_2 sea nulo (y, por tanto, $\pi_3 = 1 - \pi_1$), la varianza del conjunto aleatorio resultará ser una combinación lineal convexa de las varianzas de sus extremos. Por otra parte, si $\pi_3 = (1 - \sqrt{\pi_1})^2$, la varianza de \tilde{X} coincide con la varianza de la combinación lineal convexa de X_1 y X_2 dada por la expresión $\sqrt{\pi_1}X_1 + (1 - \sqrt{\pi_1})X_2$. Es decir, en este caso, para cada elemento del espacio muestral, ω , se puede elegir un punto representativo, $\alpha X_1(\omega) + (1 - \alpha)X_2(\omega)$ (con $\alpha \in [0, 1]$), de la imagen de la v.a.d. y, a continuación, calcular la varianza de

⁴Fréchet define la esperanza de una función medible, Z , con valores en un espacio métrico (M, d) como una solución, $E^{(d)}(Z)$, (no necesariamente única) del problema: $E[d(Z, E^{(d)}(Z))]^2 = \min_{a \in M} E[d(Z, a)]^2$.

⁵Bajo las condiciones de medibilidad exigidas a \tilde{X} por los autores, las funciones X_1 y X_2 son $\mathcal{A} - \beta_{\mathbb{R}}$ medibles.

la v.a. (clásica) resultante. Con estos ejemplos, observamos que las familias de varianzas así definidas permiten cuantificar la dispersión de los “valores” de \tilde{X} si ésta es considerada como una función medible desde un punto de vista clásico, lo cual puede ser útil cuando las imágenes de \tilde{X} son etiquetas lingüísticas.

Ahora bien, si consideramos la variable aleatoria borrosa como la observación imprecisa de una variable aleatoria, tal como sugieren Kruse y Meyer, esta definición “clásica” de varianza no es, quizás, la más adecuada. Observemos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.1 Consideremos, por una parte, un espacio muestral unitario (que modelará un experimento determinista), $\Omega_1 = \{\omega_1\}$, dotado de estructura de espacio probabilístico con la única σ -álgebra que se puede definir sobre él, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{P}(\Omega_1)$ y la única medida de probabilidad posible, P_1 . Definamos un conjunto aleatorio, $\Gamma_1 : \Omega_1 \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$, de la forma $\Gamma_1(\omega_1) = [-K, K]$. Consideremos, por otra parte, el espacio probabilístico correspondiente al lanzamiento de una moneda equilibrada, $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, P_2)$, y el conjunto aleatorio $\Gamma_2 : \Omega_2 \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ definido de la forma $\Gamma_2(c) = \Gamma_2(+)$ o $\Gamma_2(-)$ = $[-K, K]$. En este ejemplo, Γ_1 sirve para representar la salida (conocida de forma imprecisa) de un experimento determinista. Por ejemplo, permite representar la cantidad de dinero que, con total seguridad, vamos a recibir, si únicamente sabemos que está comprendida entre $-K$ y K . Por su parte, Γ_2 puede utilizarse para representar la ganancia que obtendremos tras lanzar una moneda equilibrada: la cantidad que vamos a recibir depende del resultado de la moneda y está fijada antes de realizar el experimento, pero nosotros sólo la conocemos de forma imprecisa. Ambos conjuntos aleatorios, considerados como funciones medibles clásicas, inducen la misma distribución de probabilidad (degenerada en el “punto” $[-K, K]$). De esta forma, ambos tienen la misma esperanza de Aumann (que coincide con su única imagen) y tienen varianza “clásica” nula, ya que ambos son funciones constantes. Sin embargo, si, de acuerdo con la interpretación de Kruse y Meyer, suponemos que cada uno de ellos representa la observación imprecisa de una v.a. clásica, en el primer caso sabemos con seguridad que la varianza de la v.a. original es 0. En el segundo caso sólo sabemos que es un valor comprendido entre 0 y K^2 .

Éste es sólo un ejemplo sencillo que sirve para ilustrar las limitaciones de la varianza “clásica” en la cuantificación de la información disponible acerca de la varianza de la v.a. original, cuando se utiliza una interpretación “posibilística” de las v.a. difusas. En la práctica, una v.a.d. puede utilizarse para representar la observación imprecisa de cierta característica de los elementos de una población Ω . Para representar la información que ésta proporciona acerca de la varianza de la v.a.

(clásica) que modela dicha característica debemos recurrir a la varianza definida por Kruse y Meyer.

3.2. Modelo impreciso de 2º orden

En [9], Kruse define la varianza de una variable aleatoria borrosa, $\tilde{X} : \Omega \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}(\mathbb{R})$, como el único conjunto borroso cuyos α -cortes vienen dados de la forma:

$$[\text{Var}_{\text{Kr}}(\tilde{X})]_{\alpha} := \{\text{Var}(X) \mid X \in S(\tilde{X}_{\alpha})\},$$

donde $S(\tilde{X}_{\alpha})$ representa el conjunto de todas las selecciones medibles de la aplicación multivaluada α -corte de \tilde{X} .

Se puede comprobar fácilmente que la función de pertenencia de este conjunto borroso viene dada por la expresión:

$$\text{Var}_{\text{Kr}}(\tilde{X})(x) = \sup\{\text{acc}(X) \mid \text{Var}(X) = x\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Observamos que esta definición concuerda con el modelo de posibilidad de orden 2 mostrado en la sección 2. Así, el grado de pertenencia de un valor x al conjunto borroso $\text{Var}_{\text{Kr}}(\tilde{X})$ representa el grado de posibilidad de que la variable aleatoria original sea una de aquéllas cuya varianza coincide con x . En el caso particular de que \tilde{X} sea una aplicación multivaluada, $\text{Var}_{\text{Kr}}(\tilde{X})$ será el conjunto clásico formado por las varianzas de todas sus selecciones medibles. En otras palabras, el conjunto de posibles valores de la varianza de la v.a. original. Así, en el ejemplo 3.1, las respectivas varianzas son, según esta definición, $\text{Var}_{\text{Kr}}(\Gamma_1) = \{0\}$ y $\text{Var}_{\text{Kr}}(\Gamma_2) = [0, K^2]$. Observamos así que la varianza de Kruse permite distinguir entre dos variables aleatorias difusas con la misma distribución de probabilidad “clásica” cuando se utilizan en este contexto. Sin embargo, no siempre asocia distintos valores a dos v.a.d. con distinta varianza “clásica”, como veremos en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 3.2 Consideremos el espacio de probabilidad $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, P_2)$ del ejemplo 3.1 y el conjunto aleatorio constante Γ_2 definido allí. Definamos, por otra parte, el conjunto aleatorio $\Gamma_3 : \Omega_2 \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ de la forma siguiente: $\Gamma_3(c) = [-K, 0]$ y $\Gamma_3(+)= [0, K]$. En ambos casos, la varianza de Kruse da como resultado el intervalo $[0, K^2]$. Sin embargo, la varianza clásica asignaría el valor 0 a Γ_2 y un valor estrictamente positivo a Γ_3 . Este ejemplo nos permite observar que la varianza de Kruse no sirve, en general, para cuantificar la dispersión de las imágenes de una v.a. difusa, cuando ésta se considera como una función medible clásica.

La varianza de Kruse refleja la imprecisión inherente (en el caso de que ésta exista) en las observaciones de la salida de un experimento aleatorio. Por tanto, da como resultado un conjunto (nítido o difuso) y no un

valor real, como la varianza “clásica”. En la sección siguiente propondremos un modelo en el que también refleja la imprecisión, pero de manera algo diferente. Se trata de un modelo de probabilidades imprecisas de orden 1 y no de orden 2, de manera que asignará a cualquier v.a.d. un conjunto clásico. Con la ayuda de ejemplos sencillos, trataremos de mostrar las similitudes y diferencias con el modelo presente.

3.3. Modelo impreciso de 1º orden

En esta sección introduciremos una nueva definición de varianza. Para ello, debemos considerar el modelo de probabilidades imprecisas de orden 1 mostrado al final de la sección 2. Tal como señalábamos allí, vamos a considerar, por una parte, la medida de probabilidad, P (definida sobre \mathcal{A}), que modela el primer sub-experimento y, por otra, una familia de medidas de posibilidad condicionadas, $\{\Pi(\cdot \mid \omega)\}_{\omega \in \Omega}$, definidas de la forma siguiente:

$$\Pi(A \mid \omega) = \Pi_{\tilde{X}(\omega)}(A) = \sup_{x \in A} \tilde{X}(\omega)(x), \quad \forall A \in \beta_{\mathbb{R}}, \quad \forall \omega.$$

En la fórmula anterior, $\Pi_{\tilde{X}(\omega)}$ representa la medida de posibilidad determinada por la distribución de posibilidad $\tilde{X}(\omega) : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$. Así, el valor $\Pi(A \mid \omega)$ establece una cota superior para la probabilidad de que el resultado final pertenezca a A , bajo la hipótesis de que el resultado del experimento inicial es ω . Esta familia de medidas de posibilidad representa el conocimiento (impreciso) recogido por \tilde{X} acerca de la relación existente entre el resultado del primer sub-experimento y el conjunto de posibles resultados en el segundo. En este contexto, todo lo que conocemos acerca de la distribución de probabilidad que modela el segundo experimento es que pertenece al conjunto:

$$\{Q_2 \mid Q_2 \text{ marginal de } P \text{ y } Q(\cdot \mid \cdot), Q(\cdot \mid \cdot) \in \mathcal{C}\},$$

donde $\mathcal{C} = \{Q(\cdot \mid \cdot) \text{ probabilidad de transición} \mid$

$$Q(A \mid \omega) \leq \Pi(A \mid \omega) \quad \forall A \in \beta_{\mathbb{R}}, \quad \omega \in \Omega\}.$$

Puede observarse fácilmente que así se generaliza el concepto de probabilidad inducida por una variable aleatoria clásica: si $\Pi(\cdot \mid \omega)$ es, en particular, la medida de probabilidad degenerada en un punto $X(\omega)$, entonces el conjunto anterior se reduce al conjunto unipuntual $\{P_X\}$. (En este caso, la probabilidad inducida por $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ en $\beta_{\mathbb{R}}$ es la única medida de probabilidad compatible con P y $\Pi(\cdot \mid \cdot)$). Por otra parte, la varianza de una v.a. clásica, $\text{Var}(X) = \int_{\Omega} [X - E(X)]^2 dP$, se puede expresar de forma alternativa como la siguiente integral de Lebesgue con respecto a P_X :

$$\text{Var}(P_X) = \int_{\mathbb{R}} \left(\text{id} - \int_{\mathbb{R}} \text{id} dP_X \right)^2 dP_X,$$

donde $\text{id}:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es la función identidad⁶. Así, en el modelo de probabilidades imprecisas propuesto, todo lo que conocemos acerca de la varianza de las salidas del segundo sub-experimento es que pertenece al conjunto:

$$\text{Var}_{\text{Im } 1}(\tilde{X}) = \{\text{Var}(Q_2) \mid Q_2 \text{ marginal de } P \text{ y } Q(\cdot|\cdot), \\ Q(\cdot|\cdot) \in \mathcal{C}\}.$$

Se puede comprobar el siguiente resultado acerca del conjunto $\text{Var}_{\text{Im } 1}(\tilde{X})$, que nos permitirá facilitar los cálculos (omitiremos la demostración por falta de espacio):

Teorema 3.1 $\text{Var}_{\text{Im } 1}(\tilde{X}) = \{\text{Var}(Q) \mid Q(A) \leq \bar{P}_{\tilde{X}}(A), \forall A \in \beta_{\mathbb{R}}\}$ donde $\bar{P}_{\tilde{X}}$ es la función de conjuntos subaditiva dada por

$$\bar{P}_{\tilde{X}}(A) = \int_0^1 P_{\tilde{X}_\alpha}^*(A) d\alpha, \forall A \in \beta_{\mathbb{R}}$$

y, para cada $\alpha \in (0, 1]$, $P_{\tilde{X}_\alpha}^*$ es la probabilidad superior de Dempster del conjunto aleatorio \tilde{X}_α .

$\text{Var}_{\text{Im } 1}(\tilde{X})$ es el conjunto de posibles valores de la varianza del segundo sub-experimento de acuerdo con la información disponible. Vamos a comparar en un ejemplo la información proporcionada por $\text{Var}_{\text{Im } 1}$ y Var_{Kr} acerca de la varianza de la distribución de probabilidad “original”.

Ejemplo 3.3 Consideremos el intervalo unidad, $\Omega = [0, 1]$, dotado de estructura de espacio probabilístico mediante la medida de Lebesgue. Consideremos la variable aleatoria borrosa $\tilde{X} : \Omega \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ constante en el conjunto difuso \tilde{A} determinado por los α -cortes $\tilde{A}_\alpha = [-(1 - \alpha), 1 - \alpha]$. Se puede comprobar fácilmente que $[\text{Var}_{\text{Kr}}(\tilde{X})]_\alpha = [0, (1 - \alpha)^2]$, $\forall \alpha > 0$. Por otra parte, si nos apoyamos en el resultado del teorema 3.1, observamos que $\text{Var}_{\text{Im } 1}(\tilde{X})$ es el intervalo $[0, 1/3]$. Observamos claramente que este intervalo está estrictamente contenido en el soporte de $\text{Var}_{\text{Kr}}(\tilde{X})$. Así, bajo el modelo de primer orden aquí descrito, la varianza de los resultados del experimento es, con seguridad, inferior o igual a $1/3$, mientras que, según el modelo de segundo orden, se asigna un grado de posibilidad estrictamente positivo a los valores comprendidos entre $1/3$ y 1 .

Pasemos ahora a examinar la relación entre ambos modelos en el caso particular de que \tilde{X} sea un conjunto

⁶Dado que la varianza de una v.a. clásica es función de su distribución de probabilidad inducida, a partir de ahora, cometeremos un pequeño abuso del lenguaje y la expresaremos como la varianza de dicha distribución de probabilidad.

aleatorio. En ese caso, de acuerdo con el teorema 3.1, se observa la igualdad

$$\text{Var}_{\text{Im } 1}(\tilde{X}) = \{\text{Var}(Q) \mid Q(A) \leq P^*(A), \forall A \in \beta_{\mathbb{R}}\},$$

donde P^* es la probabilidad superior del conjunto aleatorio. Por otra parte, se satisface claramente la igualdad

$$\text{Var}_{\text{Kr}}(\tilde{X}) = \{\text{Var}(Q) \mid Q = P_X, \text{ con } X \in S(\Gamma)\}.$$

Dado que el conjunto de medidas de probabilidad $P(\Gamma) = \{P_X \mid X \in S(\Gamma)\}$ está contenido en $M(P^*) = \{Q \mid Q(A) \leq P^*(A), A \in \beta_{\mathbb{R}}\}$, la varianza de Kruse es, en este caso, un conjunto contenido en la varianza del modelo de primer orden aquí descrito. En el caso de que $P(\Gamma)$ esté estrictamente contenido en $M(P^*)$ existirá la posibilidad de que $\text{Var}_{\text{Kr}}(\tilde{X})$ esté también estrictamente contenida en $\text{Var}_{\text{Im } 1}(\tilde{X})$. Las relaciones existentes entre $P(\Gamma)$ y $M(P^*)$ han sido estudiadas con detalle en [3] y [4], entre otros. A continuación mostramos un ejemplo en el que ambos conjuntos son distintos y esta diferencia se refleja en el cálculo de la varianza.

Ejemplo 3.4 Volvamos a considerar los conjuntos aleatorios considerados en el ejemplo 3.1. Según el modelo descrito en esta sección, en el primer caso, el primer sub-experimento es determinista y la relación entre los dos sub-experimentos viene determinada por Γ_1 . Este conjunto aleatorio representa una distribución de posibilidad condicionada “vacía” sobre $[-K, K]$. Así que el conjunto de medidas de probabilidad condicionadas, $Q(\cdot|\omega_1)$, compatibles con ella es el conjunto de todas las medidas que asignan probabilidad 1 al conjunto $[-K, K]$. Así, se refleja la siguiente información: una vez realizado el primer experimento, se elige un número al azar entre $-K$ y K , no fijado de antemano. En el caso de Γ_2 , el primer sub-experimento consiste en el lanzamiento de una moneda. Una vez observado el resultado, se elige, cualquiera que sea éste (cara o cruz), un número al azar entre $-K$ y K . Así, en este ejemplo se ve intuitivamente que, en lo que concierne a la salida del segundo sub-experimento, se podría obviar el lanzamiento de la moneda (no como en el caso del modelo de orden 2) y, por tanto, Γ_1 y Γ_2 reflejan, desde este punto de vista, la misma información. Así, observamos que $\text{Var}_{\text{Im } 1}(\Gamma_1) = \text{Var}_{\text{Im } 1}(\Gamma_2) = [0, K^2]$.

Pasemos ahora a comentar algunas relaciones existentes entre la varianza correspondiente a este modelo impreciso de orden 1 y la varianza clásica de la sección 3.1. Se puede comprobar que las probabilidades superiores $P_{\tilde{X}_\alpha}^*$, $\alpha \in (0, 1]$ se pueden expresar como funciones de la medida de probabilidad inducida por \tilde{X} , $P_{\tilde{X}}$. Así, de acuerdo con el resultado mostrado en

el teorema 3.1, se observa que la varianza del modelo de probabilidades imprecisas considerado en esta sección es función de la medida de probabilidad inducida por \tilde{X} . Ahora bien, no es función, en general, de la varianza clásica, tal como mostraremos en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.5 Consideremos, por una parte, el conjunto aleatorio Γ_1 definido en el ejemplo 3.1 y, por otra, el conjunto aleatorio, Γ_5 , definido sobre el mismo espacio, de la forma $\Gamma_5(\omega_1) = \{0\}$. La varianza “clásica” asigna el valor 0 a ambos conjuntos aleatorios, mientras que la varianza imprecisa asigna, al primero el conjunto de valores $[0, K^2]$ y, al segundo, el conjunto unipuntual $\{0\}$.

Igualmente, se puede comprobar que la varianza clásica tampoco se puede expresar como función de la varianza considerada en esta sección. Para ello basta observar los conjuntos aleatorios del ejemplo 3.2.

4. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos estudiado distintas formas de generalizar el concepto de varianza de una variable aleatoria real al caso de variables aleatorias borrosas. En el trabajo de Körner ([8]) se establece una definición más general para el caso en que el espacio final es \mathbb{R}^n , con $n \in \mathbb{N}$ arbitrario. En aquel trabajo se define la varianza de \tilde{X} como la esperanza del cuadrado de la distancia de sus imágenes a su esperanza Fréchet. En el caso particular de que \tilde{X} sea un vector aleatorio clásico y la distancia elegida sea la euclídea, el resultado de ese cálculo es un momento de inercia. De esta manera, en el caso n -dimensional se generaliza, mediante el procedimiento de Körner, un concepto que puede tener utilidad en la medición de la dispersión de las imágenes de la variable aleatoria difusa, pero no el concepto de matriz de varianzas-covarianzas. Si, por el contrario, lo que se pretende es generalizar este último, quizás se puede utilizar el procedimiento sugerido por Kruse sin demasiadas modificaciones. Mediante razonamientos similares a los del autor, se puede obtener como resultado un conjunto borroso sobre una la clase de matrices cuadradas que asocie, a cada matriz particular, un grado de posibilidad. Se indicará, con este conjunto difuso, el conocimiento impreciso disponible acerca de la matriz de varianzas-covarianzas del vector aleatorio “original”. En [12], Meyer propone una definición de covarianza siguiendo razonamientos similares a los de Kruse. Nuestra intuición nos dice que, probablemente, la combinación de las informaciones proporcionadas por separado acerca de la varianza de cada componente del vector y de la covarianza entre ellas será más imprecisa que la información proporcionada directamente acerca de la matriz de varianzas-

covarianzas.

Referencias

- [1] C. Bertoluzza, A. Salas, N. Corral (1995) On a new class of distances between fuzzy numbers. *Mathware and Soft Computing* **2** 71-84.
- [2] I. Couso, S. Montes, P. Gil (1998) Función de distribución y mediana de variables aleatorias difusas, *Actas del Congreso ESTYLF'98*. Pamplona, España.
- [3] I. Couso, S. Montes, P. Gil (2002) Second order possibility measure induced by a fuzzy random variable. En *Statistical modeling, analysis and management of fuzzy data* (eds: C. Bertoluzza, M. A. Gil y D. A. Ralescu), 127-144. Physica-Verlag, Heidelberg, Alemania.
- [4] I. Couso, L. Sánchez, P. Gil (2004) Imprecise distribution function associated to a random set, *Information Sciences* **159** 109-123.
- [5] G. de Cooman, P. Walley (2002) An imprecise hierarchical model for behaviour under uncertainty, *Theory and Decision* **52** 327-374.
- [6] R. Féron (1976) Ensembles aléatoires flous, *C.R. Acad. Sci. Paris Ser. A* **282** 903-906.
- [7] M. Fréchet (1948) Les éléments aleatoires de natures quelconque dans un espace distancié, *Ann. Inst. H. Poincaré* **10** 215-310.
- [8] R. Körner (1997), On the variance of fuzzy random variables, *Fuzzy Sets and Systems* **92** 83-93.
- [9] R. Kruse (1987) On the variance of random sets, *J. Math. Anal. Appl.* **122** 469-473.
- [10] R. Kruse, K.D. Meyer (1987) *Statistics with vague data* D. Reidel Publishing Company.
- [11] M.A. Lubiano, M.A. Gil, M. López-Díaz, M. T. López-García (2000), The λ -mean squared dispersion associated with a fuzzy random variable, *Fuzzy Sets and Systems* **111** 307-317.
- [12] K.D. Meyer, R. Kruse (1990) On calculating the covariance in the presence of vague data. *En: Progress in Fuzzy Sets and Systems*. W.H. Janko, M. Roubens y H.J. Zimmermann (Eds.) Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Alemania.
- [13] E. Miranda, G. de Cooman, I. Couso (2004) Imprecise probabilities induced by multi-valued mappings, *J. Stat. Plann. Inference*. En prensa.
- [14] M.L. Puri, D. Ralescu (1986) Fuzzy Random Variables, *J. Math. Anal. Appl.* **114** 409-422.
- [15] P. Walley (1991) *Statistical Reasoning with Imprecise Probabilities*. Chapman and Hall, Londres, Reino Unido.